



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE OPERADORES EXPLÍCITOS DE MIGRAÇÃO NO DOMÍNIO $\omega - x$

ALAN ALBANO VILAS BOAS SOUZA

SALVADOR – BAHIA

Julho – 2010

Análise de operadores explícitos de migração no domínio $\omega - x$

por

ALAN ALBANO VILAS BOAS SOUZA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

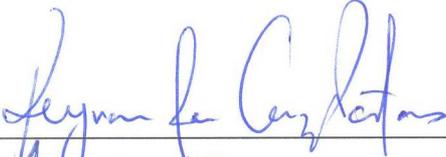
DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

DO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA







Comissão Examinadora

Dr. Reynam da Cruz Pestana - Orientador

Dr. Amin Bassrei

Dr. Hédison Kiuity Sato

Data da aprovação: 29/07/2010

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar técnicas de obtenção de extrapoladores de campo de ondas no domínio do espaço-frequência ($\omega - x$) a partir de operadores de extração obtidos no domínio número de onda e frequência ($\omega - k$). Além disso, é feita uma comparação qualitativa e também de custos computacionais entre os métodos de migração explícitos no domínio $\omega - x$, com extensões do método de migração por deslocamento de fase.

Também são estudados os principais algoritmos de desenho de filtros empregados para o desenho de extrapoladores utilizados na migração sísmica 2-D. Entre os métodos clássicos, para desenho de filtros, destaca-se os métodos através de janelamento, expansão em série de Taylor e os baseados no algoritmo de troca de Remez. Além disso, são estudados especificamente os métodos para a obtenção dos extrapoladores que modifica o operador analítico a fim de tornar mais simples sua transformação para o domínio de interesse e o método que realiza a transformação através de um processo de mínimos quadrados ponderados, sendo os pesos, neste caso, utilizados para otimizar as propriedades do operador dentro da faixa frequência de interesse.

Por fim, verificou-se a performance dos diferentes operadores de extração nos modelos sintéticos Marmousi, Sigsbee e BP, modelos esses comumente utilizados para testes de algoritmos de migração. Os resultados obtidos, para os diferentes operadores explícitos no domínio $\omega - x$, foram comparados entre si e com os resultados utilizando-se os métodos *PSPI* e *Split Step*. Os tempos de execução de cada método foram mensurados e serviram como parâmetro qualitativo para avaliar os custos computacionais envolvidos no uso de cada um desses métodos.

ABSTRACT

This work has as objective the study of methods to obtain wavefield extrapolators in the space frequency domain ($\omega - x$) from extrapolation operators obtained in the wavenumber frequency domain ($\omega - k$). Besides that, it was carried out a qualitative comparison of the computational cost and quality of the migrated gathers with other extensions of the phase shift method.

The main methods of filter design used to obtain extrapolators in 2D seismic migration were studied. The classical methods of filter design including the windowing method, Taylor series matching and Remez exchange algorithm were studied together with others explicit methods commonly used in seismic migration processing. These methods include modifications of analytical operators which aim to ease the transform to the desired domain and weighted least squares. This weighted least squares procedure use weights to optimize the characteristics of the operator inside a band of interesting frequency.

Finally, the performance of different extrapolation operators using the synthetic models Marmousi, Sigsbee and BP, which are seismic models commonly used to test migration algorithms, was verified. The results obtained for the different extapolators in $\omega - x$ domain were compared against each other and with the results obtained using *PSPI* and *Split Step* migration methods. The runtime of each algorithm was measured and used as a qualitative measure of computational cost.

ÍNDICE

RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
ÍNDICE	iv
ÍNDICE DE TABELAS	vi
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 Fundamentos teóricos	2
1.1 Migração sísmica	2
1.2 Métodos de migração sísmica	2
1.2.1 Extrapolação	3
1.2.2 Imageamento	5
1.3 Soluções da equação de onda	5
1.4 Migração em termos de deconvolução espacial	7
1.4.1 Extrapolação direta de campos de onda (Problema direto)	8
1.4.2 Extrapolação inversa de campos de onda (Problema inverso)	10
CAPÍTULO 2 Operadores de extrapolação	12
2.1 Migração utilizando o método <i>PSPI</i>	12
2.2 Migração utilizando o método <i>Split Step</i>	13
2.3 Migração no domínio $\omega - x$	14
2.3.1 Algoritmo de migração $\omega - x$	17
2.3.2 Desenho de operadores suavizados	18
2.3.3 Desenho de extrapoladores utilizando janelamento	19
2.3.4 Desenho de extrapoladores utilizando o algoritmo de Remez (método de Parks-McClellan)	21
2.3.5 Desenho de extrapoladores utilizando mínimos quadrados ponderados	24
2.3.6 O extrapolador de Hale	28
CAPÍTULO 3 Resultados	31
3.1 Introdução	31

3.2	Resultados com o método PSPI	34
3.3	Resultados com o método Split Step	37
3.4	Resultados da migração $\omega - x$	39
3.4.1	Tamanho do operador de extrapolação	41
3.4.2	Tipo do operador de extrapolação	41
3.4.3	Restrições quanto ao mergulho dos refletores	41
3.4.4	Seções migradas	44
3.4.5	Modelo Marmousi	44
3.4.6	Modelo Sigsbee	48
3.4.7	Modelo do BP	51
CAPÍTULO 4	Conclusões	54
	Agradecimentos	56
	APÊNDICE A Diferenciação de funções banda limitadas	57
	Referências	58

ÍNDICE DE TABELAS

1.1	Aspectos positivos e negativos de alguns dos diferentes métodos de migração. ○ - bem adequado, □ - adequado, e △ - não adequado.	4
2.1	Parâmetros do operador de extrapolação. Esses parâmetros foram utilizados na construção de todos os operadores exibidos neste capítulo.	17
2.2	Fórmula que definem as funções janelas de Kaiser e Gauss.	20
3.1	Tempo de execução do algoritmo de migração PSPI aplicado aos modelos sintéticos.	34
3.2	Tempo de execução para o algoritmo de migração Split Step aplicado aos modelos sintéticos.	39
3.3	Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo Marmousi	48
3.4	Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo Sigsbee	48
3.5	Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo BP	51

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	No processo de extrapolação recursiva, o passo anterior do processo de extrapolação é a entrada do próximo passo. Já em processos não recursivos, o dado inicial é utilizado como entrada para todos os passos da extrapolação (adaptado de Berkhout (1981)).	3
1.2	Domínios de aplicação dos extrapoladores, assim como possíveis limitações das funções velocidades do modelo que podem ser corretamente tratadas por tais extrapoladores, quando referidos a implementações básicas desses extrapoladores. O segundo diagrama mostra as possíveis implementações para esses operadores (adaptado de Blacquièrre (1989)).	4
1.3	Modelo físico e matemático para um experimento sísmico. Na figura é ilustrado a resposta devido a uma inomogeneidade existente em z_m . Esquema adaptado de Berkhout (1982).	10
2.1	Amplitude do operador de extrapolação (<i>phase shift</i>) em função da frequência e número de onda. Parâmetros do operador: $\Delta x = \Delta z = 15$ m, $c = 1000$ m e faixa de frequência de 0 a 60 Hz.	15
2.2	Operador no domínio $\omega - x$ e seu espectro de amplitude no domínio $\omega - k$	16
2.3	Extrapolação do campo de onda do nível z_m para o nível z_{m+1} para uma frequência de interesse ω_i	17
2.4	Operador no domínio $\omega - x$ e espectro de amplitude do mesmo no domínio $\omega - k$	19
2.5	Espectros de amplitude, domínios $\omega - x$ e $k - x$, do operador de extrapolação $D(k_x)$, obtido utilizando uma janela gaussiana.	20
2.6	Espectros de amplitude, domínios $\omega - x$ e $k - x$, do operador de extrapolação $D(k_x)$, obtido utilizando uma janela de Kaiser, o parâmetro ω_a utilizado foi igual a 3.	21
2.7	Especificações fornecidas ao algoritmo de Parks-McCellan para a criação de um filtro passa baixa (<i>Low Pass</i>).	21
2.8	Fluxograma para o algoritmo de Remez, adaptado de (Rabiner, McClellan e Parks, 1975).	24
2.9	Filtro extrapolador, obtido utilizando o algoritmo de Remez	25
2.10	Filtro obtido utilizando o método <i>WLSQ</i> tendo como base o operador analítico de <i>phase shift</i>	27

2.11	Filtro obtido utilizando o método <i>WLSQ</i> tendo como base o operador analítico suavizado.	28
3.1	Campo de velocidade para o modelo Marmousi.	32
3.2	Campo de velocidade para o modelo Sigsbee2A.	33
3.3	Campo de velocidade para o modelo BP.	35
3.4	Resultado da migração <i>PSPI</i> para o modelo Marmousi	36
3.5	Resultado da migração <i>PSPI</i> para o modelo Sigsbee2A	36
3.6	Resultado da migração <i>PSPI</i> para o modelo BP	37
3.7	Resultado da migração <i>Split Step</i> para o modelo Marmousi	38
3.8	Resultado da migração <i>Split Step</i> para o modelo Sigsbee2A	38
3.9	Resultado da migração <i>Split Step</i> para o modelo BP	39
3.10	Fluxograma do algoritmo de migração pré-empilhamento no domínio $\omega - x$ utilizando operadores explícitos.	40
3.11	Modelo Marmousi migrado com diferentes comprimento de operadores. O tamanho dos operadores cresce da esquerda para direita e de cima para baixo: 19 pontos (figura mais alta à esquerda) até 29 pontos (figura mais baixa à direita). O tamanho dos operadores sempre são ímpares e crescem de 2 em 2.	42
3.12	Modelo Sigsbee migrado com os mesmos parâmetros, variando apenas o algoritmo utilizado na obtenção dos extrapoladores. (A) truncamento, (B) operador de fase suavizada, (C) Janela de Kaiser, (D) algoritmo de Remez, (E) <i>WLSQ</i> e (F) <i>WLSQ</i> tendo como entrada o operador de fase suavizada.	43
3.13	Resultado da migração RTM com o método de solução REM do dado sintético BP.	44
3.14	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o operador <i>WLSQ</i> otimizando e o operador de fase suavizado.	45
3.15	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador de Hale	45
3.16	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico	46
3.17	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido por janelamento e função janela de Kaiser do operador analítico	46
3.18	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez	47
3.19	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo dos métodos dos mínimos quadrados ponderados	47
3.20	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador de Hale	48
3.21	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico	49

3.22	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido por janelamento e a função janela de Kaiser do operador analítico	49
3.23	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez	50
3.24	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo do métodos dos mínimos quadrados ponderados	50
3.25	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico	51
3.26	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido por janelamento e a função janela de Kaiser do operador analítico . .	52
3.27	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez	52
3.28	Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo do métodos dos mínimos quadrados ponderados . . .	53

INTRODUÇÃO

Os métodos de migração são de extrema importância para o processamento sísmico, pois são considerados ferramentas úteis para se obter aproximações da geologia de subsuperfície.

O processo de migração consiste na utilização de soluções da equação de onda, onde essas descrevem matematicamente e fisicamente o fenômeno de propagação de ondas sísmicas em subsuperfície, para a geração de uma imagem aproximada do meio geológico estudado.

No entanto, muitas soluções obtidas da equação da onda são baseadas em premissas e simplificações. As considerações mais comuns para a obtenção dessas soluções incluem variações de velocidade apenas na vertical e em meios estratificados horizontalmente, ou seja, elas não são válidas em um vasto número de meios geológicos que são de grande interesse para a exploração. Por isso, buscam-se extensões dessas soluções clássicas de forma que as mesmas possam lidar com meios mais complexos.

Este trabalho estuda uma extensão do método clássico de migração por deslocamento de fase (em inglês, *phase shift*), Gazdag (1978), no qual o operador analítico de deslocamento de fase é transformado para o domínio $\omega - x$, permitindo assim variações laterais de velocidade do meio. A extensão também é comparada com duas outras modificações do método *phase shift* que também acomodam variações laterais de velocidade, *phase-shift plus interpolation*, *PSPI*, (Gazdag e Sguazzero, 1984) e *split-step* (Stoffa, Fokkema, de Luna Freire e Kessinger, 1990).

A transformação do operador de extrapolação do domínio do número de onda ($\omega - k$) para o domínio do espaço frequência ($\omega - x$) é estudada como sendo um problema de desenho de filtros digitais. Assim, deve-se obter uma sequência de coeficientes a partir de um conjunto de especificações definidas num domínio diferente de onde os mesmos serão aplicados. Então, é feita a aplicação do operador de extrapolação através da operação de convolução.

O arcabouço teórico para o entedimento da migração como um processo de filtragem no domínio $\omega - x$ foi desenvolvido por Berkhout (1982).

1.2.2 Imageamento

Durante o processo de extrapolação do campo de onda é obtido uma sequência de campos, que consistem em campos de ondas extrapolados para diferentes níveis de profundidade. Esses campos de onda, caso seja utilizado o modelo do refletor explosivo (Loewenthal et al., 1976), consistem unicamente de campos de ondas obtidos por depropagação do campo de onda originalmente gravado na superfície. A condição de imagem para esse método é então determinada pelas considerações do modelo do refletor explosivo, que impõe que o imageamento ocorra no tempo $t = 0$. Essa condição de tempo igual a zero pode assumir formas nem sempre tão óbvias. Nas migrações no domínio da frequência e número de onda pós-empilhamento essa condição de imagem corresponde, por exemplo, a uma soma por todas as frequências.

Em migrações pré-empilhamento é utilizado outro tipo de condição de imagem, descrita originalmente em Claerbout (1971). Essa condição de imagem é aplicada aos campos obtidos da extrapolação das fontes e de receptores através de um processo de deconvolução unidimensional (divisão no domínio da frequência). No entanto, uma aplicação direta desse método não é possível por conta de instabilidade numérica. Como uma primeira aproximação é possível transformar esse processo de deconvolução em um de correlação (correlação cruzada). Nesse caso os campos da fonte e do receptor são correlacionados a fim de se obter uma estimativa da refletividade. Existem variações desses métodos que tentam preservar a amplitude verdadeira dos sinais a partir de um processo de inversão estabilizada. Um sumário e vários exemplos desses tipos de condição de imagem pode ser encontrado em Schleicher, Costa e Novais (2008).

1.3 Soluções da equação de onda

Como dito anteriormente, os processos de migração fazem uso de soluções da equação de onda. Como é amplamente conhecido existem diversas formulações para a equação da onda, considerando os casos acústicos, elástico e anisotrópico. Tradicionalmente a migração de dados sísmicos em produção, muito utilizada pela indústria do petróleo, tem sido realizada através da equação acústica da onda. Apesar disso, está se tornando comum o uso de equações modificadas que permitem lidar com determinados tipos de anisotropia ou mesmo utilizando equações elástica da onda.

No presente trabalho será analisado operadores explícitos de extrapolação de campos de onda. Esses operadores podem ser obtidos a partir de algumas das soluções da equação da onda. Será obtido a seguir essas soluções para a equação acústica da onda, equação (1.1), que é definida como:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

onde P representa o campo de pressão, que é função das coordenadas cartesianas espaciais, $P = P(x, z, t)$ e a função velocidade que depende unicamente de z , ou seja, $c = c(z)$. ∇^2 representa o operador Laplaciano, sendo definido por: $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{zz}$.

Aplicando-se o seguinte par de transformada de Fourier na equação (1.1)

$$\hat{P}(k_x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z, t) e^{-i(\omega t - k_x x)} dx dt \quad (1.2a)$$

$$P(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(k_x, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x)} dk_x d\omega, \quad (1.2b)$$

obtemos então a equação unidimensional de Helmholtz

$$\frac{d^2 \hat{P}}{dz^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] \hat{P} = 0. \quad (1.3)$$

Encontramos, então, a partir da equação de Helmholtz, a seguinte relação de dispersão

$$k_z^2 = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] \quad (1.4)$$

Assumindo temporariamente um meio de velocidade constante¹ é possível fatorar a equação (1.3). Também é possível derivar o operador de extrapolação para uma função velocidade do tipo $c(z)$ utilizando a aproximação WKBJ (Robinson, 1986)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_z \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_z \right) \hat{P} = 0. \quad (1.5)$$

A fatoração acima resulta em duas equações de primeira ordem, denominadas equações unidirecionais da onda (Robinson, 1986).

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} \hat{P} = 0 \quad \text{Equação descendente} \quad (1.6a)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} - i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} \hat{P} = 0 \quad \text{Equação ascendente} \quad (1.6b)$$

A definição de onda ascendente e descendente é feita da seguinte forma. Uma onda descendente, com o aumento do tempo (t), tem que sofrer um aumento de z para manter a sua fase constante. Já uma onda ascendente, com o aumento do tempo (t), deve sofrer uma redução

¹A consideração de velocidade constante não implica necessariamente em um meio contendo uma única velocidade, mas que em cada camada, definida por $\Delta z = z_{m+1} - z_m$, a velocidade seja constante. Com isso é possível aplicar o operador de extrapolação $e^{ik_z \Delta z}$ recursivamente, por exemplo do nível z até o nível $z + \Delta z$, sendo que em cada passo é utilizada uma velocidade de referência.

do valor de z para manter a sua fase constante. Considerando por exemplo as soluções de ondas planas, no domínio do tempo e espaço, $e^{i(kz-\omega t)}$ (descendente) e $e^{-i(kz+\omega t)}$ (ascendente), essas soluções satisfazem a equação da onda e os sinais das mesmas são semelhantes às das respectivas equações unidirecionais (Scales, 1994; Berkhout, 1981).

Integrando as equações (1.6a) e (1.6b) verificamos que as mesmas têm soluções do tipo $\hat{P} = \hat{P}_0 e^{\pm ik_z z}$. Devemos então determinar a constante \hat{P}_0 . Utilizamos o campo registrado na superfície $P(x, z = 0, t)$, como condição de contorno, porém como estamos no domínio do número de onda e frequência temos que $\hat{P}_0 = \hat{P}(k_x, z = 0, \omega)$, resultando na solução $P(k_x, z, \omega) = \hat{P}(k_x, z = 0, \omega) e^{\pm ik_z z}$. Realizando a condição de imagem junto com a transformada de Fourier inversa obtemos o método de migração *phase shift* (Gazdag, 1978).

A fatoração realizada, como feito anteriormente, é válida apenas em meios de velocidade constante. Além disso, por serem equações unidirecionais, as equações (1.6a) e (1.6b) apresentam limitações de mergulhos dos eventos nas quais elas podem migrar corretamente. Apesar dessas limitações o uso de equações unidirecionais é comum por apresentar algumas outras vantagens como a inexistência de múltiplas, que ocorrem quando se faz uso da equação completa da onda e também por conta dos macro modelos empregados levarem à geração de múltiplas espúrias (Berkhout, 1986). Também, por serem equações de primeira ordem, elas exigem apenas uma condição de contorno, que é o campo de pressão registrado na superfície.

1.4 Migração em termos de deconvolução espacial

Na última seção obtemos um operador de extrapolação que é válido apenas para meios com velocidades dependentes unicamente de z . Nessa seção veremos que esse operador pode ser obtido a partir de um caso mais geral de um operador no domínio do espaço e frequência.

É possível formular o problema de extrapolação direto e inverso de campos de ondas em termos de uma convolução e deconvolução espacial, respectivamente, (Berkhout e Van Wulfften Palthe, 1979). Esse processo pode ser entendido da seguinte forma. O campo de pressão P pode ser dividido em duas componentes desacopladas, ou seja, $P = P_u + P_d$, (Berkhout, 1982), onde P_u é o campo ascendente e P_d o campo descendente. O dado sísmico é então tratado como sendo o resultado da interação desses campos durante a sua propagação como uma função que descreve as inhomogeneidades do meio (função refletividade). A interação do campo com a função refletividade é descrita por uma outra função. O objetivo da migração passa a ser o de anular o efeito dessa função que descreve a interação do campo de ondas com a função refletividade, com isso recuperando a refletividade do meio. Primeiro trataremos do problema direto.

1.4.1 Extrapolação direta de campos de onda (Problema direto)

Esta seção, assim como a próxima, tem como objetivo introduzir alguns dos conceitos do modelo **WRW** (Berkhout, 1982; Berkhout, 1981). Mais informações sobre esse modelo também pode ser encontrado em Thorbecke (1997). Nesse modelo o dado sísmico é descrito através de matrizes, sendo que a matriz **W** é conhecida como matriz de propagação, e a matriz **R** uma função que descreve a reflexão dependente do ângulo de incidência e afastamento (*offset*).

Como dito anteriormente, o campo de onda pode ser decomposto em duas componentes desacopladas, $P = P_u + P_d$, onde os subscritos u e d indicam, respectivamente, o campo ascendente (*upgoing*) e descendente (*downgoing*). Podemos obter esses campos nos níveis imediatamente acima (para a parte ascendente) ou abaixo (para o campo descendente). Expandindo os campos em série de Taylor, temos que:

$$P_d(z_{i+1}) = P_d(z_i) + \frac{(z_{i+1} - z_i)}{1!} \frac{\partial P_d}{\partial z_i} + \frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{2!} \frac{\partial^2 P_d}{\partial z_i^2} + \dots \quad (1.7a)$$

$$P_u(z_{i-1}) = P_d(z_i) + \frac{(z_{i-1} - z_i)}{1!} \frac{\partial P_u}{\partial z_i} + \frac{(z_{i-1} - z_i)^2}{2!} \frac{\partial^2 P_u}{\partial z_i^2} + \dots \quad (1.7b)$$

As expressões anteriores nos diz que conhecendo as derivadas em z , sendo essas calculadas utilizando a equação da onda, e o campo de pressão em um dado nível, é possível obter o campo de pressão em níveis distintos. No apêndice A é mostrado que podemos escrever as derivadas em termos de convolução no domínio do espaço e tempo, desde que as funções sejam banda-limitada, o que ocorre na prática. Com isso podemos escrever as equações (1.7a) e (1.7b) em termos de operadores de convolução (para mais detalhes na obtenção desses operadores ver Berkhout (1982)), isto é:

$$P_d(z_{i+1}) = \left[\delta(x) - \frac{(z_{i-1} - z_i)}{1!} H_1(x, z, \omega) + \frac{(z_{i-1} - z_i)^2}{2!} H_2(x, z, \omega) + \dots \right] * P_d(z_i) \quad (1.8a)$$

$$P_u(z_{i-1}) = \left[\delta(x) - \frac{(z_{i-1} - z_i)}{1!} H_1(x, z, \omega) + \frac{(z_{i-1} - z_i)^2}{2!} H_2(x, z, \omega) + \dots \right] * P_u(z_i) \quad (1.8b)$$

As funções H_1, H_2, \dots, H_n são funções que representam operadores convolucionais para as derivadas de ordem $1, 2, \dots, n$. Os termos entre colchetes podem ser escritos na forma de operadores:

$$W_d(x, y, \Delta z, \omega) = [\delta(x) + G(x, \Delta z, \omega)] \quad (1.9a)$$

$$W_u(x, y, \Delta z, \omega) = [\delta(x) + G(x, \Delta z, \omega)] \quad (1.9b)$$

A aplicação desses operadores levam o campo de pressão a níveis distintos e são representados por:

$$\hat{P}_u(z_{m-1}) = W_u(x, \Delta z, \omega) * \hat{P}_u(z_m) \quad (1.10a)$$

$$\hat{P}_d(z_{m+1}) = W_d(x, \Delta z, \omega) * \hat{P}_d(z_m) \quad (1.10b)$$

Os operadores W_d e W_u podem ser vistos como a resposta ao impulso espacial para cada componente de frequência ω (Berkhout, 1982). Esses operadores são recursivos, por exemplo, caso necessitemos extrapolar o campo de onda do nível z_0 até o nível z_i , aplicaremos recursivamente o operador W_d , de forma que $W_d(z_i, z_0) = W_d(z_1, z_0) * W_d(z_2, z_1) * \dots * W_d(z_i, z_{i-1})$, sendo essa relação válida também para o operador W_u . De tal forma que temos:

$$\hat{P}_u(z_0) = W_u(z_0, z_m) * \hat{P}_u(z_m) \quad (1.11a)$$

$$\hat{P}_d(z_m) = W_d(z_m, z_0) * \hat{P}_d(z_0) \quad (1.11b)$$

Da definição acima tem-se se que os operadores W_u e W_d podem ser representados por um único operador W , tornando desnecessário os subscritos u e d , sendo o sentido da extrapolação determinado pelos argumentos dos mesmos.

A decomposição em campos ascendentes e descendentes, feitas anteriormente, ainda não representa o dado sísmico comumente adquirido. Para que possamos obter de fato uma resposta da subsuperfície de um experimento sísmico, devemos incluir um operador que represente as inhomogeneidades do meio geológico em questão, assim como operadores que representem as fontes do campo de pressão e os detectores.

Esse operador que contém informações da refletividade será então convolvido com o campo descendente gerado por fontes na superfície, $S_n(z_m) = W(z_m, z_0)S(z_0)$, onde S_n representa o campo fonte (descendente). Esse campo quando convolvido com R , o operador que contém informações da função refletividade do meio, originará o campo ascendente no nível z_m , ou seja, $P(z_m) = R(z_m)S_n(z_m)$, sendo que esse será registrado pelos detectores na superfície, de forma que $P(z_0) = D(z_0) \sum_m P(z_m)$, onde D é um operador que representa a distribuição de detectores na superfície. Utilizando a definição anterior para $S(z_m)$, obtemos:

$$P(z_0) = D(z_0) \left[\sum_m W(z, z_m) R(z_m) W(z_m, z_0) \right] S_n(z_0) \quad (1.12)$$

A equação (1.12) representa o dado sísmico obtido a partir de um levantamento sísmico usual. A Figura 1.3 esquematiza o que foi descrito até agora e o subscrito n em \mathbf{S}_n é usado para indicar que temos um vetor de fontes (não no sentido que se tenham várias posições para a fonte, mas um arranjo de fontes para um único experimento).

A equação (1.12) é válida apenas para uma seção de arranjo de fonte comum. Há também uma generalização dessa equação para experimentos com múltiplas seções de fonte comum. Neste caso, substituímos os vetores P e S_n , respectivamente, pelas matrizes \mathbf{P} e \mathbf{S}_n . Cada coluna da matriz \mathbf{P} corresponde a uma seção de fonte comum e cada linha a uma seção de afastamento comum. Já na matriz \mathbf{S}_n cada coluna da mesma representa uma posição de um arranjo de fontes. A matriz \mathbf{W} por sua vez tem como colunas vetores que representam a

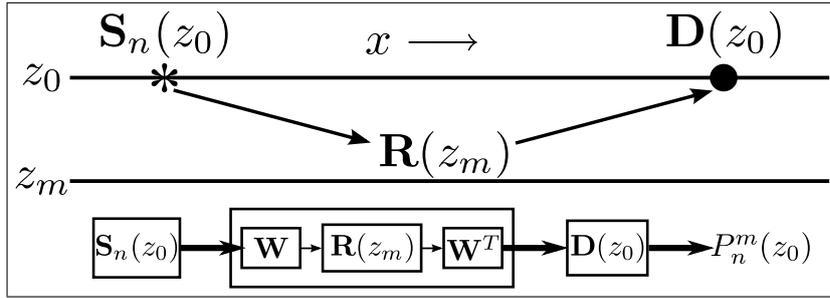


Figura 1.3: Modelo físico e matemático para um experimento sísmico. Na figura é ilustrado a resposta devido a uma inhomogeneidade existente em z_m . Esquema adaptado de Berkhout (1982).

influência do meio na propagação do campo de onda. No caso de um meio inhomogêneo, cada coluna dessa matriz conterá um operador W , tornando assim possível lidar com variações horizontais de velocidade. Portanto, resultando na seguinte equação para um experimento sísmico com múltiplas fontes.

$$\mathbf{P}(z_0) = \mathbf{D}(z_0) \left[\sum_m \mathbf{W}(z_0, z_m) \mathbf{R}(z_m) \mathbf{W}(z_m, z_0) \right] \mathbf{S}(z_0) \quad (1.13)$$

1.4.2 Extrapolação inversa de campos de onda (Problema inverso)

Como dito anteriormente é necessário remover a influência das matrizes de propagação W do dado sísmico. Entretanto, queremos remover a influência da propagação do campo de um nível ao outro. Para exemplificar, temos as seguintes expressões.

$$S(z_m) = W(z_m, z_{m-1})S(z_{m-1}) + N(z_m) \quad (1.14a)$$

$$P(z_{m-1}) = W(z_{m-1}, z_m)P(z_m) + N(z_{m-1}) \quad (1.14b)$$

Como anteriormente, S representa o campo descendente, P o campo ascendente e N o ruído na camada em questão. As expressões (1.14a) e (1.14b) nos mostram que o operador W quantificam os efeitos da propagação de um nível ao outro. Agora, caso queiramos obter o campo de onda em outros níveis, devemos remover o efeito de W dos mesmos, ou seja.

$$S(z_{m-1}) = F(z_{m-1}, z_m)S(z_m) = F(z_{m-1}, z_m)W(z_m, z_{m-1})S(z_{m-1}) + N'(z_m) \quad (1.15a)$$

$$P(z_{m-1}) = F(z_m, z_{m-1})P(z_m) = F(z_m, z_{m-1})W(z_{m-1}, z_m)P(z_m) + N'(z_{m-1}) \quad (1.15b)$$

O operador F tem o papel de operador inverso de W . Como o operador F é um inverso de um operador que é aplicado ao dado através de uma convolução, temos que F é um operador de deconvolução espacial. Das expressões anteriores temos

$$F(z_{m-1}, z_m)W(z_m, z_{m-1}) = \delta(x)\delta(y) \quad (1.16a)$$

$$F(z_m, z_{m-1})W(z_{m-1}, z_m) = \delta(x)\delta(y) \quad (1.16b)$$

Assim, quando escritas em forma matricial, as equações (1.16a) e (1.16b) têm as funções delta de Dirac substituídas pela matriz identidade \mathbf{I} . Importante notar que mesmo quando se faz uso das equações matriciais o que está sendo feito na prática é uma convolução, uma vez que é possível escrever convoluções em termos de produto de matrizes.

A questão que surge agora é como calcular esses operadores W e F . Esses operadores são obtidos com base na teoria ondulatória (Berkhout e Van Wulfften Palthe, 1979). Além disso, a existência de W e F mostra que o campo de onda pode ser propagado através de uma convolução espacial e depropagado através de uma deconvolução espacial. Esses operadores são em geral mais facilmente obtidos no domínio de Fourier, sendo portanto necessário levá-los ao domínio espaço-frequência. A determinação do operador F pode ser feita de três formas (Berkhout, 1982; Berkhout e Van Wulfften Palthe, 1979):

- **Inversão banda limitada** - $\hat{F} = \hat{W}_0/\hat{W}$, onde \hat{W}_0 é um filtro passa-baixa espacial sendo determinado da distribuição de velocidade do meio;
- **Inversão por mínimos quadrados** - O filtro inverso é obtido através de um processo de mínimos-quadrados.

$$\hat{F} = \frac{\hat{W}^*}{|\hat{W}| + |\hat{N}|^2}$$

- **Filtro combinado** - $\hat{F} = \hat{W}^*$ é a mais simples das abordagens sendo em geral também a mais empregada, uma vez que permitir obter operadores inversos estáveis, como será visto adiante.

Existem formas equivalentes das técnicas apresentadas acima para a formulação matricial.

CAPÍTULO 2

Operadores de extrapolação

Neste capítulo serão obtidos diversos extrapoladores, tanto no domínio do número de onda e frequência ($k_x - \omega$), quanto no domínio do espaço e frequência ($\omega - x$). Inicialmente obteremos os conhecidos operadores de migração *PSPI* (Gazdag e Sguazzero, 1984), em seguida, o operador de migração *Split Step*, (Stoffa, Fokkema, de Luna Freire e Kessinger, 1990). Esses métodos se caracterizam por serem extensões do familiar operador *phase shift* (apresentado no capítulo anterior 1.3), sendo essas extensões realizadas a fim de acomodar variações laterais de velocidade.

2.1 Migração utilizando o método *PSPI*

O método de migração *PSPI* desenvolvido por Gazdag e Sguazzero (1984), é uma extensão do método *phase shift*, discutido anteriormente. Nessa extensão o passo de extrapolação é subdividido em três etapas, descritas a seguir:

- **Deslocamento temporal:** O campo de onda no domínio do espaço-frequência sofre um deslocamento temporal, dado por :

$$P^*(x, z, \omega) = e^{i\frac{\omega}{c(x,z)}\Delta z} P(x, z, \omega) \quad (2.1)$$

Essa correção é aplicada de forma a manter a precisão do método para eventos com baixos ângulos de mergulho.

- **Correção:** Para a correção devido à variação lateral de velocidade o campo P^* é transformado para o domínio do número de onda, $P^*(x, z, \omega) \rightarrow P(k_x, z, \omega)$. A função velocidade verdadeira (que varia tanto na vertical quanto lateralmente) é aproximada por uma família de funções velocidades ($v_1(z), v_2(z), \dots, v_N(z)$) que varia apenas em z , de forma que é aplicada a seguinte correção:

$$P_i(x, z + \Delta Z, \omega) = P^*(k_x, z, \omega) e^{i\left(k_z - \frac{\omega}{v_i(z)}\right)\Delta z} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

O número de velocidades, N , assim como a distribuição das mesmas podem ser escolhidos de diversas formas utilizando, por exemplo algoritmo de Lloyd, entropia máxima e etc.

- **Interpolação:** A família de campos obtida no último passo deve voltar para o domínio do espaço-frequência, que é feito com uma transformada de Fourier inversa na direção x . Esses campos podem ser escritos como:

$$P_i(x, z, \omega) = A_i e^{i\theta_i} \quad (2.3)$$

Com isso é possível realizar uma interpolação linear para a amplitude e a fase utilizando os campos de referência que foram corrigidos com as velocidades mais próximas das velocidades do meio. Denotando esses campos de P_l e P_g , onde os índices l e g indicam respectivamente as velocidades próximas imediatamente inferior e superior à velocidade do meio, obtemos então as fórmulas de interpolação para a amplitude e fase:

$$A = \frac{A_l(v_2 - v) + A_g(v - v_1)}{v_g - v_l} \quad \theta = \frac{\theta_l(v_2 - v) + \theta_g(v - v_1)}{v_g - v_l} \quad (2.4)$$

Em cada passo da extrapolação é realizado o processo descrito anteriormente. O método oferece uma boa qualidade quando se utiliza um número adequado de velocidades de referências. Porém, seu custo computacional é elevado em relação ao método de *phase shift* original e ao método que será discutido a seguir.

2.2 Migração utilizando o método *Split Step*

O método de migração *Split Step* (Stoffa et al., 1990) é implementado de forma mais simples do que o método *PSPI*, descrito anteriormente. No método *PSPI* primeiro é realizado um deslocamento temporal para em seguida extrapolar o campo de onda utilizando várias velocidades de referência. No entanto, no método *Split Step*, o campo é extrapolado com uma única velocidade de referência no domínio $k_x - \omega$, com a variação lateral de velocidade sendo levada em conta por uma correção no domínio $x - \omega$.

O método *Split Step* é baseado na teoria das perturbações. Utilizando essa teoria escreve-se a função velocidade da seguinte forma:

$$v(x, z) = v_{ref}(z) + \delta v(x, z) \quad (2.5)$$

A velocidade de referência $v_{ref}(z)$ é utilizada para extrapolar o campo de onda no domínio do número de onda e frequência, que é dada pela seguinte expressão:

$$P^*(k_x, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, z, \omega) e^{\pm i \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_{ref}(z)}\right)^2 - k_x^2} \Delta z} \quad (2.6)$$

O campo P^* é transformado para o domínio do espaço frequência mediante uma transformada inversa de Fourier. Em seguida, esse campo é então corrigido dos efeitos da variação lateral de velocidade.

$$P(x, z + \Delta z, \omega) = P^* e^{\pm i \omega \left[\frac{1}{v(x,z)} - \frac{1}{v_{ref}(z)} \right] \Delta z} \quad (2.7)$$

O método *Split Step* contempla variações laterais suaves de velocidade. O método é incondicionalmente estável, permite selecionar a faixa de frequência a ser migrada, apresenta um custo computacional reduzido quando comparado ao método *PSPI*. Uma desvantagem desse método é que o mesmo é baseado na equação da onda unidirecional, que leva a uma dificuldade do método em migrar eventos com mergulhos muito altos.

2.3 Migração no domínio $\omega - x$

A migração no domínio $\omega - x$ utilizando operadores convolucionais explícitos é uma alternativa para situações em que ocorrem contrastes consideráveis de velocidade na horizontal e estruturas com mergulhos não muito íngremes, uma vez que o método se baseia na utilização da equação unidirecional da onda para a construção dos seus operadores de extrapolação. O princípio do método consiste em obter o operador de deslocamento de fase (*phase shift*, equação (2.8)), normalmente construído no domínio $\omega - k_x$ e válido apenas para meios com velocidade variando na vertical (direção z). O operador de deslocamento de fase é definido por:

$$D(k_x, \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z}, \quad (2.8)$$

com $\Delta z = z_m - z_{m-1}$ e k_z definido da seguinte forma:

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2} & k^2 > k_x^2 \\ -i\sqrt{k^2 - k_x^2} & k^2 < k_x^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $k = \omega c^{-1}$, ω é a frequência angular e c a velocidade do meio. O operador $D(k_x, k_y, \Delta z, \omega)$ atua extrapolando campos de onda na direção de z decrescente. O termo que representa o campo de onda quando $k^2 < k_x^2$ é conhecido como campo evanescente, com base na física do problema sabe-se que esse campo decai exponencialmente. A atenuação dessa parte do campo de ondas é imperativo, pois num processo recursivo a não atenuação do mesmo levaria a uma grande amplificação dos ruídos presentes nos dados.

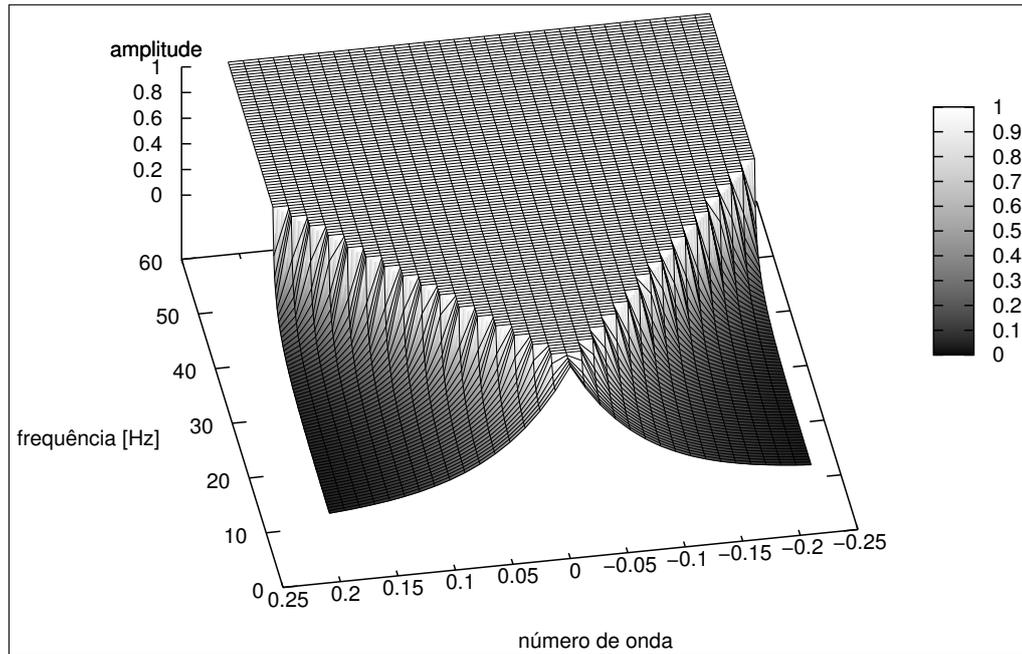


Figura 2.1: Amplitude do operador de extrapolação (*phase shift*) em função da frequência e número de onda. Parâmetros do operador: $\Delta x = \Delta z = 15$ m, $c = 1000$ m e faixa de frequência de 0 a 60 Hz.

Como já é conhecido, esse operador é obtido no domínio do número de onda e frequência ($k_x - \omega$). Portanto, o mesmo não é capaz de lidar diretamente com variações laterais de velocidade do meio. No entanto, utilizando os modelos de operadores desenvolvidos no capítulo anterior é possível obter uma família de operadores no domínio do espaço e frequência ($\omega - x$) a partir do operador (2.8). Esses operadores são aplicados no dado de forma variável de acordo com a frequência de extrapolação e velocidade local. Assim, é possível tratar das variações laterais de velocidade.

O operador (2.8) pode ser levado para o domínio do espaço e frequência, utilizando uma transformada inversa de Fourier dupla ou ser derivado diretamente nesse domínio utilizando o operador de Rayleigh II (Berkhout, 1982; Blacquièrre, 1989). Uma outra maneira exata de se obter tal operador é expandir o operador analítico de *phase shift*, tendo como bases funções de Chebychev e, então, realizar a transformação de Fourier inversa da expansão em séries. Para se obter o operador no domínio do espaço e frequência também é possível utilizar essa técnica, tanto na obtenção de operadores em 2D quanto em 3D (Maeland, 1994; Maeland, 1993). A formulação analítica desses operadores no domínio do espaço depende da

dimensionalidade do problema, ou seja:

$$\tilde{D}(x, y, \Delta z, \omega) = \frac{1 + ikr}{2\pi r^2} \cos \phi e^{-ikr} = \Delta z \frac{1 + ikr}{2\pi r^3} e^{-ikr} \quad (2.10a)$$

$$\tilde{D}(x, \Delta z, \omega) = -\frac{iH_1^{(2)}(kr)}{2} \cos \phi = -\Delta z \frac{iH_1^{(2)}(kr)}{2r} \quad (2.10b)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + \Delta z^2}$ ou $r = \sqrt{x^2 + \Delta z^2}$, para o caso 2D. $H_1^{(2)}(kr) = J_1(kr) - iY_1(kr)$ é uma função de Hankel de primeira ordem e segundo tipo e J_1 é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem um e Y_1 é a função de Bessel do segundo tipo e ordem um (Arfken et al., 2000).

Os operadores analíticos (2.10a) e (2.10b) são funções contínuas e analíticas que não decaem a zero num intervalo finito. Portanto, inevitavelmente, processos de truncamento desses operadores acarretarão em erros. Uma maneira de averiguar esses erros é truncar o operador analítico e levar esse resultado para o domínio do número de onda, onde é possível verificar a exatidão do truncamento comparando com a forma analítica do operador nesse domínio. Na Figura 2.2 temos os operadores obtidos após o truncamento do operador analítico (2.10b).

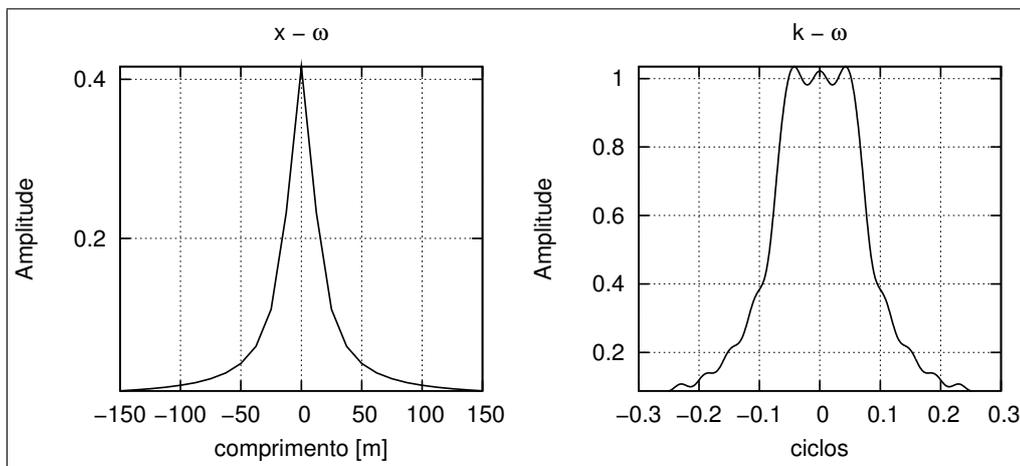


Figura 2.2: Operador no domínio $\omega - x$ e seu espectro de amplitude no domínio $\omega - k$.

O operador obtido na Figura 2.2 não se presta para fins de migração devido as ondulações dentro da faixa onde o campo deve ser propagado. Essas oscilações num processo recursivo de migração levariam a números muito grandes de forma que esse operador tornaria-se instável.

O operador exibido na Figura 2.2 e nas demais explicações sobre os algoritmos de otimização dos mesmos foram desenhados com os seguintes parâmetros:

Parâmetro:	ω	Δx	Δz	v	# pontos
Valor:	20 Hz	12.5 m	12.5 m	1250 m/s	25

Tabela 2.1: Parâmetros do operador de extrapolação. Esses parâmetros foram utilizados na construção de todos os operadores exibidos neste capítulo.

2.3.1 Algoritmo de migração $\omega - x$

A migração no domínio do espaço e frequência utilizando operadores convolucionais é realizada extrapolando os campos de onda (ascendentes e descendentes, para o caso da migração pré-empilhamento). Esses são obtidos transformando a solução analítica da equação da onda unidirecional, que é obtida no domínio $(\omega - k_x)$, para o domínio $\omega - x$. Esses operadores dependem da frequência de propagação ω e da velocidade do meio c .

A extrapolação é realizada convolvendo-se o operador com uma fatia do dado (z constante) para uma dada frequência (domínio do espaço e frequência). No caso em que a velocidade não apresenta variação lateral, temos um único operador para toda a fatia. Porém, com a existência de variação lateral da velocidade, o operador é alterado para cada velocidade encontrada. Desta forma, repete-se o procedimento anterior de extrapolação para cada frequência de interesse (Figura 2.3).

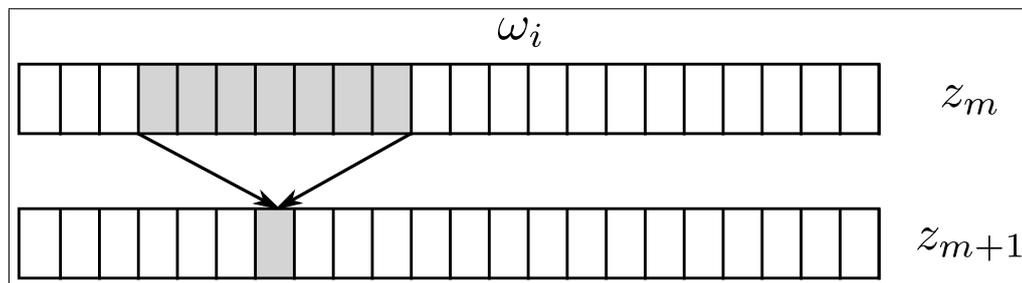


Figura 2.3: Extrapolação do campo de onda do nível z_m para o nível z_{m+1} para uma frequência de interesse ω_i .

Por uma questão de praticidade e performance é comumente realizada a criação de uma tabela de operadores. Essa tabela terá seus componentes identificados pelo número de onda local, $k = \omega c^{-1}$. O primeiro elemento dessa tabela corresponderá ao menor valor de número de onda, $k_{min} = \omega_{min} c_{max}^{-1}$, já os demais elementos da tabela serão calculados com um incremento $\Delta k \approx \Delta \omega [2c_{max}]^{-1}$, até atingir $k_{max} = \omega_{max} c_{min}^{-1}$. Caso o valor de k local não esteja precisamente na tabela é realizado um procedimento de interpolação linear para as partes reais e imaginárias do operador (Blacquière, 1989; Blacquière et al., 1989).

Um ponto importante no estudo de migrações como as descritas acima está na escolha do ângulo de propagação máximo (α_{max}), uma vez que para evitar o fenômeno de *aliasing* não pode haver campos de onda se propagando com $|k_x| > k_{x,nyq}$, onde $k_{x,nyq}$ é o número de

onda de Nyquist (Berkhout, 1982), sendo esse definido por:

$$k_{x,nyq} = \frac{\pi}{\Delta x} \quad (2.11)$$

A limitação do ângulo de Nyquist está relacionada com a amostragem do dado, uma consideração prática. Do ponto de vista teórico, os operadores baseados nesse método são obtidos da equação unidirecional da onda que só consegue migrar corretamente refletores com mergulho máximo de 90° , de forma que $0 \leq \alpha_{max} \leq 90^\circ$. No entanto, α_{max} será comumente escolhido com valores inferiores a 90° , pois dessa forma é possível desenhar operadores de forma mais eficiente além de permitir a atenuação de componentes evanescentes do campo de onda.

2.3.2 Desenho de operadores suavizados

O operador analítico de *phase shift* quando truncado apresenta artefatos que o torna inviável de ser utilizado, uma vez que esse requer um grande comprimento para se manter estáveis e, portanto, aumentando o seu custo computacional. Como mostrado em Blacquièrre (1989), grandes derivadas da amplitude e da fase no domínio do número de onda e frequência correspondem a operadores extensos no domínio do espaço e frequência.

O operador *phase shift*, no interior da zona onde o campo de onda é propagante, possui uma amplitude constante como mostrado na Figura 2.1. Porém, esse operador na região em que surge o campo evanescente (ou seja, quando $[k_X] > [\omega c^{-1}]^2$, além do que no ponto $[\omega c^{-1}]^2 = k_x^2$ ocorre uma descontinuidade) varia de forma exponencial, originando grandes derivadas que por sua vez levam a operadores extensos no domínio do espaço e frequência.

Assim, o uso de operadores suavizados nada mais é que uma forma de reduzir a amplitude das derivadas do operador analítico de maneira a se obter um operador estável mais curto no domínio $\omega - x$. É possível realizar tal modificação no operador analítico alterando justamente a região evanescente do operador, região que está relacionada com as grandes amplitudes da derivada e que durante o processo de extrapolação é atenuada.

Dessa forma podemos definir o seguinte operador suavizado:

$$D_s(k_x, z, k) = \begin{cases} D_s = e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2}z} & \text{para } k_x \leq k \sin \alpha_{max} \\ D_s = A(k_x, k)e^{i\phi(k_x, z, k)} & \text{para } k_x \geq k \sin \alpha_{max} \end{cases} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) nos mostra que o operador suavizado para a zona propagante aproxima a amplitude e a fase do operador analítico. Já para a zona evanescente é utilizada a função $A(k_x, k)e^{i\phi(k_x, z, k)}$, onde $A(k_x, k)$ é uma janela de amplitude, uma espécie de *taper*, que garante a atenuação. A função $\phi(k_x, z, k)$ é uma função que no ponto de descontinuidade $k = k_x$ apresenta o valor da função e de sua primeira derivada iguais aos respectivos valores do

operador analítico de *phase shift*. Essa pode ser um polinômio com os coeficientes ajustados de forma a cumprir os requisitos anteriores.

Na Figura 2.4 temos um gráfico de um operador desenhado utilizando os princípios expostos acima. As funções ϕ e A utilizadas são da forma de uma spline cúbica.

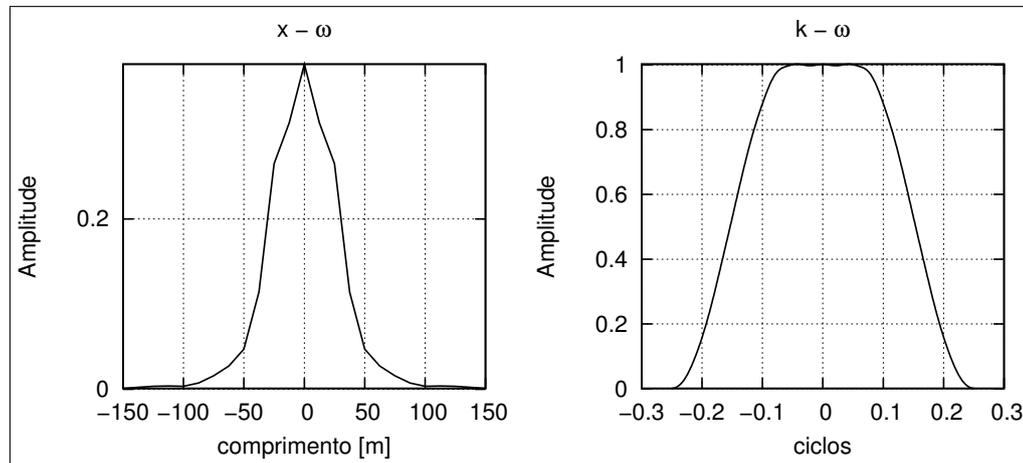


Figura 2.4: Operador no domínio $\omega - x$ e espectro de amplitude do mesmo no domínio $\omega - k$.

2.3.3 Desenho de extrapoladores utilizando janelamento

Uma técnica bastante comum na criação de filtros digitais FIR (*Finite Impulse Response*) é a utilização de janelas, que são funções definidas no interior de um certo intervalo e nula nos demais pontos. As mesmas são utilizadas a fim de se obter uma melhor resposta para o filtro no domínio desejado em comparação com um simples truncamento de um filtro IIR (*Infinite Impulse Response*) (Oppenheim e Schaffer, 1975).

No problema de extrapolação de campos de onda o filtro IIR é representado pelos resultados analíticos para o operador de extrapolação no domínio do espaço e frequência. Como visto anteriormente, o truncamento do operador analítico leva a resultados que são inaceitáveis do ponto de vista da construção de extrapoladores uma vez que os mesmos têm que ser muito longos para se manterem estáveis.

Existem diversas funções janelas, sendo as mais conhecidas denominadas janelas de *Hanning*, *Hanning*, *Kaiser* e *Gauss*. A janela de Gauss, que utiliza uma função gaussiana, tem a propriedade interessante de ser incondicionalmente estável, devido ao fato da transformada de Fourier de uma gaussiana ser outra gaussiana, como mostrado em Nautiyal, Gray, Whitmore e Garing (1993).

Abaixo são definidas a função gaussiana e a função de Kaiser utilizadas no desenho de operadores de extrapolação:

Nome	Fórmula
Gauss	$w_g(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$
Kaiser	$w_k(n) = \frac{I_0\left[\omega_0\sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2}\right]}{I_0\left[\omega_0\left(\frac{N-1}{2}\right)\right]}$

Tabela 2.2: Fórmula que definem as funções janelas de Kaiser e Gauss.

Nota-se que a função gaussiana também é de duração infinita, sendo usualmente truncada ou janelada por outra função. Como seu decaimento é rápido, ela usualmente pode ser truncada sem grandes problemas. Já para a função de Kaiser, definida assim em Oppenheim e Schafer (1975), temos que $I_0[\cdot]$ corresponde à função de Bessel modificada de ordem 0, N define o comprimento da janela e ω_0 um parâmetro que controla a forma da janela. Um valor grande de ω_0 significa um aumento da largura do lóbulo principal e um maior decréscimo dos lóbulos secundários.

A Figura 2.5 exhibe os operadores de extrapolação e seus respectivos espectros de amplitude nos domínios $\omega - x$ e $k - x$.

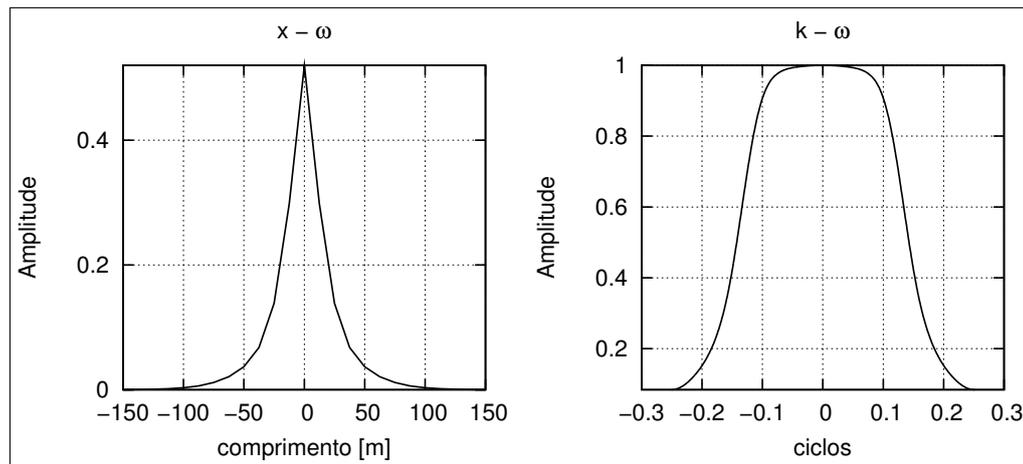


Figura 2.5: Espectros de amplitude, domínios $\omega - x$ e $k - x$, do operador de extrapolação $D(k_x)$, obtido utilizando uma janela gaussiana.

Nota-se, Figura 2.5, que a utilização da janela gaussiana leva a uma diminuição na amplitude para os maiores números de onda, conseqüentemente durante o processo recursivo de extrapolação a uma eliminação ou atenuação dos mesmos.

Já ao se utilizar a janela de Kaiser, Figura 2.6, existe uma melhor preservação das amplitudes para grandes mergulhos. Porém no topo do operador surgem ondulações (*ripples*) e caso suas amplitudes sejam ligeiramente maiores que 1 podem ocorrer também problemas de estabilidade.

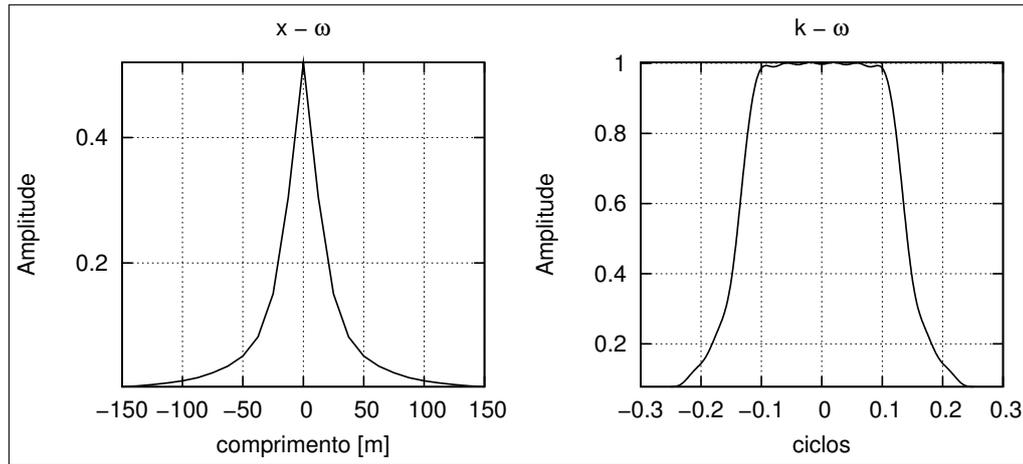


Figura 2.6: Espectros de amplitude, domínios $\omega - x$ e $k - x$, do operador de extração $D(k_x)$, obtido utilizando uma janela de Kaiser, o parâmetro ω_a utilizado foi igual a 3.

2.3.4 Desenho de extrapolações utilizando o algoritmo de Remez (método de Parks-McClellan)

Ao contrário das técnicas descritas, até então, o método de Parks-McClellan permite especificar um ângulo máximo para qual os eventos do dado serão migrados. De fato, o método funciona especificando-se M , o número de coeficientes do filtro, K a razão entre os erros δ_1 e δ_2 , k_p e k_s , a banda de passagem e de parada, respectivamente. A terminologia é indicada na Figura 2.7.

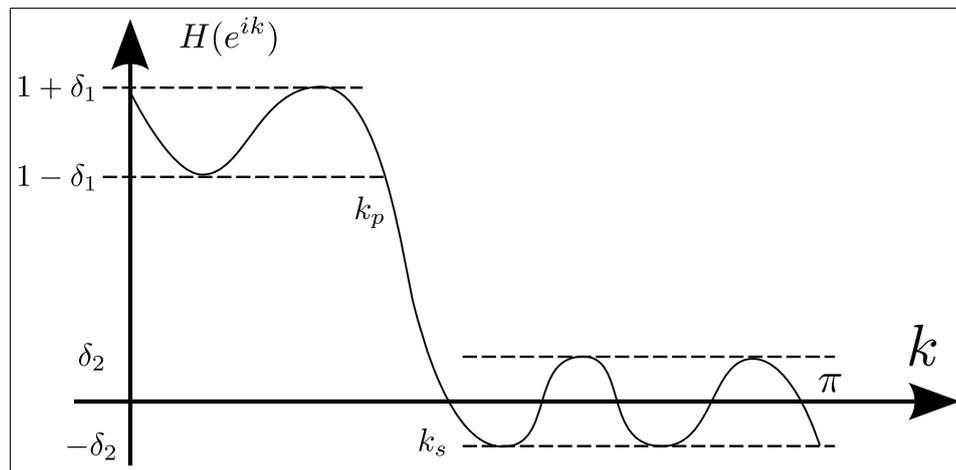


Figura 2.7: Especificações fornecidas ao algoritmo de Parks-McClellan para a criação de um filtro passa baixa (*Low Pass*).

Esse algoritmo se baseia na teoria da aproximação de Chebyshev em conjuntos disjuntos, na qual o que é minimizado é o erro máximo, onde a norma utilizada no processo de otimização é L_∞ . Formalmente, devemos minimizar a seguinte função erro:

$$E(\omega) = W(k) [\tilde{D}(e^{ik}) - D(e^{ik})] \quad (2.13)$$

onde \tilde{D} é a resposta impulsiva do operador do filtro desejado e D a aproximação a essa resposta impulsiva. Para que seja possível utilizar esse algoritmo, o filtro D deve ser de fase linear, no problema em questão de fase nula (simétrico), ou seja, $h(n) = h(-n)$. A resposta impulsiva de D é da seguinte forma:

$$D(e^{ik}) = \sum_{n=-M}^M h(n)e^{-ikn} \quad (2.14)$$

Utilizando a condição de simetria, temos:

$$\begin{aligned} D(e^{ik}) &= \sum_{n=-M}^M h(n)e^{-ikn} \\ D(e^{ik}) &= \sum_{n=-M}^M h(n) [\cos(kn) + i \sin(kn)] \\ D(e^{ik}) &= h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(kn) \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde foi utilizado o fato da função seno ser ímpar e o da função cosseno ser par. A função peso pode assumir diversas formas, uma usual é:

$$W(k_x) = \begin{cases} \frac{1}{K} & 0 < k < k_p \\ 1 & k_p < k < \pi \end{cases} \quad (2.16)$$

Essa função peso pode ser utilizada no caso de se desejar implementar um filtro passa-baixa (*Low Pass*). Importante notar que o problema da determinação de extrapoladores se enquadra nessa categoria de filtro, porém no caso estamos tratando de um filtro passa-baixa espacial, uma vez que queremos extrapolar até um número de onda máximo. O parâmetro K é a razão entre δ_1 e δ_2 , que são os erros máximos na zona de passagem ($0 < k < k_p$), e na zona de parada ($k_s < k < \pi$) (Oppenheim e Schaffer, 1975).

Assim, estamos procurando o mínimo da seguinte função:

$$\max_{\substack{0 < k < k_p \\ k_s < k < \pi}} |E(k_x)| \quad (2.17)$$

A importância da especificação dos intervalos está no fato de que o teorema original, que irá garantir a condição de existência para a aproximação, é originalmente válido para o caso de funções contínuas num intervalo $[a, b]$, porém, no caso de um filtro passa-baixa, a função

no intervalo $[0, \pi]$ é descontínua ($\tilde{D} = \{k \in [0, k_p], \tilde{D} = 1, \text{ para } k \in [k_s, \pi], \tilde{D} = 0\}$). A mesma é contínua nos intervalos disjuntos, $[0, k_p]$ e $[k_s, \pi]$, de forma que a função $\{D \in k, k = [0, k_p] \cup [k_s, \pi]\}$ é contínua (McClellan e Parks, 2005). A versão modificada desse teorema é conhecido como Teorema da Alternação.

Teorema da Alternação: Seja F qualquer subconjunto do intervalo fechado $0 < k < \pi$, para que a equação (2.14) seja a melhor aproximação de \tilde{D} em F é necessário e suficiente que $E(k)$ tenha pelo menos $M + 2$ alternações, ou seja, $E(k_{i+1}) = -E(k_i) = \max |E(k)| = \delta$, com $k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{M+1}$ e que k_i esteja contido em F (Oppenheim e Schaffer, 1975).

Esse teorema assegura a existência da aproximação, além de fornecer uma indicação para um algoritmo iterativo para a obtenção da mesma.

O algoritmo em questão é denominado algoritmo de troca de Remez (*Remez exchange algorithm*). Logo ficará claro o motivo do nome do mesmo e o seu carácter iterativo. Partindo das equações (2.13) (2.14), (2.16) e (2.17) (Oppenheim e Schaffer, 1975; Rabiner et al., 1975), chega-se na seguinte equação:

$$W(e^{ik_j}) \left(\tilde{D}(e^{ik_j}) - D(e^{ik_j}) \right) = (-1)^k \delta \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (2.18)$$

Os pontos do conjunto k_j , com $j = 0, 1, \dots, M$ são inicialmente estimados de forma aleatória. Resolve-se o sistema de equações definido por (2.18) para o valor de δ e cria-se um polinômio interpolador passando por todos os pontos k_j . Com esse polinômio busca-se os novos extremos da função erro, esses novos extremos são utilizados na fórmula (2.18) de forma iterativa. O algoritmo procede iterativamente até que $|E(k)| \leq \delta$, que corresponde as condição do teorema da Alternação. O fluxograma da Figura 2.8 ilustra o algoritmo.

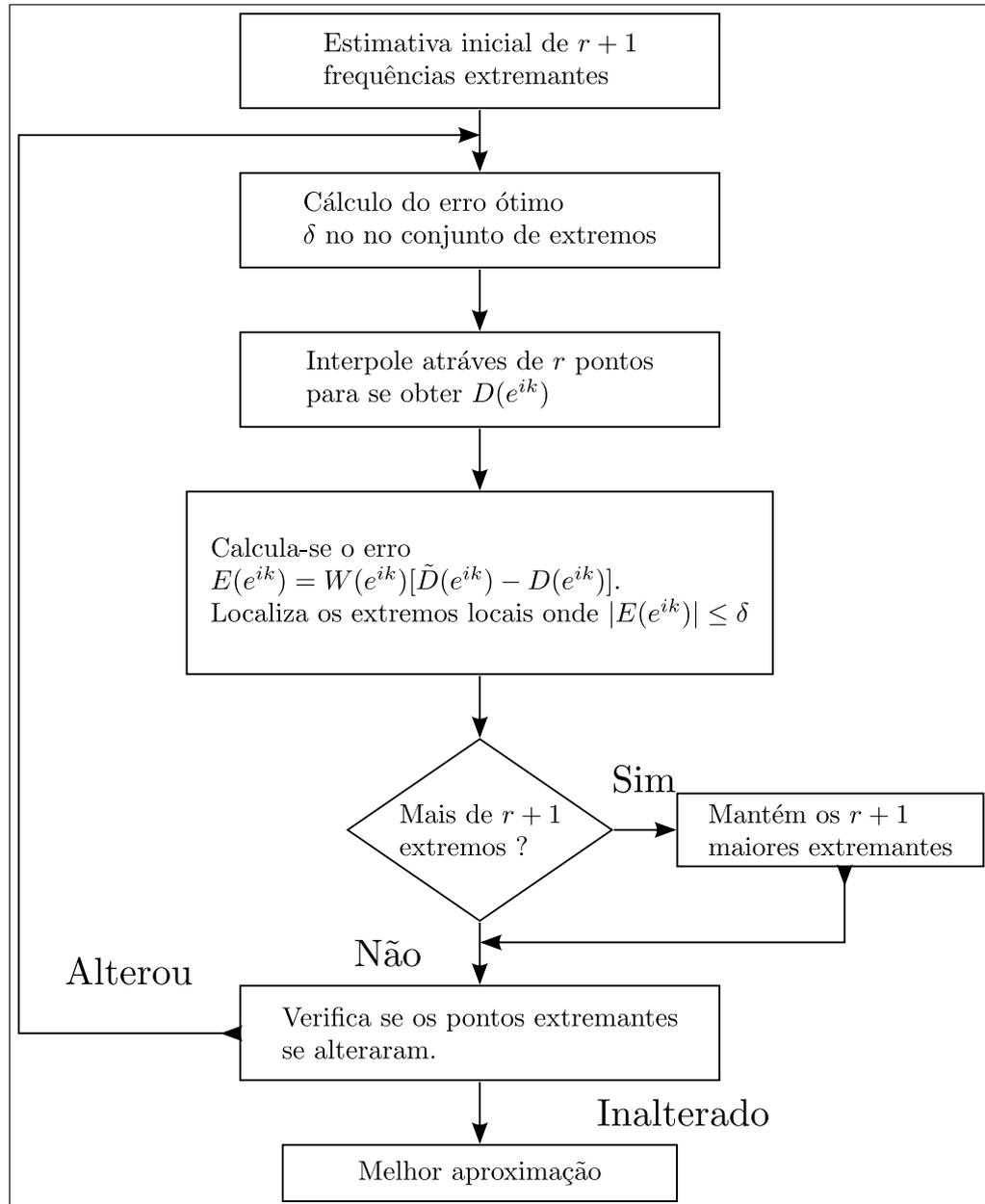


Figura 2.8: Fluxograma para o algoritmo de Remez, adaptado de (Rabiner, McClellan e Parks, 1975).

A Figura 2.9 mostra um exemplo de filtro extrapolador obtido por esse método, onde se pode notar o caráter *equiripple* (ondulações de mesma amplitude) do filtro.

2.3.5 Desenho de extrapoladores utilizando mínimos quadrados ponderados

Desejamos obter um operador no domínio $\omega - x$ que tenha um espectro que se aproxime do operador exato *phase shift*, sendo esse obtido no domínio $\omega - k$. Uma das formas de ser obter tal operador, é simplesmente realizar uma transformada de Fourier inversa do operador exato, com um posterior truncamento. Porém esse método não é ótimo, uma vez

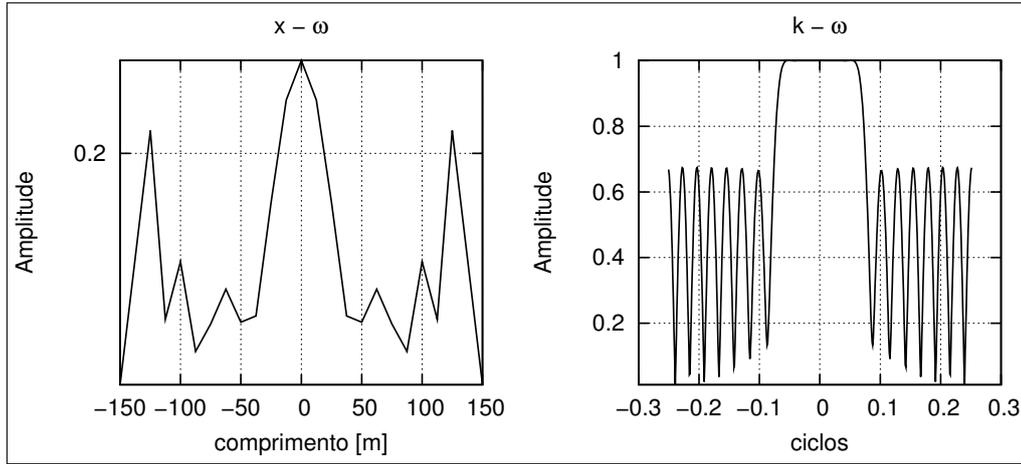


Figura 2.9: Filtro extrapolador, obtido utilizando o algoritmo de Remez

que os operadores assim obtidos só serão estáveis se forem muito longos. O método WLSQ (*Weighted Least Squares*) (Thorbecke, 1997; Thorbecke et al., 2004), é então utilizado para obter tal operador.

O método *WLSQ* de otimização faz uso de uma função peso para otimizar a transformação do domínio $k - \omega$ para o domínio $x - \omega$. Formalmente podemos escrever a transformada de Fourier para uma função banda-limitada da seguinte forma:

$$\tilde{D}(k_x, z, \omega) = \int_{x_1}^{x_2} D(x, z, \omega) e^{ik_x x} dx \quad \text{para } k_{x_1} \leq k_x \leq k_{x_2} \quad (2.19)$$

Uma vez que estamos interessados em operadores simétricos, temos que $x_1 = -x_2$ e $k_{x_1} = -k_{x_2}$, a equação (2.19) admite a seguinte representação discreta:

$$\tilde{D}(n\Delta k_x, z, \omega) = \sum_{m=-M}^M D(m\Delta x, z, \omega) e^{in\Delta k_x m\Delta x} \quad \text{para } -N \leq n \leq N \quad (2.20)$$

Essa expressão pode ser escrita explicitamente na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}(-N\Delta k_x, z, \omega) \\ \vdots \\ \tilde{D}(0, z, \omega) \\ \vdots \\ \tilde{D}(N\Delta k_x, z, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{iN\Delta k_x M\Delta x} & \dots & 1 & \dots & e^{-iN\Delta k_x M\Delta x} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-iN\Delta k_x M\Delta x} & \dots & 1 & \dots & e^{iN\Delta k_x M\Delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(-M\Delta k_x, z, \omega) \\ \vdots \\ D(0, z, \omega) \\ \vdots \\ D(M\Delta k_x, z, \omega) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Da expressão anterior, temos que $m = -M, \dots, M$, onde M representa o tamanho do operador no domínio $\omega - x$ e $n = -N, \dots, N$, onde N representa o tamanho da transformada de Fourier. A amostragem no domínio do número de onda é dado por:

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{(2N+1)\Delta x} \quad (2.22)$$

Utilizando a notação matricial temos:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{D} \quad (2.23)$$

Como estamos resolvendo um problema de mínimos quadrados (problema sobredeterminado), temos que garantir que a matriz $\mathbf{\Gamma}$ de ordem $(2N+1) \times (2M+1)$ tenha mais linhas que colunas, ou seja, $(2N+1) > (2M+1)$. Devido à simetria do operador, existem de fato apenas $M+1$ coeficientes a serem determinados.

A equação (2.21) representa a transformada discreta de Fourier e para que essa seja otimizada utilizaremos uma função objetivo generalizada (Menke, 1989) que admite pesos, que têm a seguinte forma:

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{D}$ é a solução mínimos quadrados desse problema, que consiste em minimizar a função E , e quando escrita explicitamente tem a seguinte forma:

$$E = \tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{D}} - 2\tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \quad (2.25)$$

Derivando a expressão em relação a \mathbf{D} e igualando a zero tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{D}} &= 2\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} - 2\tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} = 0 \\ \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} &= \tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.26)$$

que por sua vez, resulta na seguinte solução para o problema de mínimos quadrados

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W} \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{D}} \quad (2.27)$$

Como mostrado em (2.21), a matrix $\mathbf{\Gamma}$ tem os seus componentes determinados por $\Gamma_{nm} = e^{in\Delta k_x m \Delta x}$, já a função peso é determinada da seguinte forma $\mathbf{W}_{nm} = w(n\Delta k_x) \delta_{nm}$, com δ_{nm} o delta de kronecker, ou seja, \mathbf{W} é uma matriz diagonal. Os pesos são escolhidos de forma a se ter valores altos para os componentes de onda que serão propagados e pesos menores para os componentes evanescentes do campo. Nota-se que se a matriz $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ não estará ocorrendo nenhum tipo de otimização, apenas o truncamento é realizado.

De acordo com o ângulo de propagação máximo desejado (α_{max}) a matriz \mathbf{W} pode ser determinada. Para isso, nota-se que essa matriz multiplica a matriz da transformada de Fourier espacial, como mostra a equação (2.24). Sabemos que a matriz da transformada de Fourier apresenta os componentes de frequência distribuídos de forma que a primeira linha da mesma tenha o valor de $-K_{x,nyq}$, a última linha com componentes com número de onda $K_{x,nyq}$ e os componentes do campo com número de onda (k_x) nulos estão no centro da mesma, como discutido na seção 2.3.1. Os componentes do campo de onda com números de onda $k \sin \alpha_{max} < k_x \leq k_{x,nyq}$ não são de interesse. De forma que a otimização é feita atribuindo um peso baixo para essa região de números de onda e um peso alto para o campo com número de ondas entre $0 \leq k_x \leq k \sin \alpha_{max}$. Empiricamente chega-se aos valores dos pesos iguais a 1 para a faixa do campo que será propagado e de 10^{-5} para valores que não serão propagados.

Além do operador analítico (*phase shift*), o método *WLSQ* admite outros operadores para serem otimizados como os operadores de fase suavizados, descritos na seção 2.3.2. As Figura 2.10 e 2.11 ilustram o desenho de operadores utilizando o método descrito para o caso em que a otimização é realizada utilizando o operador de *phase shift* e operador suavizado respectivamente.

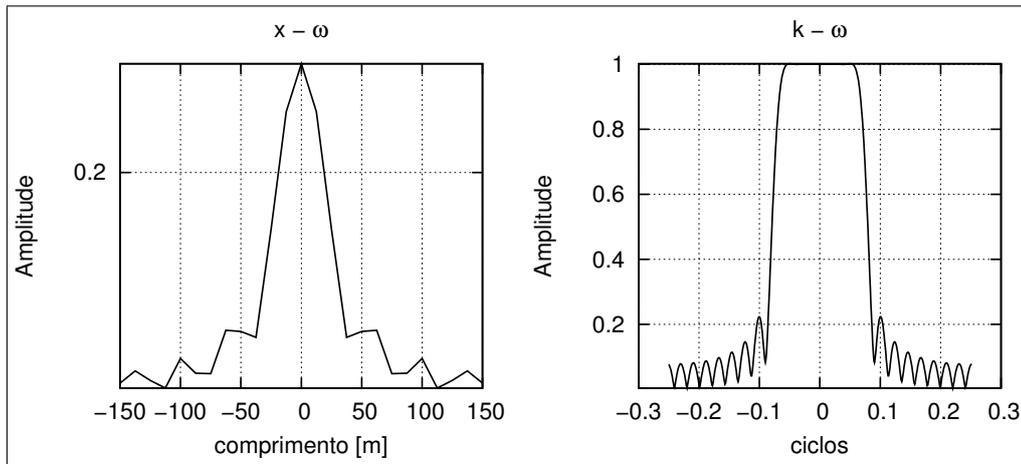


Figura 2.10: Filtro obtido utilizando o método *WLSQ* tendo como base o operador analítico de *phase shift*.

As ondulações (*ripples*) presentes na zona evanescente do operador são típicas de filtros desenhados com o método dos mínimos quadrados, os quais não interferem no processo de propagação, pois esses componentes são atenuados durante a migração. O operador suavizado apresenta ondulações bem menores, devido à sua suavidade, que de acordo com a seção 2.3.2, está relacionada com as derivadas do mesmo.

Uma vantagem do método *WLSQ* é a sua versatilidade, podendo ser estendido para o caso 3D (Thorbecke et al., 2004), casos com anisotropia TI (transversalmente Isotrópico) (Zhang e Wapenaar, 2001) e em situações de anelasticidade e perdas (Zhang e Wapenaar,

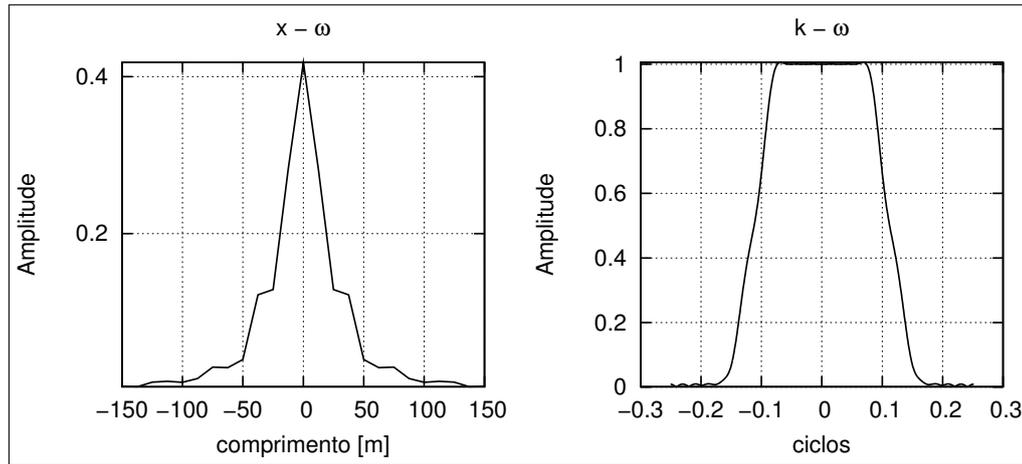


Figura 2.11: Filtro obtido utilizando o método *WLSQ* tendo como base o operador analítico suavizado.

2002).

2.3.6 O extrapolador de Hale

Hale (1991) propôs uma modificação do método de desenho de filtros utilizando expansão em séries de Taylor. No método tradicional, tanto a resposta desejada (no caso $\tilde{D}(k_x)$) quanto a resposta do filtro, é expandida em séries de Taylor em torno de um ponto conveniente e prossegue-se ajustando as derivadas da resposta impulsiva do filtro às derivadas da resposta desejada.

Porém na geração de filtros para a extrapolação de campo de ondas o método tradicional se mostra ineficaz, uma vez que o mesmo produz filtros instáveis. A modificação proposta por Hale (1991), consiste em ajustar as M primeiras derivadas da resposta impulsiva do operador em construção, ao invés das $N + 1$ primeiras derivadas para um operador simétrico de $2N + 1$ coeficientes, que seria o procedimento realizado no método tradicional. Sendo que $M < N$, as $N + 1 - M$ derivadas restantes são zeradas de forma a se obter um operador estável. O número M não é conhecido, sendo, portanto, obtido através de tentativa e erro.

Assim o problema a ser resolvido é obter uma aproximação do operador definido pela equação (2.8). A resposta impulsiva do operador $D(k_x)$ é definida por:

$$D(k_x) = \sum_{n=-N}^N h_n e^{-nk_x} \quad (2.28)$$

Devido à simetria do filtro, temos que a equação (2.14) é válida e podemos expressar $D(k_x)$ da seguinte forma:

$$D(k_x) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^N h_n \cos(nk_x) \quad (2.29)$$

Verifica-se que o filtro tem $2N + 1$ coeficientes, porém apenas $N + 1$ desses são independentes, sendo h_n representado em termos das seguintes funções bases:

$$h_n = c_0 + \sum_{m=1}^M c_m b_{nm} \quad \text{com} \quad b_{nm} = \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \quad (2.30)$$

Essas funções bases são escolhidas de forma a representar diferentes valores de número de onda. Assim, ao se zerar algumas dessas funções bases implica na restrição os valores do campo de onda que serão extrapolados. Substituindo a equação (2.30) na equação (2.29) obtemos:

$$D(k_x) = c_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nk_x \right] + 2 \sum_{m=1}^M c_m \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \cos nk_x \right] \quad (2.31)$$

Com isso podemos escrever a equação (2.31) da seguinte forma:

$$D(k_x) = \sum_{m=1}^M c_m B_m(k_x) \quad (2.32)$$

onde,

$$B_0(k_x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nk_x \quad \text{e} \quad B_m(k_x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \cos nk_x \quad (2.33)$$

Agora, expressamos a resposta impulsiva do operador em uma forma conveniente para ser comparada com a expansão em séries de Taylor em torno da origem da resposta desejada, $\tilde{D}(k_x)$, ou seja:.

$$\tilde{D}(k_x) = \tilde{D}(0) + k_x \left. \frac{\partial \tilde{D}}{\partial k_x} \right|_{k_x=0} + \frac{k_x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial k_x^2} \right|_{k_x=0} + \dots \quad (2.34)$$

Uma vez que o operador é simétrico, deve-se ajustar apenas as M derivadas pares, já que as derivadas ímpares são nulas para $k_x = 0$. O ajuste é então realizado igualando as derivadas da equação (2.32) com as derivadas da equação (2.34). Desta forma, obtemos então:

$$\sum_{m=1}^M c_m B_m^{2j}(k_x) = \sum_{m=1}^M c_m \frac{\partial^{2j} B_m}{\partial B_m^{2j}}(k_x) = D^{2j} \Big|_{k_x=0} = \frac{\partial^{2j} \tilde{D}}{\partial k_x^{2j}} \Big|_{k_x=0} \quad (2.35)$$

Resultando no seguinte sistema linear de equações

$$\sum_{m=0}^M c_m B_m(0) = \tilde{D}^{2j}(0) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.36)$$

Os valores de c_m obtidos podem ser empregados para se encontrar os coeficientes do filtro $D(k)$ utilizando a equação (2.30).

CAPÍTULO 3

Resultados

3.1 Introdução

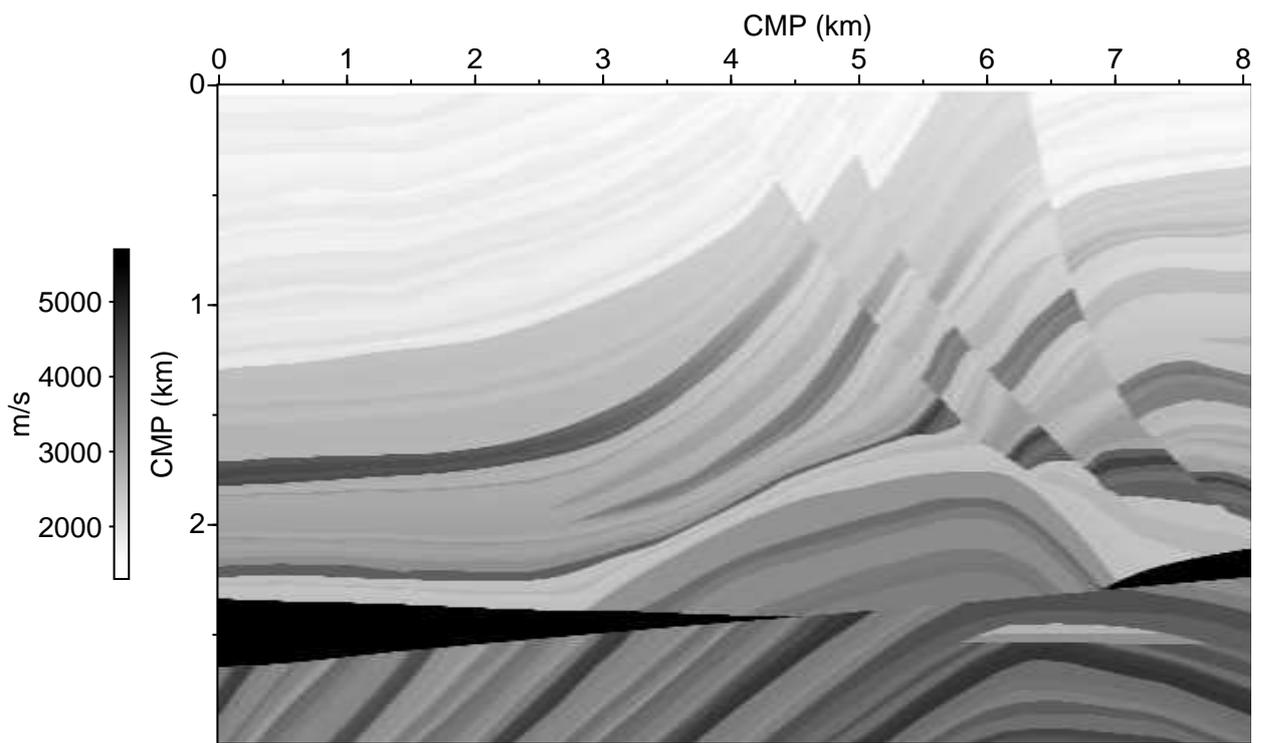
Neste capítulo mostraremos os resultados obtidos utilizando os operadores de extrapolação apresentados no capítulo anterior. No caso da migração no domínio $\omega - x$, também foi feita uma breve análise relativa ao tamanho do operador de extrapolação e influência de eventos com grandes mergulhos na qualidade do resultado. O objetivo deste capítulo é mostrar a aplicabilidade dos operadores estudados anteriormente aplicando-os a dados sintéticos. Os resultados foram obtidos utilizando modificações de programas já existentes. As modificações foram diversas, porém suficientes para fazer com que os programas funcionassem no âmbito do CPGG/UFBA¹. Os programas foram implementados em paralelo e aplicados em dados pré-empilhamento.

Os programas utilizados de certa forma tiveram como origem os seguintes trabalhos: migração no domínio $\omega - x$ (Thorbecke, 1997), extrapolador de Hale (Hale, 1991) e migrações *PSPI* e *Split Step* (Baoniu, 2001). Iniciaremos mostrando os resultados obtidos para os extrapoladores clássicos *PSPI* e *Split Step*.

Os campos de velocidade dos modelos sintéticos serão apresentados a seguir. O modelo Marmousi, Figura 3.1, foi criado em 1988 pelo IFP (Institut Français du P'etrole), a geometria do perfil é inspirada num perfil existente na passagem de Quenguela ao norte da Bacia de Quanza.

O modelo Sigsbee2A, Figura 3.2, foi lançado pelo consórcio SMAART JV (Subsalt Multiples Attenuation and Reduction Technology Joint Venture) em 2001. O modelo é baseado num escarpamento existente no Golfo do Mexico e apresenta um grande domo salino de geometria complexa, com rugosidades e reentrâncias que causa problemas de iluminação dos refletores sob o corpo de sal. O modelo Sigsbee2A em questão foi modelado de forma a se ter poucas múltiplas.

¹Os programas foram executados utilizando o *cluster* Aguia, sendo que este quando foi utilizado estava com 96 núcleos de processamento distribuídos em 12 nós



Campo de velocidade do modelo Marmousi

Figura 3.1: Campo de velocidade para o modelo Marmousi.

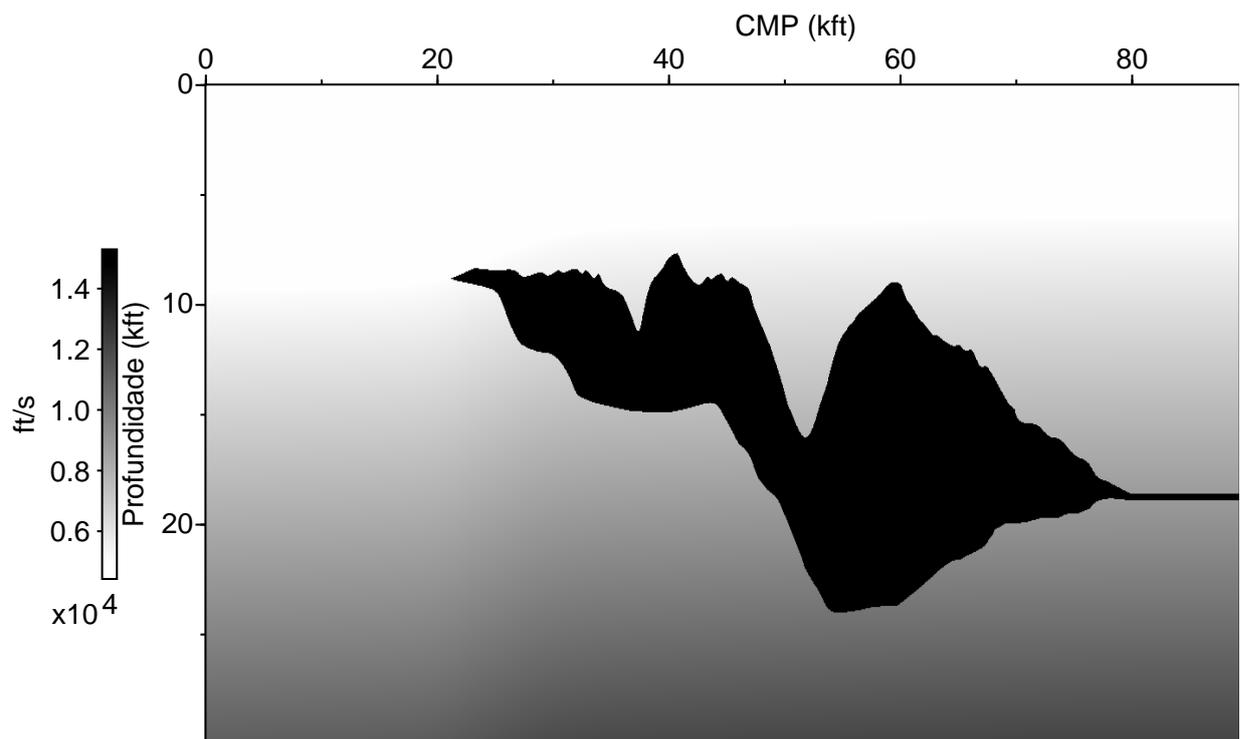


Figura 3.2: Campo de velocidade para o modelo Sigsbee2A.

O modelo BP (67th Conference and Exhibition, 2005) foi proposto para o estudo de técnicas de análise de velocidade, porém o mesmo se tornou bastante utilizado para testes de migração devido à presença de estruturas com grandes mergulhos e grande contrastes de velocidades (Figura 3.3).

3.2 Resultados com o método PSPI

O método de migração *PSPI* utiliza a cada nível da extrapolação um conjunto de velocidades de referência, sendo essas determinadas estatisticamente. O método consegue lidar bem com as variações laterais de velocidade, porém a um custo computacional relativamente elevado. Nas Figuras 3.4, 3.5, 3.6 estão os resultados obtidos para os modelos Marmousi, Sigsbee2A e BP, respectivamente.

O método conseguiu imagear bem o dado Marmousi, inclusive sua parte central mais complexa, conseguindo definir as três falhas maiores e os eventos da seção inferior também foram bem resolvidos.

No dado Sigsbee2A o método conseguiu imagear a parte superior do domo, porém apresenta uma perda considerável de amplitude na seção inferior do mesmo, decorrente do problema de iluminação.

Já no modelo BP a parte superior do domo salino foi imageada corretamente, porém os seus domos não o foram. Isso corre devido aos grandes mergulhos presentes. Essa limitação no imageamento está associada às restrições teóricas, já que o método utiliza para a derivação dos seus extrapoladores a equação unidirecional da onda. Por outro lado, o método conseguiu recuperar informações sobre feições internas do domo.

A Tabela 3.1 mostra os tempos de execução para os modelos utilizando o método *PSPI*. Os resultados foram conseguidos com um número de velocidades variável durante a extrapolação, atingindo um máximo de dez velocidades.

Modelo:	Marmousi	Sigsbee	BP
Tempo (s):	122	2264	8124
Tempo (min):	2	37.8	135.4

Tabela 3.1: Tempo de execução do algoritmo de migração PSPI aplicado aos modelos sintéticos.

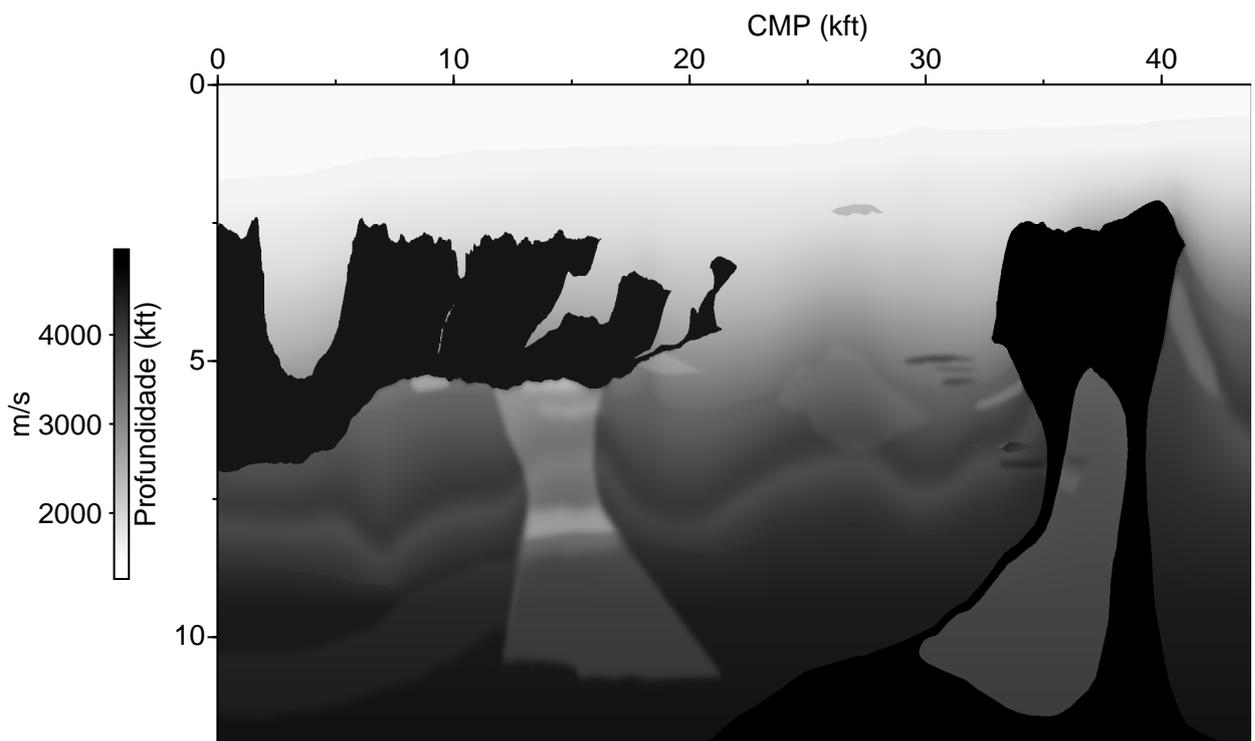


Figura 3.3: Campo de velocidade para o modelo BP.

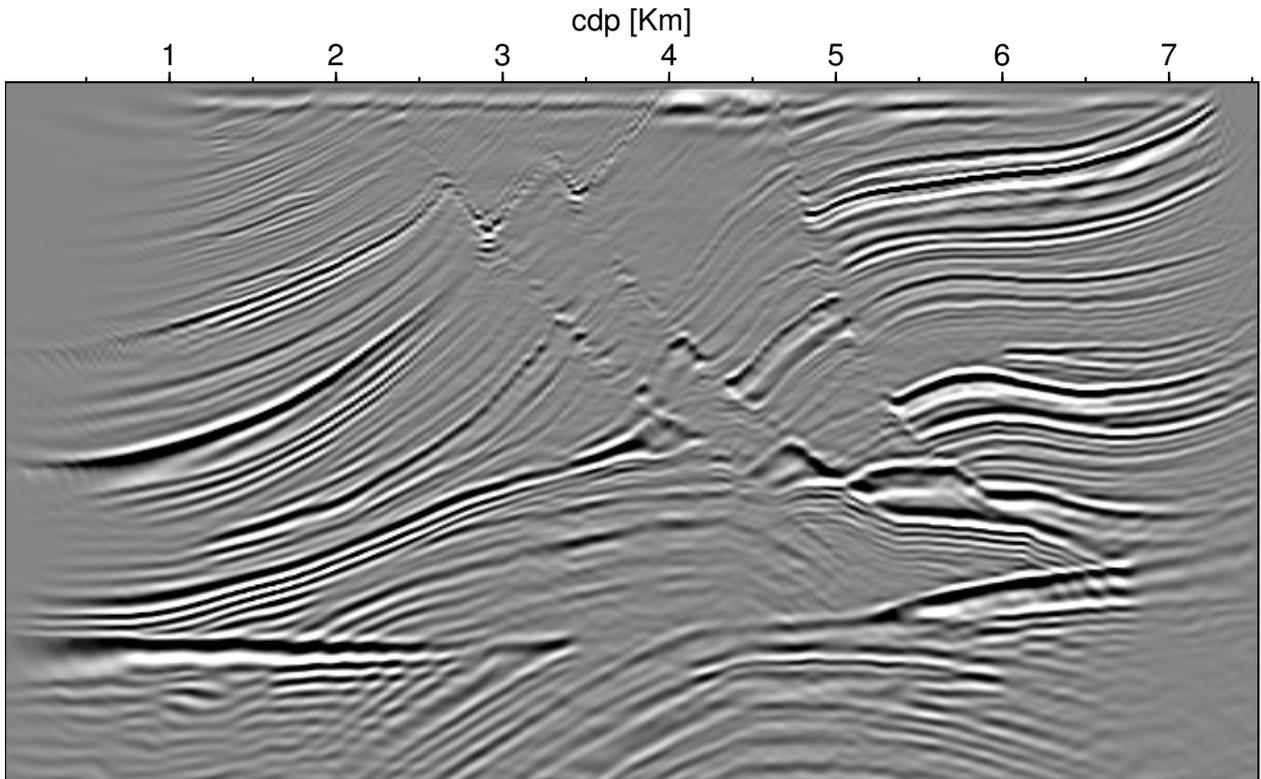


Figura 3.4: Resultado da migração *PSPI* para o modelo Marmousi

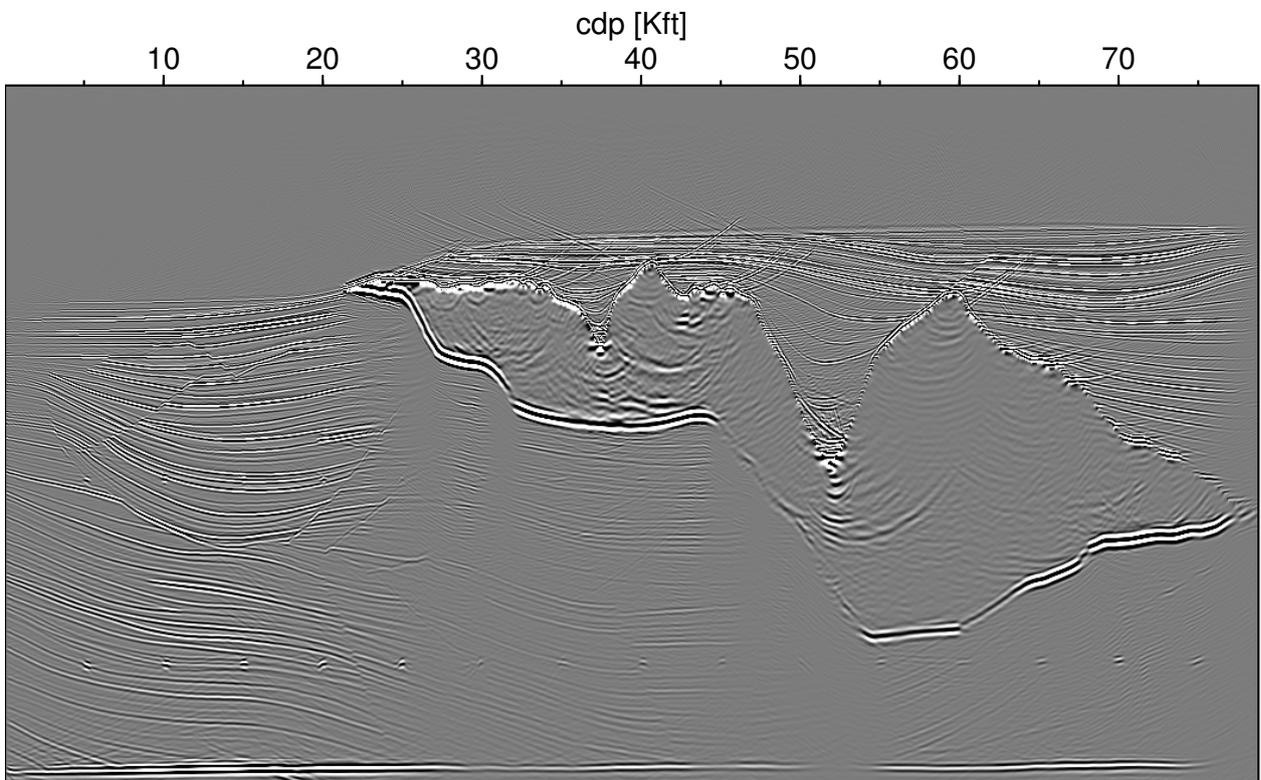


Figura 3.5: Resultado da migração *PSPI* para o modelo Sigbee2A

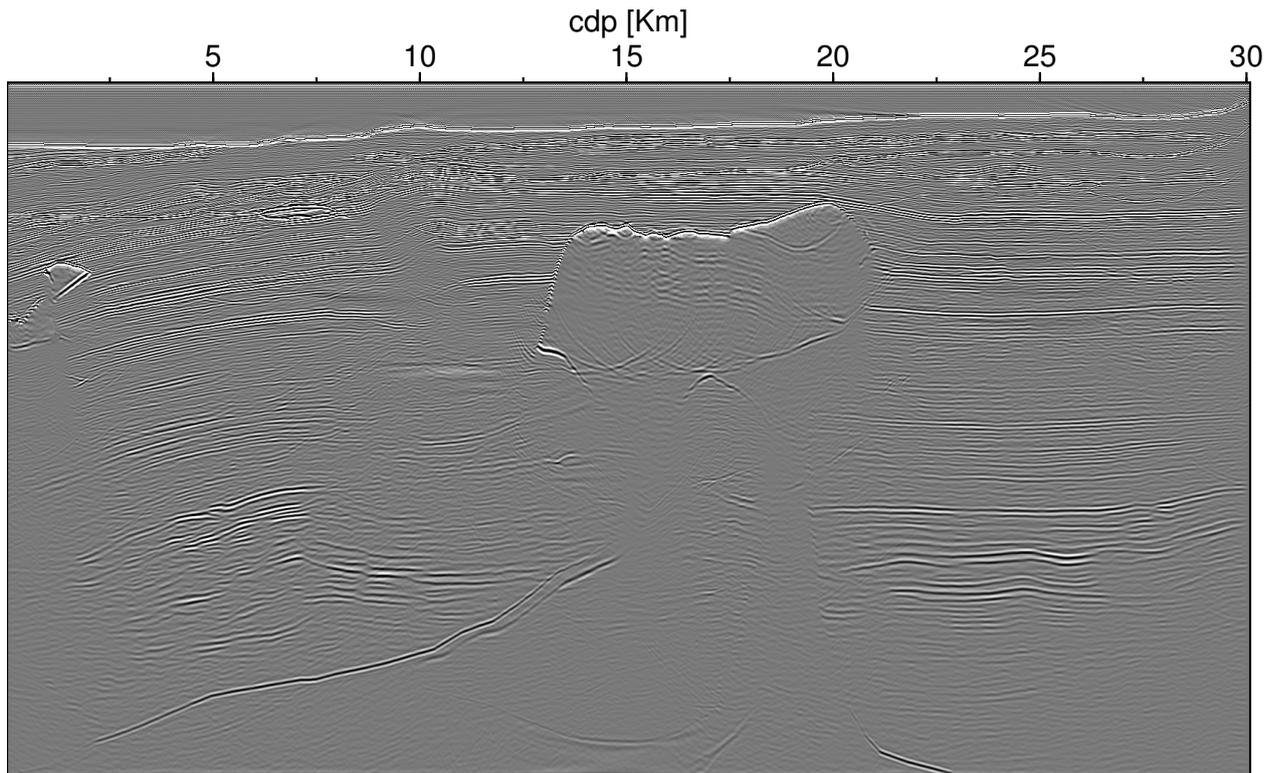


Figura 3.6: Resultado da migração *PSPI* para o modelo BP

3.3 Resultados com o método *Split Step*

O método *Split Step* utiliza uma única velocidade de referência para a extrapolação e uma perturbação no campo de velocidade para realizar as correções devidas às variações laterais de velocidade. Porém, o método é válido apenas quando a perturbação das velocidades, ou seja, o contraste lateral de velocidades não é tão significativo. Os resultados abaixo mostram que esse método em regiões de contrastes abruptos, no campo de velocidades, degradam a qualidade das imagens obtidas, em especial nos modelos com domos, como nas Figuras 3.8 e 3.9.

O resultado apresentado por esse método mostra um bom imageamento do dado Marmousi, Figura 3.7, incluindo sua parte central. Se comparado ao método *PSPI* notamos uma melhora nos resultados, como as reflexões no interior das três grandes falhas principais, agora, mais bem definidas. Ocorrem melhorias também nas reflexões da parte superior do modelo.

No dado Sigsbee o método conseguiu imagear a parte superior do domo, porém a parte inferior do domo não foi imageada corretamente, ocorrendo perda de amplitude, sendo que a feição central do domo não foi imageada.

No dado BP o método falhou em imagear grande parte do domo salino, imageando apenas

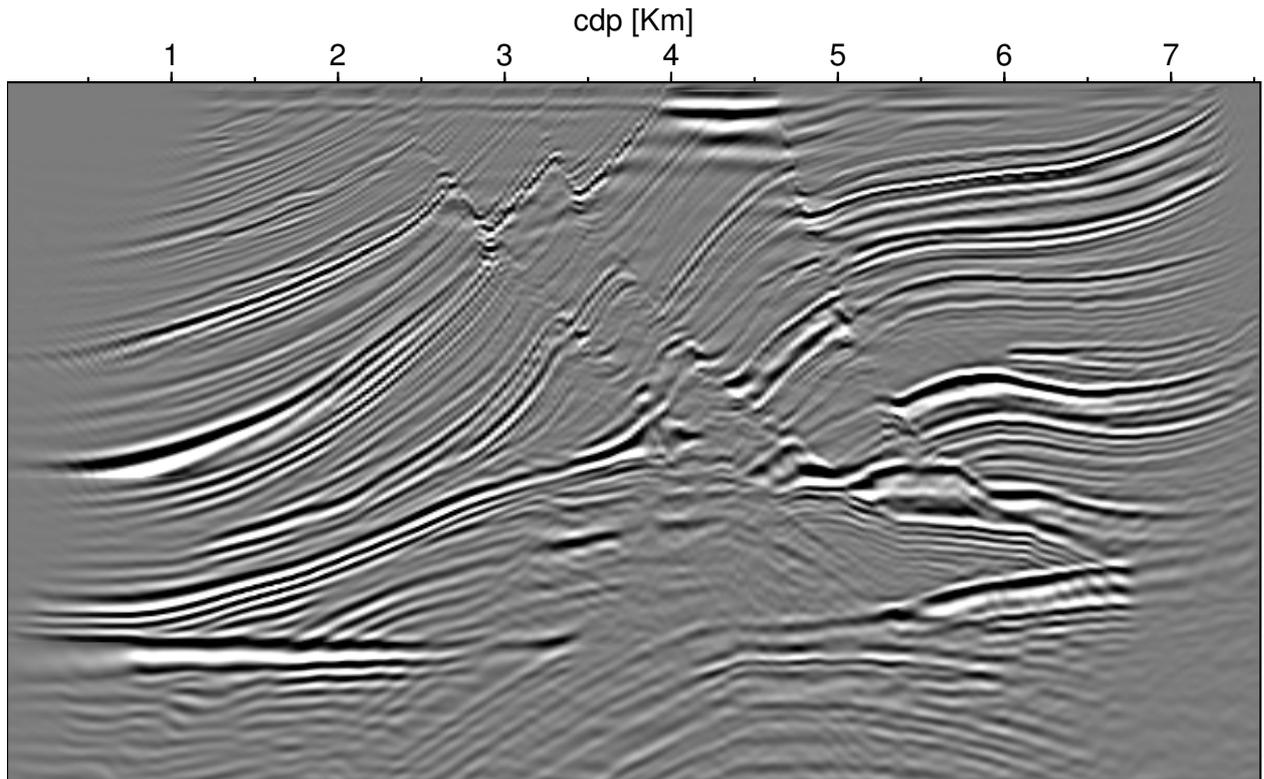


Figura 3.7: Resultado da migração *Split Step* para o modelo Marmousi

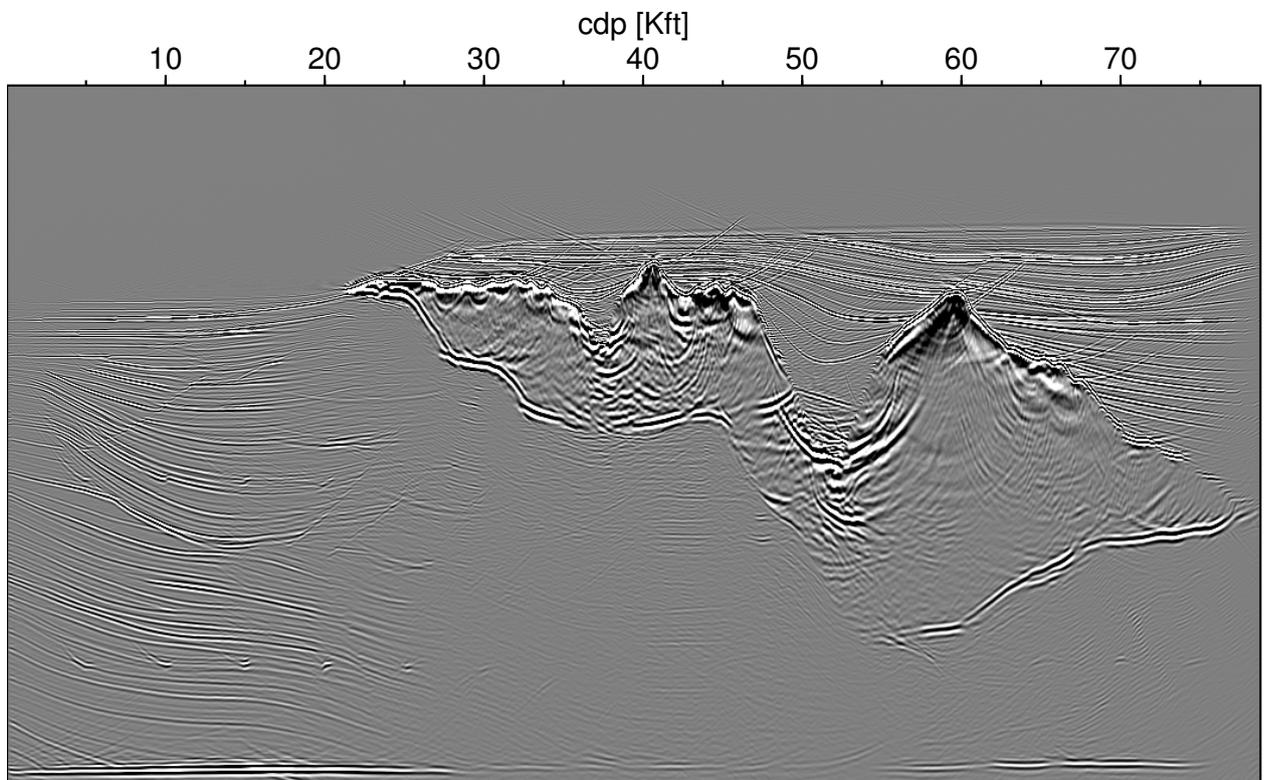


Figura 3.8: Resultado da migração *Split Step* para o modelo Sigsbee2A

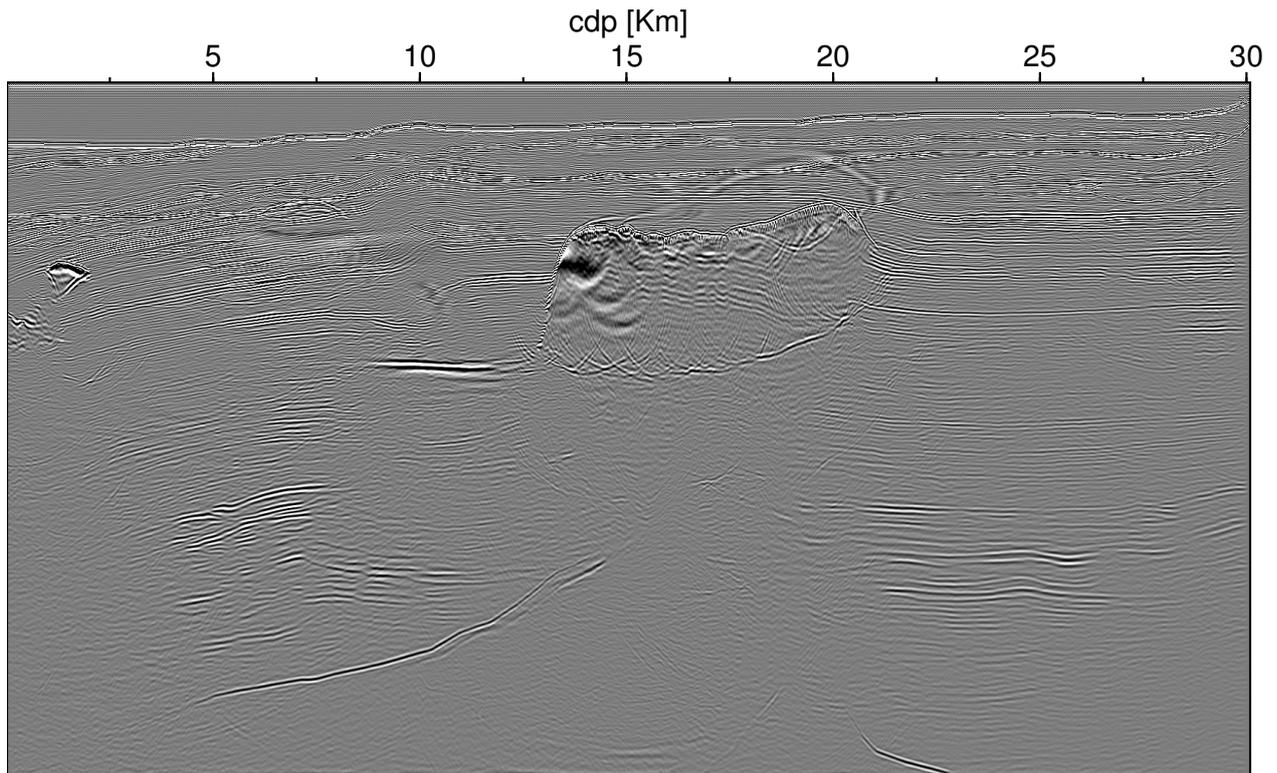


Figura 3.9: Resultado da migração *Split Step* para o modelo BP

o topo do mesmo, não recuperando informações do interior do corpo salino.

A Tabela 3.2 mostra os tempos de execução para os modelos utilizando o método *Split Step*.

Modelo:	Marmousi	Sigsbee	BP
Tempo (s):	17	618	2027
Tempo (min):	0.3	10.3	33.8

Tabela 3.2: Tempo de execução para o algoritmo de migração *Split Step* aplicado aos modelos sintéticos.

3.4 Resultados da migração $\omega - x$

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos utilizando os extrapoladores apresentados no capítulo 2. Porém, antes será feita algumas considerações sobre o tamanho, tipo do operador e limitações de mergulho do método e seus efeitos na qualidade final da migração.

Na Figura 3.10 é apresentado um fluxograma para as migrações no domínio $\omega - x$.

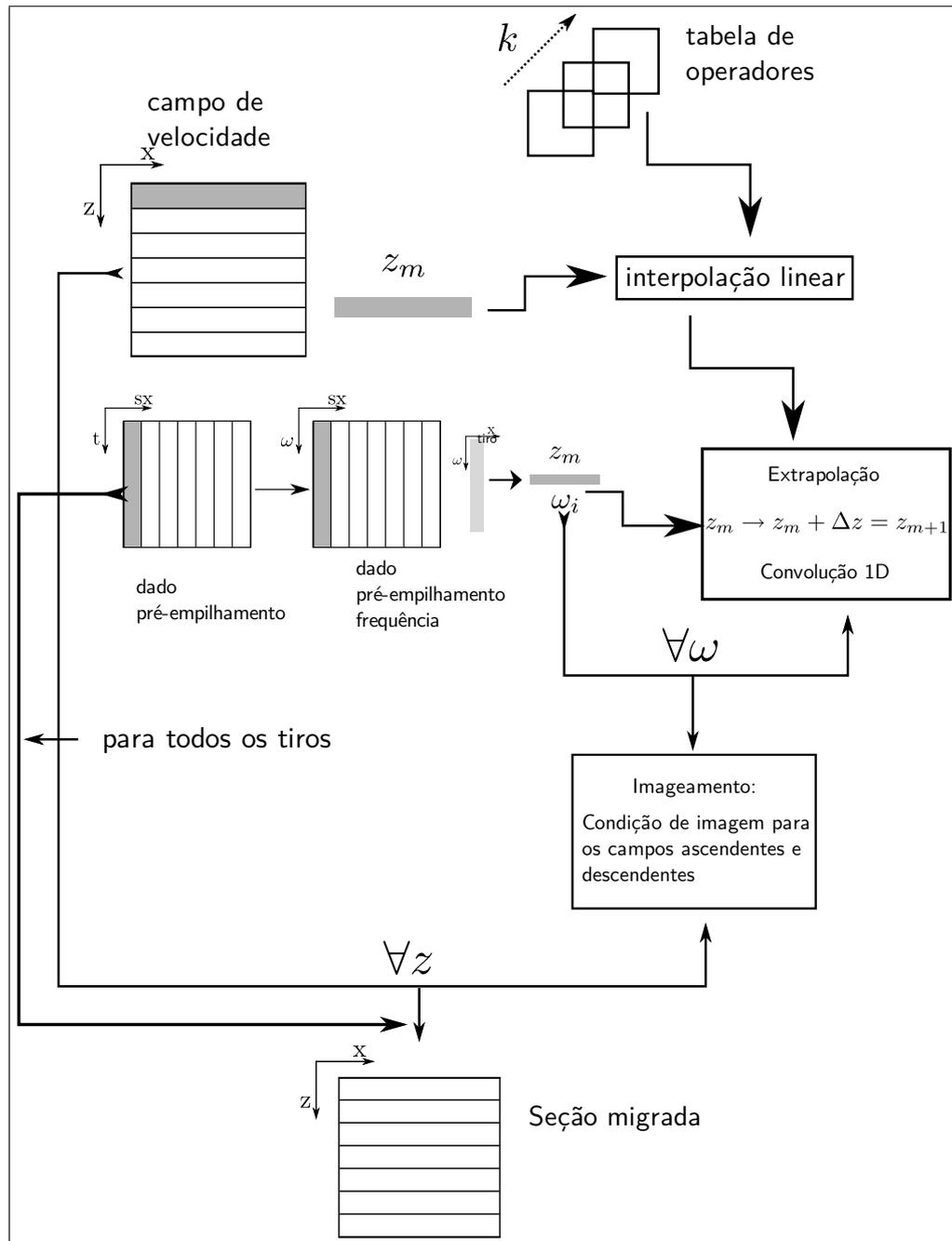


Figura 3.10: Fluxograma do algoritmo de migração pré-empilhamento no domínio $\omega - x$ utilizando operadores explícitos.

3.4.1 Tamanho do operador de extrapolação

Um parâmetro muito importante na qualidade e custo computacional dos extrapoladores utilizados na migração no domínio $\omega - x$ é o tamanho do operador utilizado. Extrapoladores longos (maior número de pontos) conseguem migrar eventos com maiores mergulhos, porém são mais custosos de serem calculados e aplicados no dado, uma vez que os mesmos são aplicados envolvendo-os com o dado. Uma outra questão importante, no uso de operadores muito longos, é que uma das premissas básicas do método é assumir que a velocidade é constante localmente, com operadores longos essa premissa se torna mais facilmente violada.

Abaixo segue, Figura 3.11, um comparativo da influência do tamanho do operador (no caso o operador utilizado é obtido truncando a resposta do operador *phase shift*) na qualidade do resultado. Observa-se uma melhoria substancial na região central do resultado com o aumento do tamanho do operador. Foi escolhido para esta imagem o operador truncado, pois o mesmo facilita a visualização na melhora na qualidade do imageamento, com o aumento do comprimento do operador. Operadores truncados são bastante instáveis quando são curtos.

3.4.2 Tipo do operador de extrapolação

Como discutido no capítulo 2, os operadores de extrapolação podem ser obtidos de uma série de formas diferentes. Essas diferenças são refletidas na qualidade com que esses extrapoladores aproximam o operador de *phase shift* (sendo esse obtido analiticamente). Além do critério de qualidade, deve ser utilizado o fator custo computacional, tanto para o cálculo dos operadores quanto para a sua aplicação, uma vez que mesmo métodos simples como o truncamento do operador podem gerar extrapoladores estáveis desde que esses sejam suficientemente longos.

A Figura 3.12 ilustra a importância do algoritmo utilizado para o desenho do operador de extrapolação. Dependendo da escolha da técnica para a obtenção do operador de extrapolação não há sequer a formação de uma imagem. Nota-se também que comparado aos métodos anteriores (*PSPI* e *Split Step*) há uma melhora substancial não só no imageamento da seção inferior do domo salino, mas também nos eventos abaixo do mesmo.

3.4.3 Restrições quanto ao mergulho dos refletores

Todos os extrapoladores obtidos no capítulo 2 fazem uso da chamada equação unidirecional da onda. Essa equação propaga apenas parte do campo de onda (ascendente ou descendente).

No entanto, a ocorrência de eventos numa seção sísmica com mergulhos maiores que 90° leva ao surgimento de campos de ondas ascendentes que não são corretamente imageados pelos algoritmos estudados. Existem técnicas que tentam minorar tais problemas utilizando

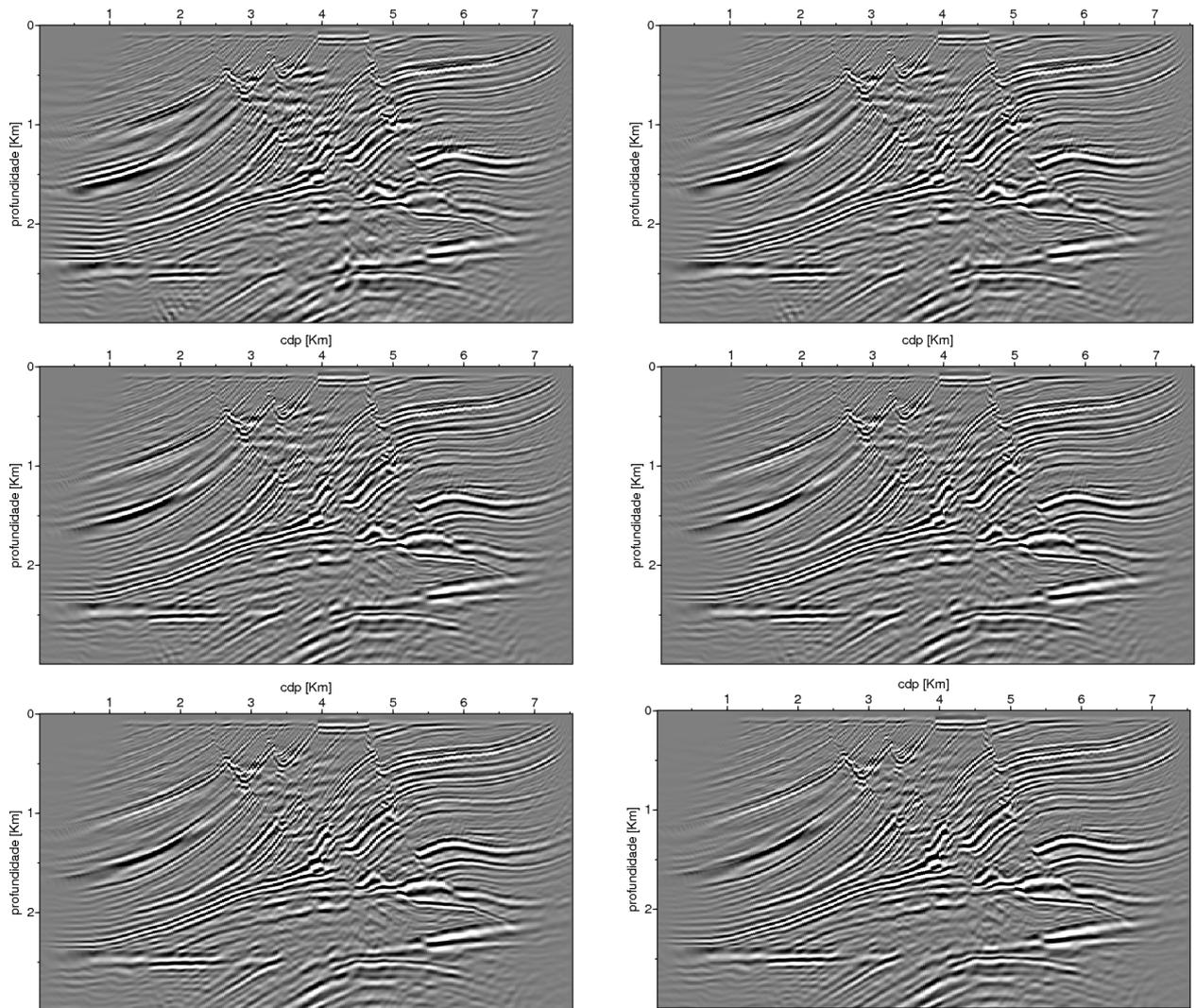


Figura 3.11: Modelo Marmousi migrado com diferentes comprimento de operadores.

O tamanho dos operadores cresce da esquerda para direita e de cima para baixo: 19 pontos (figura mais alta à esquerda) até 29 pontos (figura mais baixa à direita). O tamanho dos operadores sempre são ímpares e crescem de 2 em 2.

informações desses campos, como por exemplo em Hale, Hill e Stefani (1992).

Na prática ainda existe outro problema quando se considera os extapoladores utilizados na migração $\omega - x$. Esses extapoladores são normalmente obtidos através de processos de otimização, sendo que o ângulo máximo de mergulho é um parâmetro que entra nesses algoritmos de forma a controlar a relação entre o tamanho e estabilidade do operador, uma vez que os operadores desenhados para grandes mergulhos necessitarão possuir tamanhos maiores.

As figuras abaixo ilustram as diferenças entre o método de migração $\omega - x$ e o método de migração RTM (*Reverse Time Migration*) que utiliza a equação completa da onda. O RTM

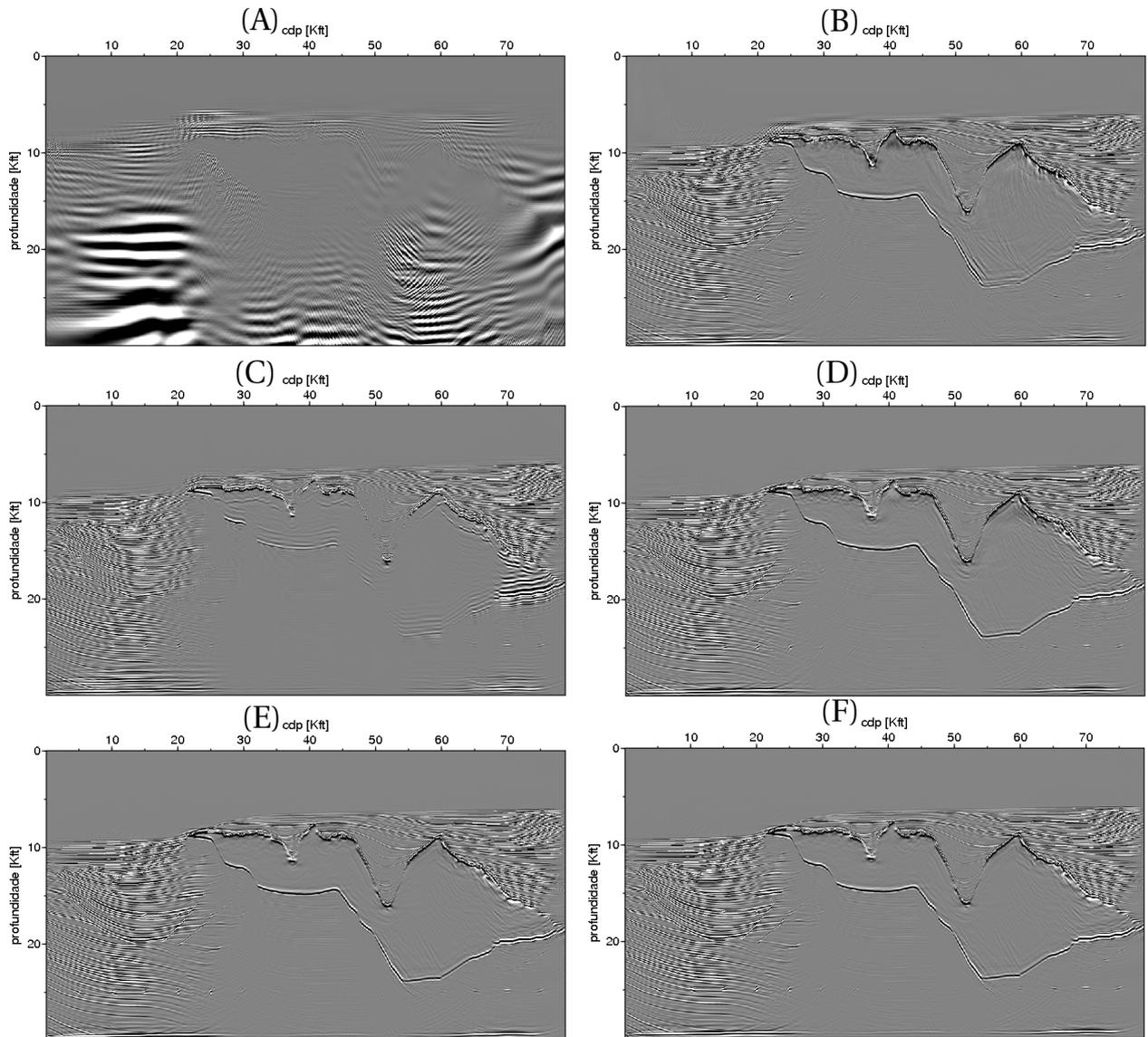


Figura 3.12: Modelo Sigsbee migrado com os mesmos parâmetros, variando apenas o algoritmo utilizado na obtenção dos extrapoladores. (A) truncamento, (B) operador de fase suavizada, (C) Janela de Kaiser, (D) algoritmo de Remez, (E) WLSQ e (F) WLSQ tendo como entrada o operador de fase suavizada.

em questão utiliza a técnica REM (*Rapid Expansion Method*) para solucionar a equação da onda.

A Figura 3.13 mostra o resultado utilizando a técnica de migração RTM. Agora, os flancos do sal, assim como o seu interior, foram imageados de forma substancialmente melhor, porém requerendo para isso um custo computacional mais elevado.

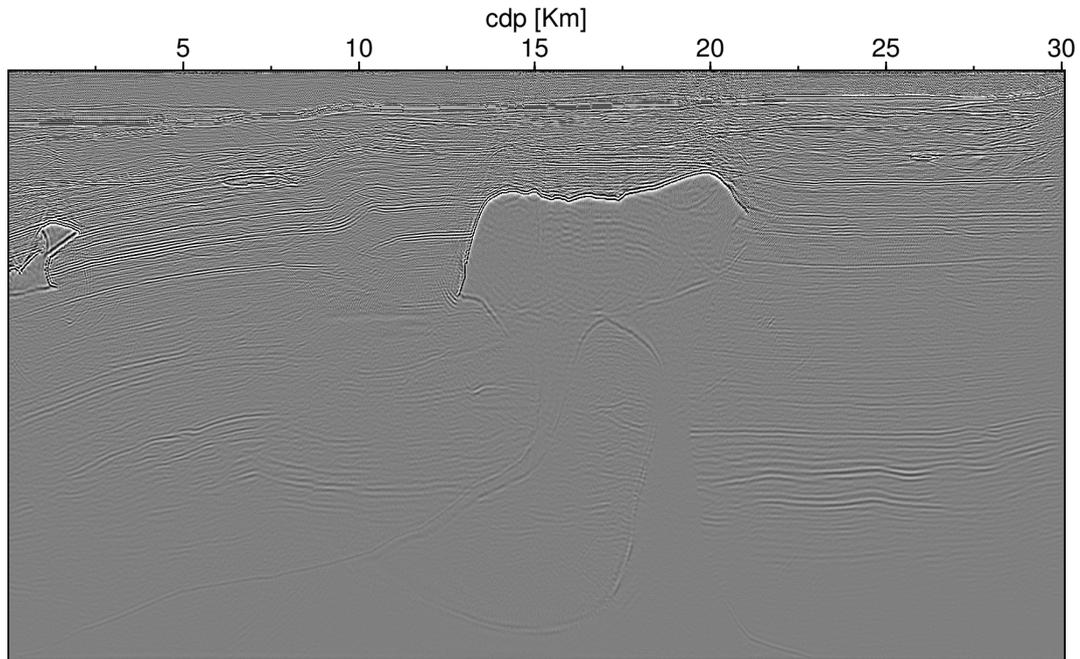


Figura 3.13: Resultado da migração RTM com o método de solução REM do dado sintético BP.

Já na Figura 3.14 temos o resultado da migração no domínio do espaço e frequência, onde os flancos do sal, assim como seu interior, não são tão bem definidos se comparados à migração RTM. Essa deficiência, como explicado anteriormente, está relacionada ao uso da equação unidirecional da onda.

3.4.4 Seções migradas

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos para os modelos sintéticos utilizando os extrapolares explícitos aplicados no domínio $\omega - x$ vistos no capítulo 2.

3.4.5 Modelo Marmousi

Será mostrado os resultados obtidos para o modelo Marmousi utilizando o extrapolador de Hale, Figura 3.15, operador obtido por truncamento, Figura 3.16, operador obtido por janelamento (Kaiser), Figura 3.17, algoritmo de Remez, Figura 3.18, e mínimos quadrados ponderados otimizados (Figura 3.19).

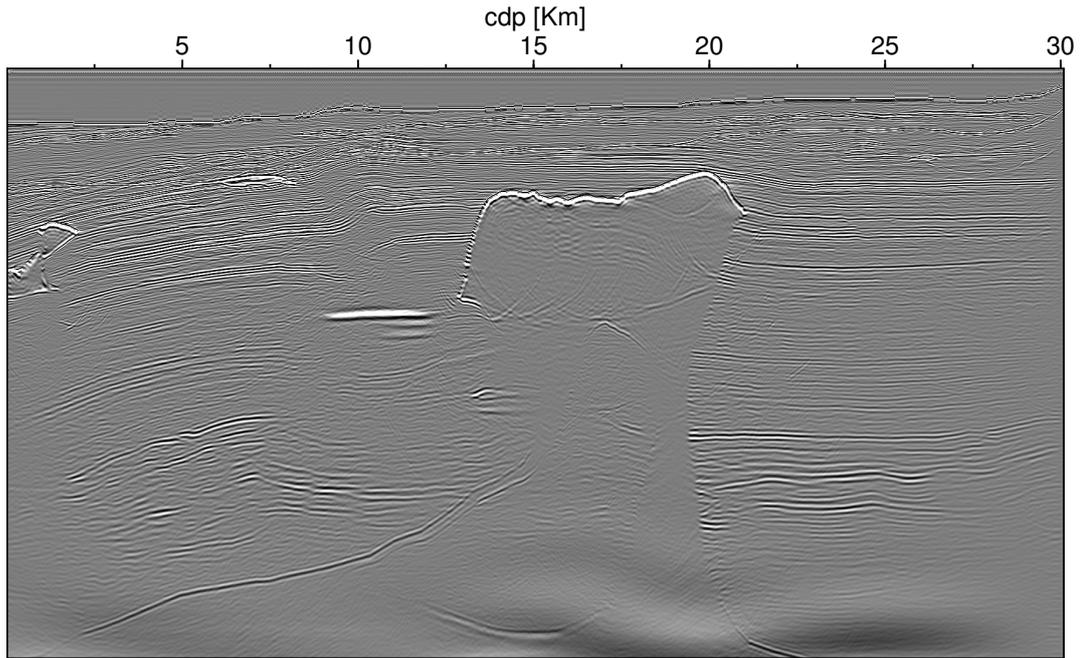


Figura 3.14: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o operador WLSQ otimizando e o operador de fase suavizado.

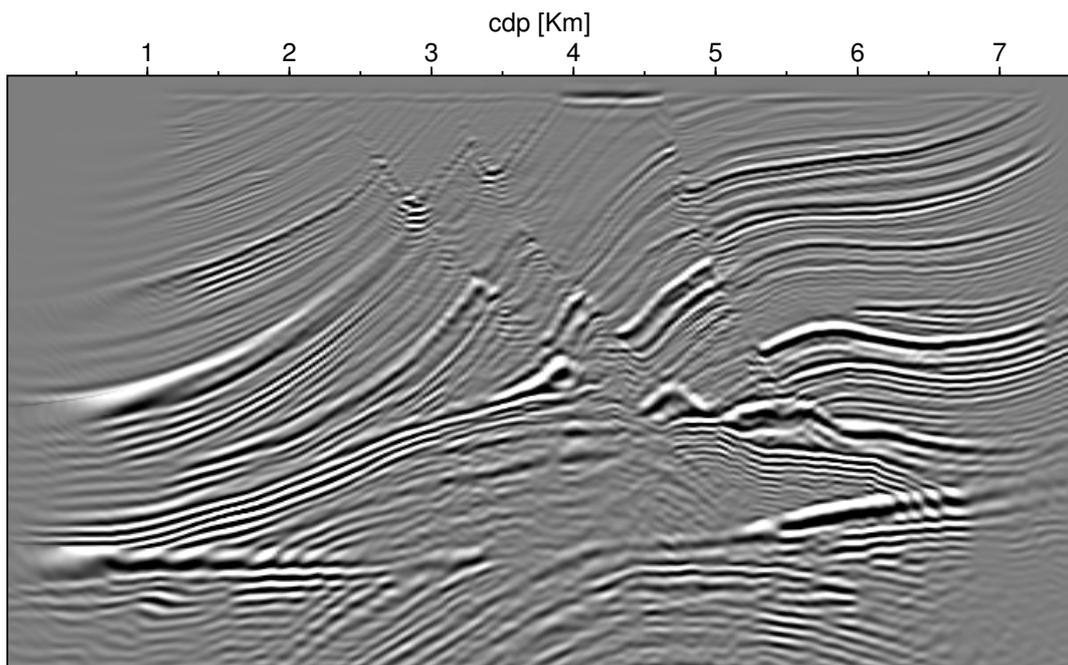


Figura 3.15: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador de Hale

A Tabela 3.3 mostra os tempos de execução para os diferentes algoritmos de obtenção dos operadores de extrapolação. Esses tempos são diferenciados, devido ao custo computacional para a obtenção da tabela de operadores.

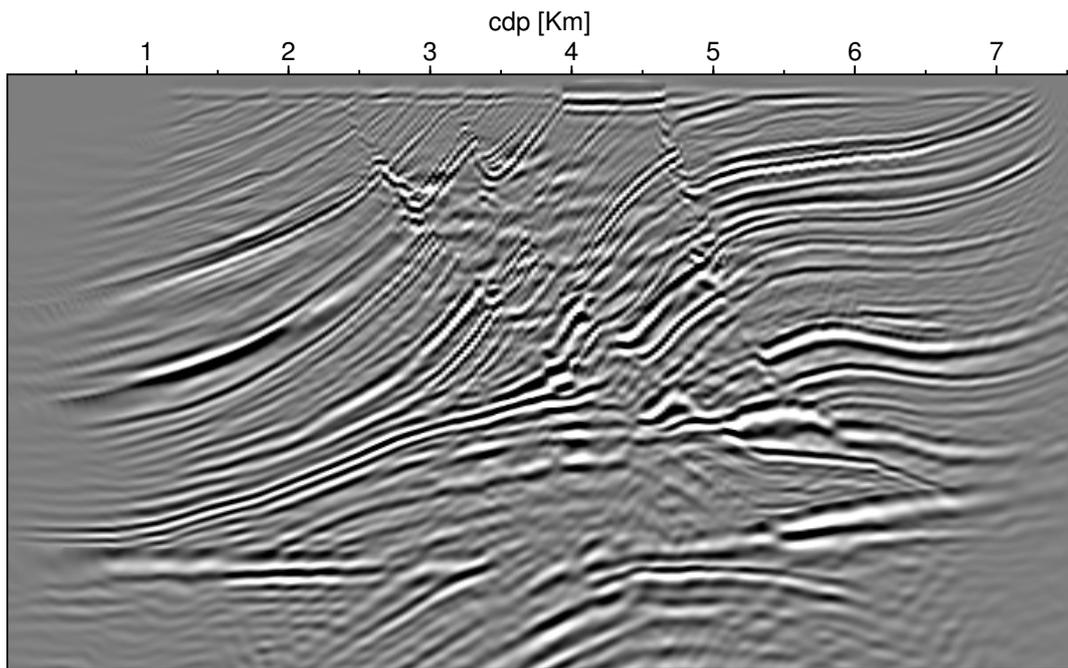


Figura 3.16: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico

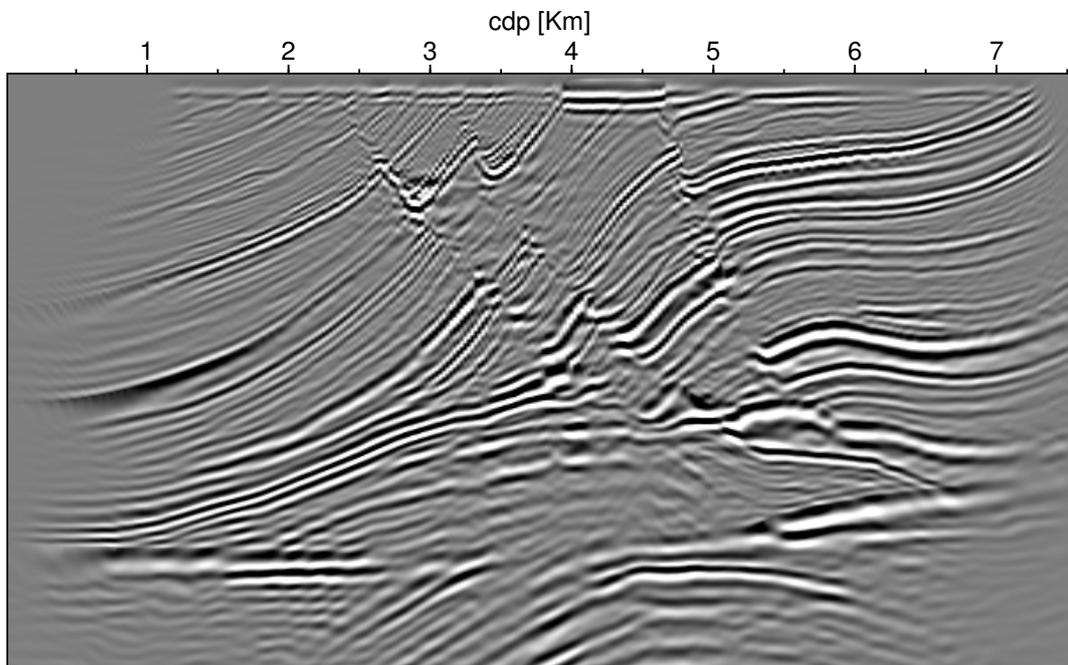


Figura 3.17: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido por janelamento e função janela de Kaiser do operador analítico

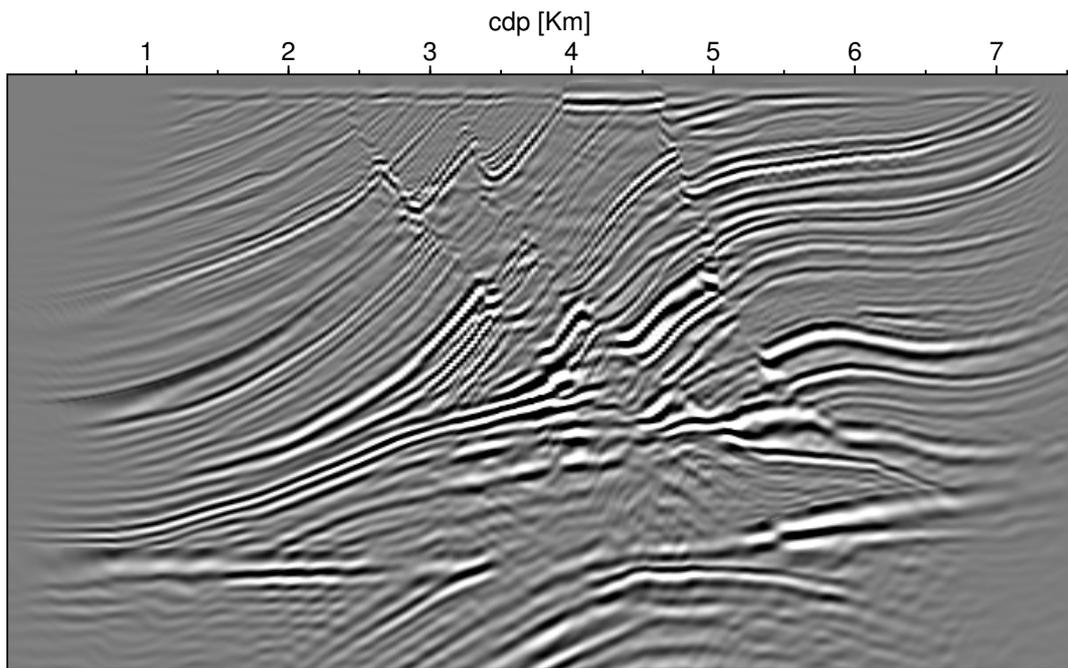


Figura 3.18: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez

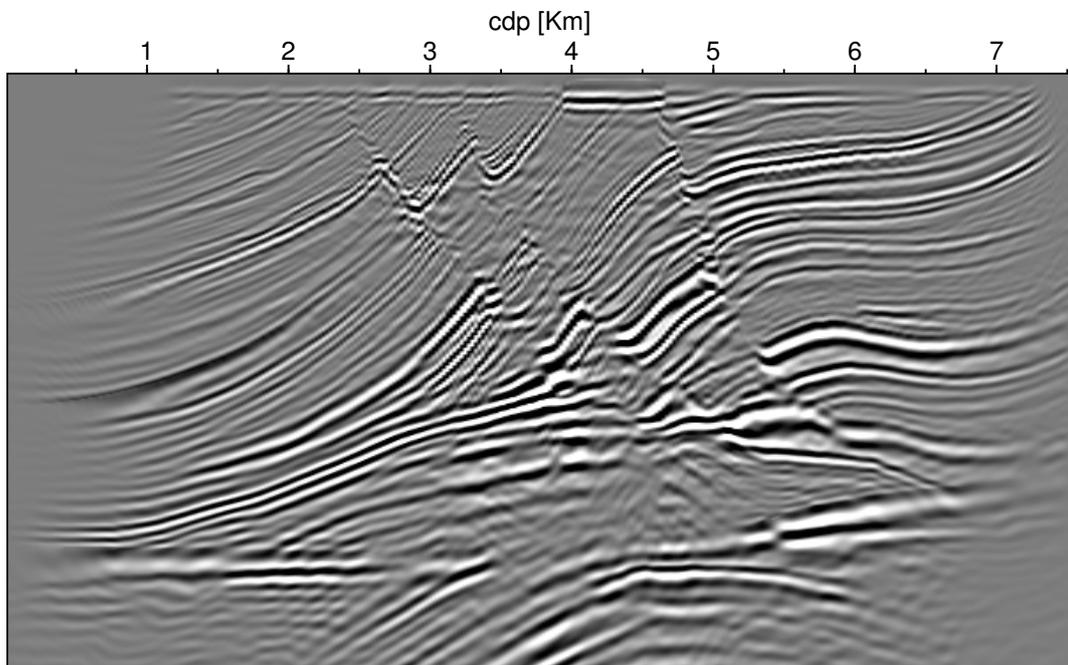


Figura 3.19: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Marmousi utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo dos métodos dos mínimos quadrados ponderados

Operador:	Truncado	Kaiser	Hale	Remez	WLSQ
Tempo (s):	22	16	34	20	19
Tempo (min):	0.37	0.27	0.57	0.34	0.32

Tabela 3.3: Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo Marmousi

3.4.6 Modelo Sigsbee

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para o modelo Sigsbee utilizando o extrapolador de Hale, Figura 3.20, operador obtido por truncamento, Figura 3.21, operador obtido por janelamento (Kaiser), Figura 3.22, algoritmo de Remez, Figura 3.23 e mínimos quadrados ponderados otimizados (Figura 3.24).

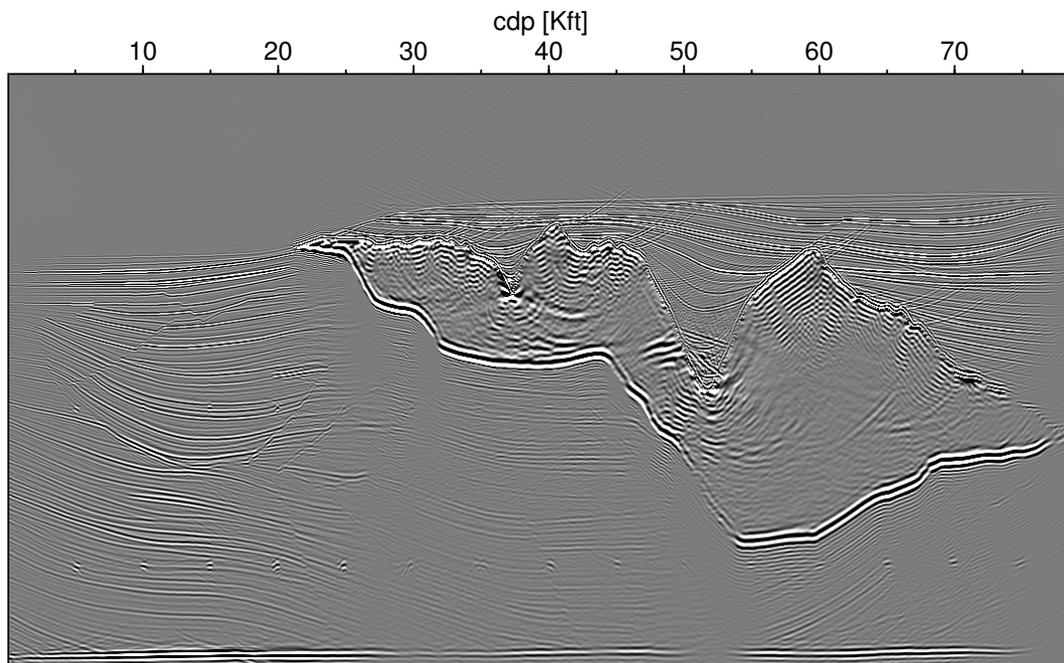


Figura 3.20: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador de Hale

A Tabela 3.4 mostra os diferentes tempos de execução variando-se os métodos de obtenção dos extrapoladores.

Operador:	Truncado	Kaiser	Hale	Remez	WLSQ
Tempo (s):	494	440	481	438	438
Tempo (min):	8.2	7.3	8.0	7.3	7.3

Tabela 3.4: Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo Sigsbee

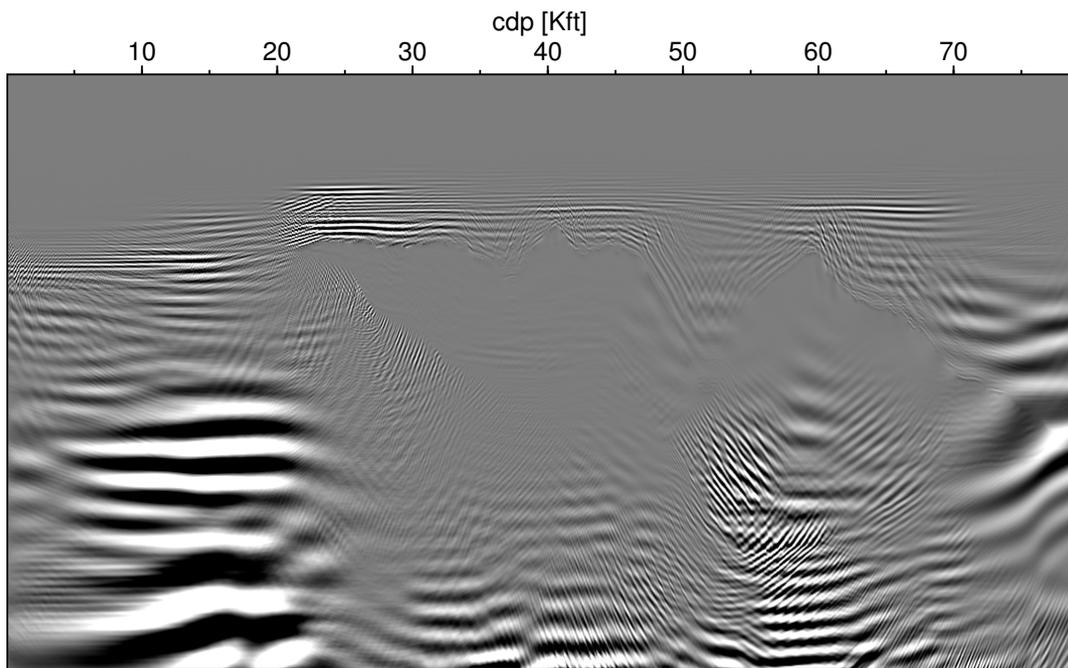


Figura 3.21: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico

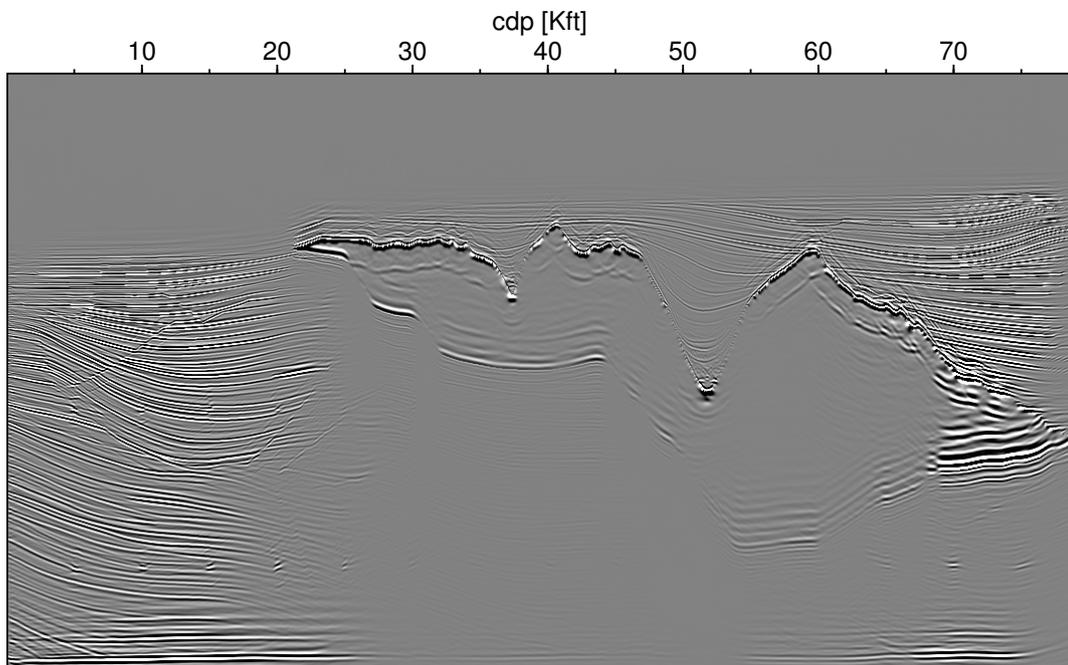


Figura 3.22: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido por janelamento e a função janela de Kaiser do operador analítico

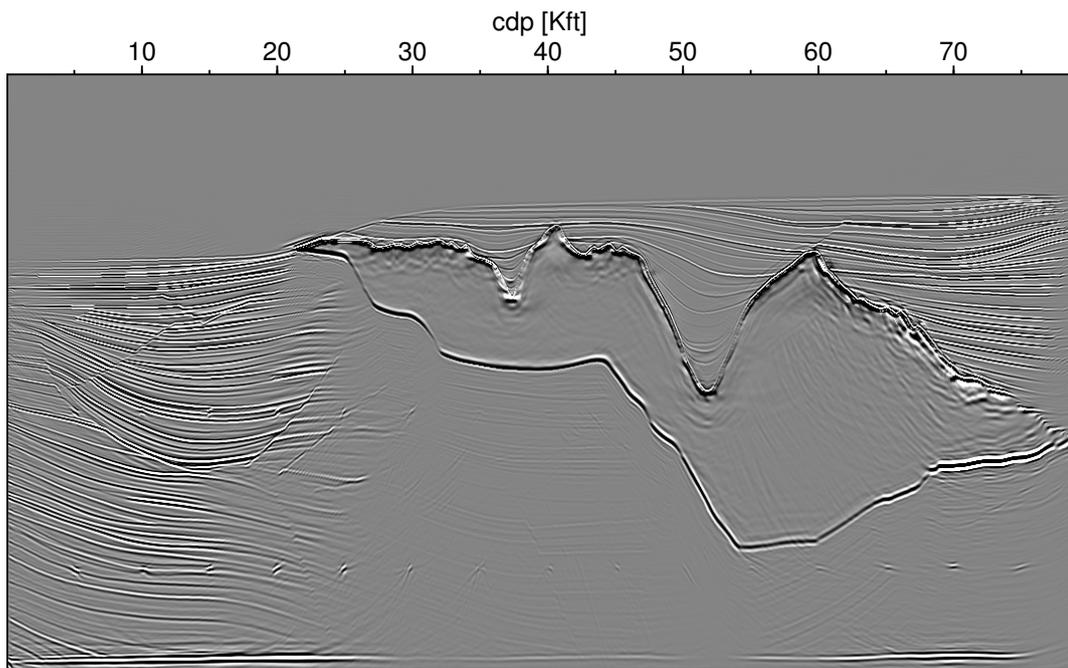


Figura 3.23: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez

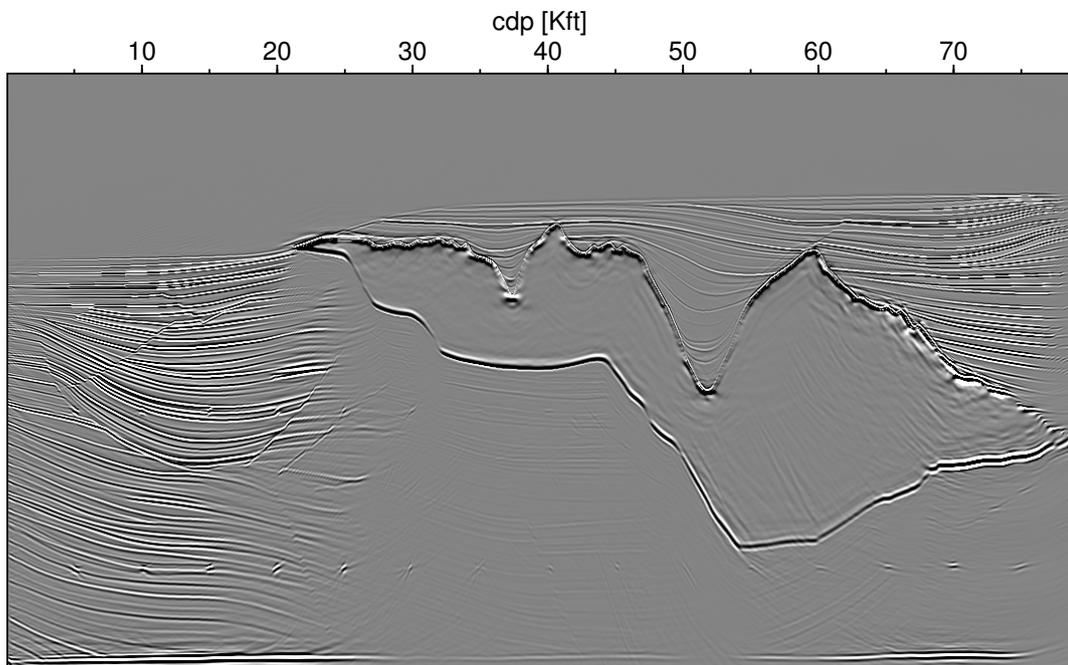


Figura 3.24: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético Sigsbee utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo do métodos dos mínimos quadrados ponderados

3.4.7 Modelo do BP

Mostramos a seguir os resultados obtidos para o modelo BP, com o operador obtido por truncamento, Figura 3.25, operador obtido por janelamento (Kaiser), Figura 3.26, algoritmo de Remez, Figura 3.27, e mínimos quadrados ponderados otimizados (Figura 3.28).

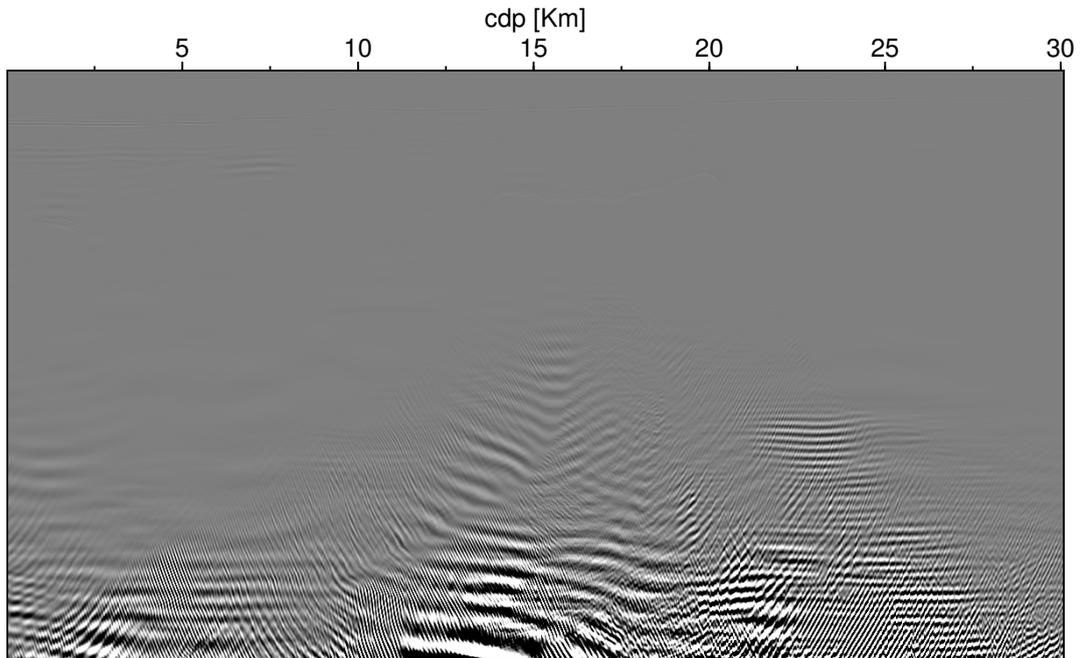


Figura 3.25: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido por truncamento do operador analítico

A Tabela 3.5 mostra os diferentes tempos de execução variando-se os métodos de obtenção dos extrapoladores. Não foi possível utilizar o extrapolador de Hale no dado BP, pois o método ficou instável.

Operador:	Truncado	Kaiser	Hale	Remez	WLSQ
Tempo (s):	1001	1001	-	1005	999
Tempo (min):	16.70	16.70	-	16.75	16.65

Tabela 3.5: Tempo de execução para o algoritmo de migração $\omega - x$ aplicado ao modelo BP

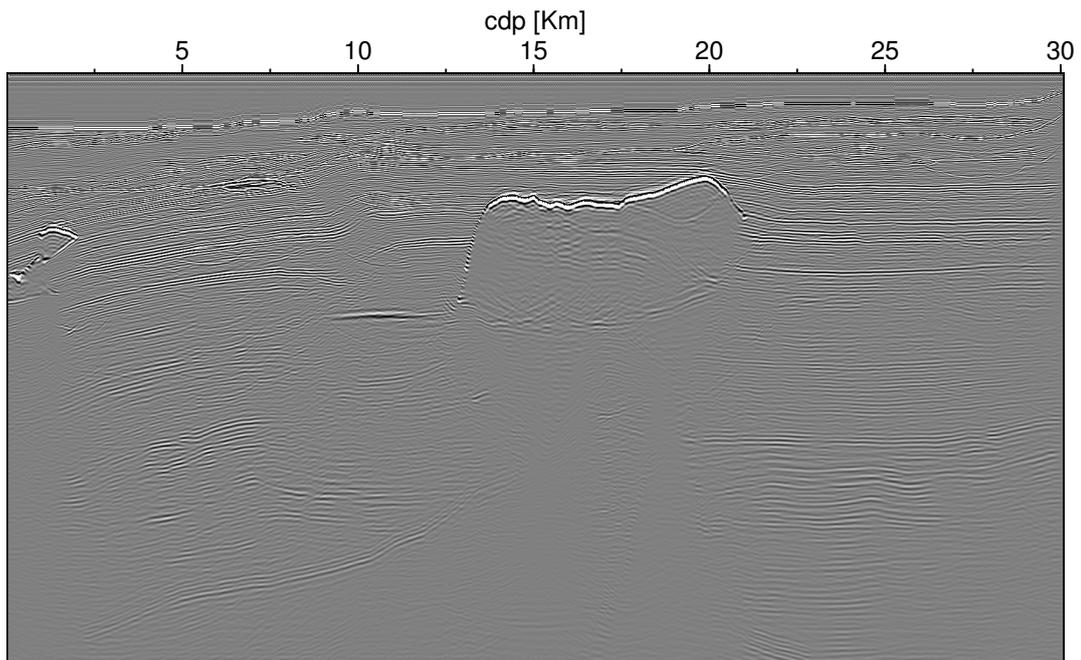


Figura 3.26: Resultado da migração $\omega-x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido por janelamento e a função janela de Kaiser do operador analítico

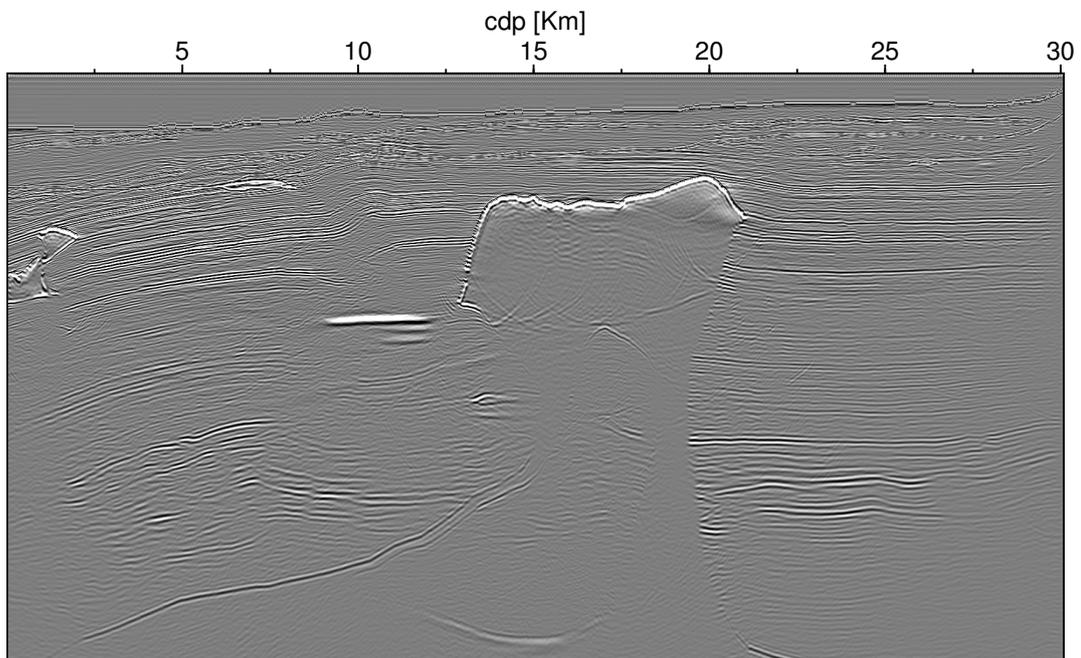


Figura 3.27: Resultado da migração $\omega-x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo de troca de Remez

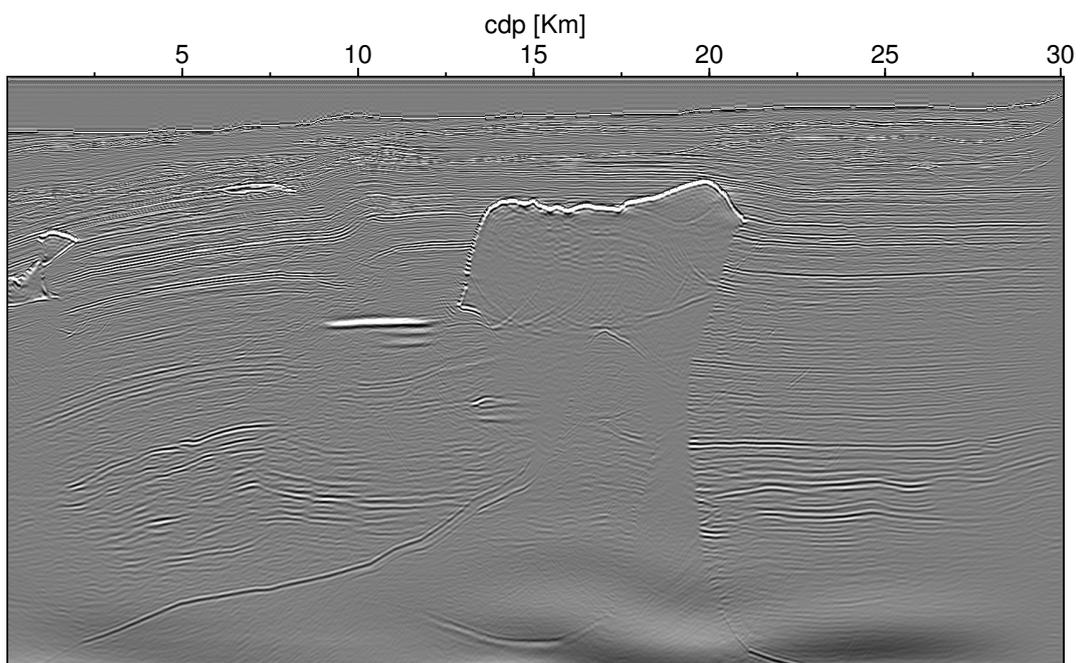


Figura 3.28: Resultado da migração $\omega - x$ do dado sintético BP utilizando o extrapolador obtido com o algoritmo do métodos dos mínimos quadrados ponderados

CAPÍTULO 4

Conclusões

Foi mostrado a aplicabilidade dos métodos de migração utilizando operadores explícito no domínio $\omega - x$ e a robustez dos mesmos quando aplicados a modelos sísmicos com variação lateral da velocidade. Também foi realizado um estudo das principais técnicas utilizadas na obtenção desses extrapoladores.

Essas técnicas partem de resultados analíticos, conhecidos para a solução da equação da onda no domínio do número de onda e frequência. Os algoritmos estudados fazem a transformação do operador analítico (*phase shift*) do domínio $\omega - k$, onde são definidas as especificações do operador, para o domínio $\omega - x$, onde o mesmo é aplicado ao dado. Essa transformação é feita de forma otimizada com o intuito de manter a acurácia do operador, o método estável e o comprimento do operador reduzido.

Aplicamos esses métodos a dados sintéticos que apresentam dificuldades no seu imageamento devido à presença de variações laterais de velocidade muito fortes e de estruturas complexas de domos salinos. Essas últimas, além dos grandes contrastes de velocidade, também apresentam mergulhos de grande ângulo (no caso do dado BP, maiores que 90°) e superfícies rugosas e não uniformes, como no modelo Sigsbee.

Os resultados obtidos usando esses extrapoladores foram comparados com os resultados obtidos utilizando duas das mais simples e populares extensões (*PSPI* e *Split Step*) do operador de deslocamento de fase (*phase shift*) para o caso em que ocorrem variações laterais de velocidade. A comparação mostrou que todos os métodos oferecem resultados satisfatórios quando em meios que apresentam variações laterais de velocidade de forma suave, como no modelo do Marmousi. No entanto, em meios onde tais variações são abruptas (modelos Sigsbee e BP) os métodos no domínio $\omega - x$, utilizando extrapoladores explícitos, se mostraram mais robustos, imageando com melhor qualidade os corpos salinos presentes nos modelos sintéticos.

Quanto aos custos computacionais, o método explícito se mostrou menos oneroso se comparado aos tradicionais métodos *PSPI* e *Split Step*. Para o modelo do Marmousi obtendo tempo equivalentes, sendo isso devido ao custo adicional do cálculo dos operadores de extração. Esse tempo adicional é compensado em dados maiores, como mostram os resultados obtidos para o modelo do Sigsbee, onde o método no domínio $\omega - x$ foi cerca de 370% mais

rápido que o algoritmo *PSPI* e cerca de 20% mais rápido que o método *Split Step*. Já no dado BP, o método explícito foi cerca de 800% mais rápido em comparação com a técnica *PSPI* e cerca de 50% mais rápido em relação a técnica *Split Step*.

Os métodos aqui estudados são bastante utilizados no desenho de filtros para migração, sendo que os mesmos, com grau variados de dificuldades, podem ser estendidos para meios mais complexos incluindo anisotropia, ou podem também serem utilizados em técnicas de migração 3D. Para tanto, a complexidade em adaptar tais operadores é variável. Por exemplo, o método de mínimos quadrados ponderados é facilmente estendido para o caso 3D, enquanto o método de Remez não é diretamente extensível, sendo necessário outras técnicas como a transformada de McClellan. Esses tópicos podem ser abordados e discutidos mais detalhadamente em trabalhos futuros.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe por ter permitido que concluísse a graduação sem muitas outras preocupações.

Ao professor Dr. Reynam Pestana pelos ensinamentos e paciência nesses quase dois anos de boa convivência.

Aos membros da banca, pela presteza na leitura do trabalho e disposição em participar da mesma.

Aos professores do curso de graduação em Geofísica da UFBA, em especial aos Professores Wilson Figueiró, Milton Porsani e Hédison Sato.

A coordenadora e professora do curso de Geofísica Jacira Cristina, pelo carinho com os alunos e disposição em ajudá-los.

Aos funcionários do curso, em especial Dona Ana D'O, Joaquim Lago e Marcelinho.

Aos colegas do curso de Ciência da Computação Adriano Wagner e Fabricio Oliveira, pela paciência e presteza.

A amizade e companheirismo dos colegas do curso de graduação Alana Aderne, Enock Alves, Fernanda Oliveira, Rodrigo Andrade, Naiane Oliveira e Nayguel Castro.

APÊNDICE A

Diferenciação de funções banda limitadas

É amplamente conhecido a seguinte relação de equivalência entre derivação no domínio do tempo e frequência

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow i\omega \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow -\omega^2 \quad (\text{A.1b})$$

Porém essa relação pode ser expressa de outra forma caso a função com que estejamos trabalhando seja uma função banda-limitada ($f(\omega)$), definida a seguir:

$$f(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & |\omega| < \omega_{max} \\ 0 & |\omega| > \omega_{max} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde ω_{max} é constante real e finita.

Agora, queremos mostrar que a operação de derivação de uma função banda limitada no domínio de frequência (multiplicação por $i\omega$) no domínio do tempo, também pode ser expresso por uma convolução ou seja: $\partial_t \Leftrightarrow d_1(t)$.

Realizando transformada de Fourier inversa da função $\partial_t f(\omega) = d(\omega)f(\omega)$, com $d(\omega) = i\omega$, ou seja:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega)f(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} d(\omega)f(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.3})$$

Utilizando o teorema da convolução, temos.

$$\frac{dF(t)}{dt} = d(t) \star f(t) \quad (\text{A.4})$$

A idéia aqui desenvolvida e utilizada no trabalho tem sido utilizada também em outras aplicações, como em modelagem de dados sísmicos, por exemplo, em (Zhou e Greenhalgh, 1992).

Referências

- 67th Conference and Exhibition (2005) The 2004 BP Velocity Benchmark, Madrid, EAGE, EAGE, 67th Conference and Exhibition.
- Arfken, G. B.; Weber, H. J. e Harris, F. (2000) *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York.
- Baoniu, H. (2001) The comparison of four closely related depth migration methods, Dissert. de Mestrado, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, CWP-358.
- Berkhout, A. J. (1981) Wave field extrapolation techniques in seismic migration, a tutorial, *Geophysics*, **46**(12):1638–1656.
- Berkhout, A. J. (1982) *Seismic Migration. Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation, theoretical aspects*, nº 14A In *Developments in solid earth geophysics*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands.
- Berkhout, A. J. (1986) Seismic inversion in terms of pre-stack migration and multiple elimination, *Proceedings of the IEEE*, **74**(3):415 – 427.
- Berkhout, A. J. e Van Wulfften Palthe, D. W. (1979) Migration in terms of spatial deconvolution, *Geophysical Prospecting*, **27**:261–291.
- Blacquièrre, G. (1989) *3D Wave field extrapolation in seismic depth migration*, Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Netherlands.
- Blacquièrre, G.; Debeye, H. J. W.; Wapenaar, C. P. A. e Berkhout, A. J. (1989) 3d table driven migration, *Geophysical Prospecting*, **87**(8):925–958.
- Claerbout, J. F. (1971) Toward a unified theory of reflector mapping, *Geophysics*, **36**(3):467–481.
- Claerbout, J. F. (1985) *Imaging the Earth's Interior*, Blackwell Science, New York.
- Gazdag, J. (1978) Wave equation migration with the phase-shift method, *Geophysics*, **43**(7):1342–1351.
- Gazdag, J. e Sguazzerro, P. (1984) Migration of seismic data by phase shift plus interpolation, *Geophysics*, **49**(2):124–131.
- Hale, D. (1991) Stable explicit depth extrapolation of seismic wavefields, *Geophysics*, **56**(11):1770–1777.

- Hale, D.; Hill, N. R. e Stefani, J. (1992) Imaging salt with turning seismic waves, *Geophysics*, **57**(11):1453–1462.
- Loewenthal, D.; Roberson, R. e Sherwood, J. (1976) The wave equation applied to migration, *Geophysical Prospecting*, **24**(2):380–399.
- Maeland, E. (1993) On the construction of the 3d band-limited extrapolation operator in the space-frequency domain, *Geophysical Prospecting*, **41**(5):645–658.
- Maeland, E. (1994) On the evaluation of explicit 2-d extrapolation operators, *Geophysical Journal International*, **116**(1):85–94.
- McClellan, J. H. e Parks, T. W. (2005) A personal history of the parks mclellan algorithm, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 82–86.
- Menke, W. (1989) *Geophysical data analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic Press, New York.
- Nautiyal, A.; Gray, S. H.; Whitmore, N. D. e Garing, J. D. (1993) Stability versus accuracy for an explicit wavefield extrapolation operator, *Geophysics*, **58**(2):277–283.
- Oppenheim, A. V. e Schafer, R. W. (1975) *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Rabiner, L. R.; McClellan, J. H. e Parks, T. W. (1975) FIR digital filter design techniques using weighted chebyshev approximation, *Proceedings of IEEE*, **63**(4):595–610.
- Robinson, E. A. (1986) Migration of seismic data by the wkbj method, *Proceedings of the IEEE*, **74**(3):428 – 439.
- Scales, J. A. (1994) *Theory of seismic imaging*, 1994, Golden, Colorado, Samizdat press, CWP mines.
- Schleicher, J.; Costa, J. C. e Novais, A. (2008) A comparison of imaging conditions for wave-equation shot-profile migration, *Geophysics*, **73**(6):S219–S227.
- Schneider, W. A. (1978) Integral formulation for migration in two and three dimensions, *Geophysics*, **43**(1):49–76.
- Stoffa, P. L.; Fokkema, J. T.; de Luna Freire, R. M. e Kessinger, W. P. (1990) Split-step fourier migration, *Geophysics*, **55**(4):410–421.
- Stolt, R. H. e Benson, A. K. (1986) *Seismic Migration. Theory and Practice*, vol. 5 de *Handbook of Geophysical Exploration*, Geophysical Press, London.
- Thorbecke, J. W. (1997) *Common Focus Point*, Tese de Doutorado, Delft University of technology, Delft, Netherlands.
- Thorbecke, J. W.; Wapenaar, K. e Swinnen, G. (2004) Design of one-way wavefield extrapolation operators, using smooth functions in wlsq optimization, *Geophysics*, **69**(4):1037–1045.

- Zhang, J. e Wapenaar, C. (2002) Wavefield extrapolation and prestack depth migration in anelastic inhomogeneous media, *Geophysical Prospecting*, **50**(6):629–643.
- Zhang, J. e Wapenaar, D. V. C. (2001) Depth migration of shot records in heterogeneous, transversely isotropic media using optimum explicit operators, *Geophysical Prospecting*, **49**(3):287–299.
- Zhou, B. e Greenhalgh, S. A. (1992) Seismic scalar wave equation modeling by a convolutional differentiator, *Bulletin The Seismological Society of America*, **82**(1):289–303.