UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

MODELAGEM 3-D POROACÚSTICA EM RESERVATÓRIOS DE HIDROCARBONETOS UTILIZANDO A TEORIA DE BIOT

ALBERTO ALEXANDRO DE ANDRADE QUEIROZ

SALVADOR – BAHIA
SETEMBRO - 2001

Modelagem 3-D poroacústica em reservatórios de hidrocarbonetos utilizando a equação de Biot

por

ALBERTO ALEXANDRO DE ANDRADE QUEIROZ

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

DO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora

Dr. Marco B. Botelho - Orientador

Dr. Vicente Pinheiro Neto - Co-orientador

Dr. Reynam Pestana

Data da aprovação: 24 de setembro de 2001

RESUMO

A crescente demanda de petróleo e escassez de recursos, na forma de novos campos, obrigam as industrias de exploração de petróleo a investir cada vez mais em técnicas, que aumentam o conhecimento sobre campos já descobertos reduzindo os custos e os riscos exploratórios.

Uma das técnicas mais abrangentes para a simulação de propagação de ondas sísmicas em ambientes considerando os parâmetros petrofísicos da rocha reservatório tais como porosidade, densidade da matriz sólida e fluida, permeabilidade, viscosidade, tortuosidade entre outros, é a modelagem da equação de Biot (1956). Neste trabalho, é feita uma modelagem acústica em três dimensões para simular a propagação de onda em baixa frequência em um meio poroso e saturado por fluidos. Vale apena lembrar que na literatura científica somente encontra-se simulações de meios 2D o que foge muito a realidade tridimensional das armadilhas de petróleo A solução numérica das equações de Biot dada pelo operador de diferenças finitas feita através da expansão de Taylor, com aproximações de quarta ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para as derivadas temporais.

Os resultados das modelagens são mostrados em quatro modelos que representam ambientes de reservatório. O primeiro é usado para comprovar a existência da onda de segunda espécie (P-lenta) predita pela teoria de Biot (1956). O segundo é usado para verificar os tempos de trânsito das ondas compressionais de primeira e segunda espécie, através das aproximações das velocidades dadas por Biot (1956). Um terceiro modelo é usado para validar a solução da equação tridimensional de Biot a partir do operador de diferenças finitas. E, um último modelo é usado para simular uma armadilha de hidrocarbonetos composta de camadas de folhelho e arenito contendo gás, óleo e água. Através dos modelos, comprovou-se que tempos de trânsitos medidos nos sismogramas e "snapshots" estão de acordo com os tempos calculados analiticamente a pontos dos dados dos seguintes modelos.

Assim esse trabalho apresenta uma técnica de modelagem tridimensional em meio poro-acústico utilizando a equação de Biot (1956), que apresenta muitas vantagens na redução de custos e riscos se comparável aos riscos exploratórios feitos pela indústria de petróleo.

ABSTRACT

The increasing demand for oil and scarcity of resources compel the industries of oil to invest in new techniques to reduce the cost and the exploratory risk.

One of the most comprising techniques for the simulation of real geologic environments taking in account petrophysicals parameters of the reservoir rocks such as porosity, density of the solid and fluid array, permeability, viscosity, tortuosity among others, is the modeling of the Biot's equation (Biot, 1956). In this work, an acoustics modeling is done in three dimensions to simulate the wave propagation in low frequency in a fluid-saturated porous media. The numerical solution of the Biot's equations given by the finite difference operator, made through the Taylor's expansion with fourth-order approximation for the space derivatives and of second-order approximation for the time derivatives, showed more accurate results.

The results are shown in four models that represent reservoir environments. The first one is used to prove the existence of the second-specie wave (P-slow) predicted by the Biot's theory. The second is used to verify the traveltimes of the compressional waves of first and second species, through the approximative velocities, given by Biot (1956). The third model is used to validate the three-dimensional Biot's equation using the finite differences operator. Finally, the last model is used to simulate a trap of hydrocarbon consisting of layers of shale and sandstone comprising gas, oil and water. With this models it was possible to show that the traveltimes measured in the seismograms and snapshots are in accordance with the that one calculated using the real data of the models.

Thus this work presents a technique of three-dimensional modeling of saturated poroacoustic medium using the Biot's equation. This technique presents many advantages to reduce costs and risks if we compare to the exploratories risks of the oil industry.

ÍNDICE

RESUMO i

ABSTRACT ii

ÍNDICE iii

ÍNDICE DE FIGURAS v

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 Leis e conceitos básicos do meio poroso 3
1.1 Equação de Wyllie 3
1.2 Equação de Gassman 4

CAPÍTULO 2 Teoria de Biot 7
2.1 Relações de tensões em um sólido poroso contendo um fluido 8
2.2 Condições de contorno para o meio de Biot 12
2.3 Relações para o meio de Biot 12
2.4 Velocidades aproximativas para o meio de Biot 13

CAPÍTULO 3 Modelagem Numérica 15
3.1 Solução da equação de Biot por Diferenças finitas(Caso 2−D) 16
3.1.1 Solução das derivadas espaciais de segunda ordem e com aproximação de quarta ordem no espaço resolvida com o operador de diferenças finitas 17
3.2 Solução da equação de Biot por Diferenças finitas (Caso 3-D) 18
3.2.1 Solução das derivadas espaciais de segunda ordem e com aproximação de quarta ordem no espaço resolvida com o operador de diferenças finitas 19
3.3 Condição de Estabilidade do Método de Diferenças Finitas 21

CAPÍTULO 4 Modelagem Sísmica 24
4.1 Estudo da Fonte 24
4.1.1 Simulação de Fonte Explosiva 26
4.2 Bordas de absorção 26
4.3 Resultados 27
4.3.1 Modelo simulando o meio de Biot com a implementação de fonte pontual 27

4.3.2 Modelo simulando o meio de Biot com a implementação de fonte explosiva 28
4.3.3 Modelo simulando um ponto difrator e uma camada plano-paralela . 29
4.3.4 Modelo simulando uma armadilha contendo hidrocarbonetos 30

CAPÍTULO 5 Conclusões e recomendações 47

AGRADECIMENTOS 49

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 50

APÊNDICE A Obtenção do operador de diferenças finitas de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo 52
A.1 Solução do operador de diferenças finitas de segunda ordem com aproximação de segunda ordem 52
A.2 Solução do operador de diferenças finitas com derivadas de segunda ordem e aproximação de quarta ordem 53

APÊNDICE B Constantes elásticas 55

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1 Componentes de tensões nas faces do cubo 8

3.1 Gráfico de estabilidade representando o campo de velocidade(m/s) X tamanho da cela considerando uma aproximação $\Delta_x = \Delta_y \neq \Delta_z$ 23

4.1 (a) Função fonte. 25
4.2 (b) Espectro de freqüência da função fonte. 25
4.3 Geometria de modelagem: (a) Modelo geométrico do meio de Biot implementando uma fonte pontual; (b) Modelo geométrico do meio de Biot implementando uma fonte explosiva; (c) Modelo geométrico simulando um ponto difrator representado pelo cubo e uma camada plano-paralela. 32
4.4 Propagação da onda P1 e P2 (modelo1) mostrada nos seguintes tempos:(a) t=0.015s; (b) t=0.025s; (c) t=0.030s; (d) t=0.035s 33
4.5 Propagação da onda P1 e P2 (modelo2) mostrada nos seguintes tempos:(a) t=0.008s; (b) t=0.009s; (c) t=0.01s; (d) t=0.012s 34
4.6 Tempo de chegada das ondas de primeira espécie P1 em 0,01s e a de segunda espécie P2 em 0,03s para o segundo modelo. 35
4.7 (a) Snapshot em t=0.04s; (b) Snapshot em t=0.05s 36
4.8 Snapshot para t=0.06s 36
4.9 Simograma mostrando a difração do cubo bem como as reflexão na camada plano-paralela. 37
4.10 Modelo representando a geometria da trapa em 3D, a fonte e a geometria de aquisicão paralela e transversal a falha considerando dx=dy=1.60m e dz=1.59m e dt=0.25ms 38
4.11 Fatia no plano (Y,Z) na posição X=250m 39
4.12 Visão frontal do plano (Y,Z) na posição X=250m 39
4.13 Fatia no plano (X,Z) na posição Y=275m 40
4.14 Visão frontal do plano (X,Z) na posição Y=275m 40
4.15 Amostragem do campo de onda nos seguintes tempos:(a) t=0.03s; (b) t=0.06s; (c) t=0.09s; (d) t=0.12s 41
4.16 Fatias transversais a falha passando pelo plano (X,Z) na posicão Y=275m para os seguintes tempos (a) t=0.03s e (b) t=0.06s 42
4.17 Fatia transversal a falha passando pelo plano (X,Z) na posicão Y=275m para o tempo t=0.06s 42

4.18 Fatias transversais a falha passando pelo plano (Y,Z) na posicão X=250m para os tempos (a) t=0.03s e (b) t=0.06s 43
4.19 Fatia transversal a falha passando pelo plano (Y,Z) na posicão X=250m para o tempo t=0.06s 43
4.20 Fatia passando pelo plano Z na posicão 60m para o seguinte tempo t=0.09s . 44
4.21 Fatia passando pelo plano Z na posicão 80m para os seguinte tempo t=0.09s 44
4.22 Linha de sismograma perpendicular à falha na posição Y=250m 45
4.23 Linha de sismograma paralelo à falha na posição X=275m 46

INTRODUÇÃO

A cada dia a indústria petrolífera investe grandes recursos no estudo de técnicas de propagação de ondas sísmicas em ambientes geológicos, tendo em vista a crescente demanda de óleo e escassez de recursos. Dessa maneira, a caracterização dos reservatórios de hidrocarbonetos são de suma importância no desenvolvimento e produção nos campos de petróleo.

A caracterização envolve desde a delineação e descrição de estruturas geológicas associadas à deposição, à tectônica e à diagênese da rocha, até as variações nos parâmetros petrofísicos da rocha reservatório, bem como a saturação de fluidos.

A modelagem desses ambientes de forma mais realística só é possível quando se tem informações de porosidade, densidade e viscosidade dos fluidos, formato do grão e do arcabouço, do módulo de incompressibilidade e da permeabilidade, entre outros.

A modelagem numérica direta é uma ferramenta que tem um papel fundamental na interpretação de seções sísmicas. Através de modelos sintéticos e parâmetros petrofísicos de reservatório pré-definidos, pode-se determinar de forma mais segura as respostas sísmicas derivadas de ambientes geológicos reais encontrados na natureza, evitando assim um grande risco exploratório e reduzindo custos.

Os ambientes de reservatórios encontrados na natureza são bifásicos, devido a fase sólida (arcabouço), formada por grãos com propriedades químicas e mineralógicas diferentes e uma fase fluida composta por óleo e/ou água e/ou gás. A teoria de Biot (1956) explica a propagação da onda acústica em um meio poroso levando em consideração parâmetros de permeabilidade, densidade do fluido, viscosidade e movimento relativo gerado pela diferença de fase entre o sólido e o fluido.

Um dos primeiros trabalhos que mostra a solução da equação da onda pelo método das diferenças finitas foi dado por Alterman e Karal (1968). Já a utilização da técnica de diferenças finitas para a propagação em um meio acústico foi apresentado primeiramente por Alford, Kelly e Boore (1974). Biot (1956) estabeleceu a teoria de propagação de ondas para meios acústicos porosos e saturados, mostrando a existência da onda de segunda espécie devido ao acoplamento entre a parte sólida e fluida. Plona (1980) verificou experimentalmente a validade da teoria de Biot e constatou a propagação da onda de segunda espécie. Mais recentemente, Hassanzadeh (1991) aplicou a teoria de Biot, para a equação acústica da onda, na caracterização dos reservatórios porosos e saturados por um fluido. Pinheiro (1994) comparou a solução do operador de diferenças finitas para a equação da onda com

densidade constante, densidade variável e a equação de Biot em meios acústicos, porosos e saturados para o caso bidimensional.

As simulações numéricas feitas neste trabalho são extensões dos trabalhos de Hassanzadeh (1991) e Pinheiro (1994), utilizando a equação de Biot (1956) para um meio homogêneo em três dimensões em baixas freqüências. Os operadores de diferenças finitas foram definidos a partir da expansão de Taylor com aproximações de segunda ordem para as derivadas no tempo e de quarta ordem para derivadas no espaço.

As vantagens desta técnica é a possibilidade de criar modelos com uma geometria complexa que representem ambientes geológicos reais. Entretanto, o aumento da complexidade está proporcionalmente ligado ao custo computacional.

Os modelos geológicos estudados neste trabalho são:

- simulação de um meio com uma única camada com a finalidade de comprovar a existência da onda de segunda espécie;
- um meio com uma única camada, implementando uma função fonte explosiva dada por Thedy (1995). Com isto objetiva-se distribuir a fonte de maneira uniforme para reduzir a dispersão numérica da onda de segunda espécie, e comprovar a solução aproximativa dada por Biot (1956) para o calculo das velocidades V_{P1} e V_{P2};
- um meio com três camadas contendo uma rocha encaixante, uma camada plano-paralela e um ponto difrator. A geometria de aquisição deslocada lateralmente em relação ao ponto difrator, para que fosse possível comprovar a tridimensionalidade do algorítmo;
- uma estrutura geológica anticlinal, simulando uma armadilha de hidrocarbonetos contendo uma camada de arenito com gás capeada por um folhelho, uma camada de arenito com óleo, uma camada de arenito com água e um folhelho selante na base, além de uma falha normal e selante. Para o último modelo a geometria de aquisição é composta por sismogramas horizontais nas direções paralela e transversal à falha, "snapshots" e fatias nos planos X, Y, Z.

CAPÍTULO 1

Leis e conceitos básicos do meio poroso

Meios porosos saturados que descrevem reservatórios de óleo são chamados de meios bifásicos. Estes são caracterizados por terem uma fase sólida (matriz) e uma fase não sólida que pode ser prenchida por óleo, água ou gás.
A porosidade é uma propriedade fundamental das rochas que caracteriza a quantidade de intertícios vazios de um volume representativo do meio.

1.1 Equação de Wyllie

Usando-se discos de materiais sintéticos (lucita e aluminita) e amostras de sedimento de rochas Wyllie et al. (1956) propôs uma expressão empírica que seria utilizada mais tarde para a interpretação de perfis sônicos de poços, relacionado a velocidade compressional da onda na rocha como uma função do tempo médio de propagação.

A equação de Wyllie, Gregory e Gardner (1956) é dada por:

$$\Delta_{t_r} = \phi\Delta_{t_f} + (1-\phi)\Delta_{t_m} \quad . \tag{1.1}$$

Fazendo-se $\Delta_{t_r} = 1/V_r$, $\Delta_{t_f} = 1/V_f$, $\Delta_{t_m} = 1/V_m$, pode-se também expressá-la como:

$$\frac{1}{V_r} = \frac{\phi}{V_f} + \frac{(1-\phi)}{V_m} \quad , \tag{1.2}$$

onde

$$\begin{cases} \Delta_{t_r} = \text{tempo de trânsito na rocha,} \\ \Delta_{t_f} = \text{tempo de trânsito no fluido,} \\ \Delta_{t_m} = \text{tempo de trânsito na matriz,} \\ \phi = \text{porosidade da rocha,} \\ V_r = \text{Velocidade da onda na rocha,} \\ V_f = \text{Velocidade da onda no fluido,} \\ V_m = \text{Velocidade da onda na matriz} \end{cases}$$

Essa equação é válida para rochas limpas, com os poros uniformemente distribuídos.

1.2 Equação de Gassman

As rochas sedimentares podem ser representadas como um esqueleto sólido poroso e saturado por fluidos. Este esqueleto normalmente é constituído de partículas agregadas, compactadas e cimentadas, formando um arcabouço sólido com fluidos preenchendo os espaços vazios.

O trabalho de Gassman e Smit (1951) analisa a propagação de distúrbios elásticos em meios saturados descritos acima. E assume que essa estrutura é elástica, homogênea e isotrópica com porosidade ϕ, considerando que não há movimento relativo entre a parte sólida e a parte fluida no meio.

Assim a equação que relaciona as densidades do sólido e fluido com a porosidade é dada por :

$$\rho = \rho_s(1-\phi) + \rho_f\phi \quad , \tag{1.3}$$

onde

$$\begin{cases} \rho_s = \text{densidade do sólido,} \\ \rho_f = \text{densidade do fluido,} \\ \phi = \text{porosidade.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Gassman e Smit (1951) consideram um elemento de rocha saturado, sendo sujeito a um aumento de pressão Δp e a sua consequente variação de volume $\Delta V/V$. Assim o módulo de incompressibilidade do meio saturado é dado por:

$$k = \frac{\Delta P}{(\Delta V/V)} \tag{1.5}$$

A pressão atua diretamente sobre a parte sólida e fluida do material, isto é :

$$\Delta P = \Delta P_s + \Delta P_f \tag{1.6}$$

sendo ΔP_s e ΔP_f o incremento na parte sólida e fluida, respectivamente.

Segundo desenvolvimento feito por Pinheiro (1994), baseado em Gassman e Smit (1951), o movimento contínuo das partes sólida e líquida geram também variações nos volumes do sólido e fuido, ou seja:

$$\Delta V = \Delta V_s + \Delta V_f \tag{1.7}$$

Por definição a variação de volume no fluido depende da pressão aplicada ao mesmo é dado por:

$$\Delta V_f = \left[-\frac{\phi V \Delta P_f}{k_f} \right] \tag{1.8}$$

Onde ΔV_f é a variação de volume no fluido e o k_f é o módulo de incompressibilidade na matriz fluida.

Já a variação de volume no sólido depende tanto da variação de pressão do arcabouço sólido dada por:

$$\Delta V_a = \left[-\frac{V \Delta P_s}{k_s} \right] \tag{1.9}$$

como também da variação de pressão no fluido ((White, 1983)):

$$\Delta V_{af} = \left[-\frac{(1-\phi) V \Delta P_f}{k_s} \right] \tag{1.10}$$

Somando as equações (1.8, 1.9 e 1.10) obtemos:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left[-\frac{\phi}{k_f} + \frac{1-\phi}{k_s} \right] \Delta P_f - \left[\frac{1}{k_s} \right] \Delta P_s \tag{1.11}$$

Outra relação da variação de volume total leva em consideração a deformação do esqueleto em resposta a variação de pressão ao arcabouço sólido, gerando assim uma variação de volume dada por:

$$\Delta V_b = \left[-\frac{V \Delta P_o}{k_o} \right] \tag{1.12}$$

A outra maneira de se obter a variação total do elemento de volume $\frac{\Delta V}{V}$ relaciona o aumento de pressão do fluido e contração do esqueleto sólido como resposta, a fim de manter a pressão constante. Já que se há um aumento de pressão, as paredes do esqueleto devem mover-se gerando assim uma mudança de volume:

$$\Delta V_c = \left[-\frac{V \Delta P_f}{k_s} \right] \tag{1.13}$$

De maneira análoga, somando-se a eq. (1.12) e eq. (1.13) tem-se a variação total de volume dada por:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\Delta P_f \left[\frac{1}{k_s} \right] - \Delta P_s \left[\frac{1}{k_o} \right] \tag{1.14}$$

Resolvendo a eq. (1.11) e eq. (1.14) e substituindo na eq. (1.6) e eq. (1.5) obtem-se a equação de (Gassman e Smit, 1951) para a determinação do módulo de incompressibilidade de um meio poroso saturado por um fluido.

$$k = \frac{\phi \left[\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_f} \right] + \frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_o}}{\frac{\phi}{k_o} \left[\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_f} \right] + \frac{1}{k_s} \left[\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_o} \right]} \tag{1.15}$$

Biot (1941) introduziu dois parâmetros para os meios porosos saturados; o módulo de Biot (M), que expressa a variação de pressão hidráulica requerida para empurrar um determinado volume de fluido sobre o arcabouço, sem contudo modificar o seu volume e o coeficiente de Biot (B), cuja finalidade é medir a variação de um dado volume da formação, considerando um fluxo livre.

Para White (1983) o módulo de incompressibilidade do meio vazio é obtido através de experimentos em arenitos limpos é dado pela seguinte equação:

$$k_o = \frac{k_s}{(1 + 50\phi)} \tag{1.16}$$

Gassman e Smit (1951) relaciona também o módulo de volume da formação com o coeficiente de Biot (β), a fim de se obter o módulo de incompressibilidade do meio vazio.

$$k_o = k_s(1 - \beta). \tag{1.17}$$

E considerando a relação dada por Bourbie, Coussy e Zinszner (1987).

$$\frac{1}{M} = \frac{\beta - \phi}{k_s} + \frac{\phi}{k_f} \tag{1.18}$$

Para o arcabouço, segundo Gassman e Smit (1951) teremos

$$k = k_s(1 - \beta) + \beta^2 M. \tag{1.19}$$

Substituindo a eq. (1.17) na eq. (1.19) temos a relação entre o módulo de incompressibilidade do meio vazio (k_0) e o módulo de incompressiblidade do meio saturado (k), dado por:

$$k = k_o + \beta^2 M \tag{1.20}$$

CAPÍTULO 2

Teoria de Biot

A teoria de Biot (1956) estabelece a propagação de ondas em meios porosos, considerando a existência de um fluido compressível, efeitos de permeabilidade e fluxo relativo gerado pela diferença de fase entre o deslocamento da partículas sólidas e fluidas. Devido a essa diferença ele previu a existência de duas ondas compressionais. A compressional de primeira espécie também conhecida como "onda dilatacional a altas velocidades ($P-fast$)"; e a compressional de segunda espécie "onda dilatacional lenta ($P-slow$)" propagando a velocidades bem menores no fluido. A onda $P-fast$ corresponde ao movimento nas partes do sólido e fluido em fase, silimarmente a passagem de onda por um meio sólido não poroso. Entretanto, a onda tipo $P-slow$ corresponde ao movimento fora de fase entre o sólido e o fluido. Havendo portanto, neste caso, uma dissipação de energia através da difusão do fluido (Hassanzadeh, 1991), ou fenômeno de condução de calor quando a atenuação é muito alta (Biot, 1956).

Esta teoria assume algumas condições dadas por Zhu e MacMechan (1991).

i) O comprimento de onda é grande em comparação ao tamanho médio dos poros.

ii) O deslocamento da partícula associada ao movimento de onda sísmica é pequeno para ambas fase sólida e líquida.

iii) A fase líquida é contínua e os poros não conectados são tratados como parte solida, com uma correspondência a uma baixo efeito de densidade.

iv) A matriz sólida é elástica localmente homogênea e estatisticamente isotrópica.

v) O material é totalmente saturado.

vi) A freqüência é baixa para que o fluxo do fluido possa ser descrito pela Lei de Darcy.

vii) A força da gravidade e o efeito de espalhamento do campo da onda, devido aos poros individuais e os efeitos termoelásticos são negligenciados.

2.1 Relações de tensões em um sólido poroso contendo um fluido

Condiderando um certo elemento de volume cúbico unitário de um sistema sólido e fluido, podemos representar as tensões em cada face do cubo da seguinte forma (Biot, 1956).

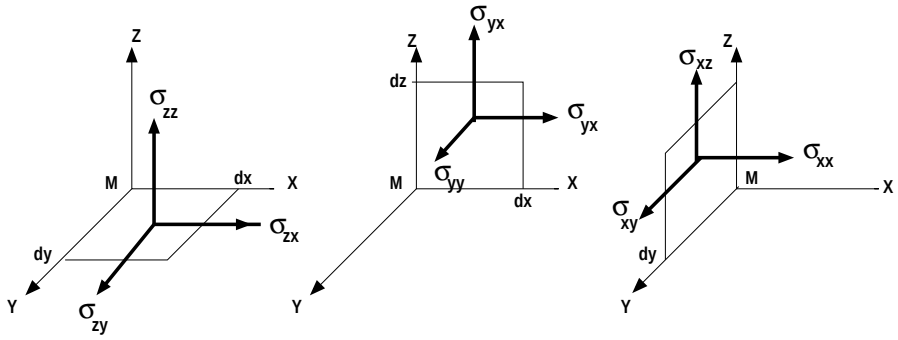


Figura 2.1: Componentes de tensões nas faces do cubo

onde o tensor de stress para parte sólida é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

e para a parte fluida sobre a cada face do cubo é dada por:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Considerando os vetores de deslocamento do sólido $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, os vetores de deslocamento no fluido $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ e seja a notação tensorial:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial j}, \tag{2.3}$$

onde u_i é uma componente do vetor deslocamento da partícula sólida na direção i, i e $j = x, y, z$.

Para pequenas deformações no sólido, podemos definir o tensor deformação como sendo:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2.4}$$

onde u_i é a componente do vetor deslocamento na direção i e $u_{i,j}$ é definido em 2.3. As deformações na parte fluida podem ser representadas na forma de:

$$\epsilon = (\nabla.U) \tag{2.5}$$

onde $(\nabla.)$ representa o divergente.

A energia portencial por unidade de volume do meio saturado é dado por (Biot, 1956).

$$2W = \sigma_{ij} e_{ij} + s\epsilon \tag{2.6}$$

onde

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\right) \tag{2.7}$$

$$s = \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon}\right) \tag{2.8}$$

As relações de tensões e deformações possuem uma matriz (7x7) e para um meio isotrópico tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2Ne_{xx} + Ae + Q\epsilon \\ \sigma_{yy} = 2Ne_{yy} + Ae + Q\epsilon \\ \sigma_{zz} = 2Ne_{zz} + Ae + Q\epsilon \\ \sigma_{xy} = 2Ne_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2Ne_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2Ne_{yz} \\ s = Q\epsilon + R\epsilon \end{cases} \tag{2.9}$$

Seja

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \tag{2.10}$$

Os coeficientes N e A correspondem aos coeficientes de Lamé, respectivamente a μ e λ, os coeficientes Q, R e P na eq. (2.9) podem ser expressos através de outras constantes elásticas eq. (B.1). O coeficiente R é a medida de pressão requerida para forçar um determinado volume de fluido sobre o agregado, enquanto o volume permanece constante, e Q representa o acoplamento entre a mudança de volume do sólido e o fluido (Biot, 1956).

Assim a energia cinética do meio de Biot, considerando u_i o deslocamento da parte sólida e U_i o deslocamento da parte fluida, pode ser expresso através de (Biot, 1956).

$$\begin{aligned} 2T &= \rho_{11}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] \\ &+ 2\rho_{12}\left[\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t}\frac{\partial U_z}{\partial t}\right] \\ &+ \rho_{22}\left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Essa expressão baseia-se na hipótese de uma material isotrópico, onde as direções de (x, y, z) são equivalentes e independentes.

Os coeficientes ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} são constantes inerciais, que consideram um fluxo relativo de fluido através dos poros para o caso não uniforme.

Estas constantes são definidas como:

$$\begin{cases} \rho_{11} = \rho_s(1-\phi) + \rho_f\phi(\tau - 1) \\ \rho_{12} = \rho_f\phi(1-\tau) \\ \rho_{22} = \rho_f\phi\tau \end{cases} \tag{2.12}$$

Como mostrado na eq. (2.11) a energia cinética depende das velocidades.

$$\dot{u_x}, \dot{u_y}, \dot{u_z}, \dot{U_x}, \dot{U_y}, \dot{U_z} \tag{2.13}$$

Assumindo um fluxo relativo ao sólido é do tipo de Poiseuille , fluxo laminar, ou seja, o número de Reynolds está abaixo do valor crítico e a função de freqüência de propagação não exceda a freqüência característica do fluido, pode-se determinar a função de dissipação. Levando-se em conta que não existe dissipação quando o movimento entre o sólido e o fluido é nulo, tem-se:

$$\dot{u_x} = \dot{U_x}, \dot{u_y} = \dot{U_y}, \dot{u_z} = \dot{U_z} \tag{2.14}$$

Assim a função de dissipação D é dada por:

$$2D = b\left[(\dot{u_i} - \dot{U_i})^2\right] \tag{2.15}$$

Onde o parâmetro b é o coeficiente de amortecimento dado por:

$$b = \frac{\eta\phi^2}{\kappa} \tag{2.16}$$

O coeficiente η é a viscosidade, ϕ a porosidade e κ é a permeabilidade do meio.

Assumindo o movimento restrito em uma das direções $i = (x, y, z)$, pode-se denotar q_i como a força total atuando no sólido por unidade de volume e Q_i a força total no fluido por unidade de volume (Biot, 1956).

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u_i}}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u_i}} &= q_i \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U_i}}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U_i}} &= Q_i \end{aligned} \tag{2.17}$$

Onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{11}\dot{u}_i + \rho_{12}\dot{U}_i\right) \\ \frac{\partial}{\partial_t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{12}\dot{u}_i + \rho_{22}\dot{U}_i\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como q_i é a força total agindo no sólido como descrito anteriormente pode-se escrever em função das direções (x, y, z), ou seja:

$$q_i = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial_z} \tag{2.19}$$

Ou na sua forma tensorial:

$$q_i = \sigma_{ij,j} \tag{2.20}$$

Onde $\sigma_{i,j}$ são definidos na eq. (2.9).

Em um processo semelhante ao decrito acima, pode-se definir Q_i como:

$$Q_i = \frac{\partial s}{\partial i} \tag{2.21}$$

Assim reescrevendo a eq. (2.17) de forma mais explícita tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{11}\dot{u}_i + \rho_{12}\dot{U}_i\right) + b\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - U_i\right) &= q_i \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{12}\dot{u}_i + \rho_{22}\dot{U}_i\right) - b\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - U_i\right) &= Q_i \end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora substituindo as eq. (2.20) e eq. (2.21) na eq. (2.22) tem-se:

$$\begin{aligned} \mu\nabla^2 u_i + \nabla[(A+N)e + Q\epsilon] &= \rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \\ \nabla[Qe + R\epsilon] &= \rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Onde (∇) é o gradiente, $(\nabla.)$ é o divergente e os coeficientes A e N são respectivamente λ e μ. Desmembrando a eq. (2.23) e fazendo $P = \lambda + \mu$, $(\nabla.u_i = e)$ e $(\nabla.U_i = \epsilon)$, onde u_i e U_i são vetores, temos agora a solução da equação de Biot para meios porosos e isotrópicos.

$$\begin{cases} \nabla^2(Pe + Q\epsilon) = \rho_{11}\ddot{e} + \rho_{12}\ddot{\epsilon} + b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \\ \nabla^2(Qe + R\epsilon) = \rho_{12}\ddot{e} + \rho_{22}\ddot{\epsilon} - b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \end{cases} \tag{2.24}$$

2.2 Condições de contorno para o meio de Biot

Devido a diferença de fase a equação apresentada por Biot (1956) prevê algumas condições de contorno entre dois meios fluidos e saturados. Esta diferença é devido a conectividade entre os poros, que podem variar consideravelmente em virtude da condição de fluxo na interface, e do arranjo dos mesmos nos diferentes meios. O fluxo na interface de acordo com a Lei de Darcy (Hassanzadeh, 1991) é dado por:

$$\dot{u}_n = -\Re_s \delta p \tag{2.25}$$

onde u_n é a componente normal da velocidade relativa entre parte sólida e a parte fluida, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ representa a derivada no tempo, ou seja a velocidade em relação ao sólido e fluido, δ_p representa uma variação de pressão através da interface (Hassanzadeh, 1991) e $\Re_s$ tem a dimensão de permeabilidade hidraúlica por unidade de comprimento, caracterizando assim a interconectividade entre dois meios porosos.

Portanto para $k_s \approx \infty$ (interface permeável) δ_p poderá ser zero, o que implica em uma pressão contínua através da interface. Entretanto, para $k_s = 0$ (interface não permeável), $\dot{u}_n = 0$ para o caso sem fluxo. Em geral a pressão do fluido pode ser descontínua através da interface. As condições de contorno apresentadas por Hassanzadeh (1991) são:

i) Para todos os casos de "interfaces abertas", ou seja, $\Re_s = \infty$, há uma pressão no fluido contínua através da interface.

ii) Continuidade de deslocamento macroscópico do sólido.

iii) Continuidade de pressão total do meio acústico na interface.

2.3 Relações para o meio de Biot

O trabalho de Gassman e Smit (1951) calcula a velocidade da onda P, não relacionando a existência de movimento entre o sólido e o fluido, e a qual valor de freqüência esse parâmetro foi calculado. A teoria de Biot mostra que, além dos parâmetros dados por Gassman e Smit (1951), pode-se definir a função de freqüência a partir da viscosidade do fluido (η) e da permeabilidade do meio (κ).

$$f_c = \frac{\eta\phi}{2\pi\kappa\rho_f} \tag{2.26}$$

Onde f_c é a freqüência de propagação característica. Para as frequências abaixo desta, o movimento do fluido se comporta como um arrasto viscoso contra o sólido, e para freqüências maiores a inércia do fluido é dominante.

O parâmetro da tortuosidade deve satisfazer à condição ($\tau \geq 1$) já que o mesmo relaciona não somente a porosidade mas também a geometria do meio onde esse fluxo ocorre

(Hassanzadeh, 1991). Assim Berryman1980 (1990) investigou o efeito da porosidade neste parâmetro e propôs a seguinte relação:

$$\tau = 1 - r\left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \tag{2.27}$$

Onde r representa o fator determinado pelo modelo microscópico do esqueleto sólido. Para este caso, o modelo sólido é representado por partículas esféricas ($r = 0.5$).

2.4 Velocidades aproximativas para o meio de Biot

Apenas para se ter uma estimativa do tempo de trânsito e condição de estabilidade da onda, as velocidades para o meio de Biot foram calculadas a partir de uma solução de ondas planas, sem o termo de atenuação (Biot, 1956):

Tomando a eq. (2.24) e definindo $H = P + 2Q + R$ e V_c a velocidade dada pela equação:

$$V_c = \sqrt{\frac{H}{\rho}} \tag{2.28}$$

E introduzindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{P}{H} \quad \sigma_{22} = \dfrac{R}{H} \quad \sigma_{12} = \dfrac{Q}{H} \\ \gamma_{11} = \dfrac{\rho_{11}}{\rho} \quad \gamma_{22} = \dfrac{\rho_{22}}{\rho} \quad \gamma_{12} = \dfrac{\rho_{12}}{\rho} \end{cases} \tag{2.29}$$

Assim, pode-se redefinir a eq. (2.24) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c^2} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

As soluções da equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$e = C_1{}^{i(lx+\alpha t)} \quad \epsilon = C_2{}^{i(lx+\alpha t)}$$

Onde a velocidade do campo de onda é dado por:

$$V = \frac{\alpha}{l} \tag{2.31}$$

E indroduzindo o valor de z tem-se:

$$z = \frac{V_c^2}{V^2} \tag{2.32}$$

Agora substituindo a eq. (2.31) na eq. (2.30) e considerando eq(2.32) obtem-se:

$$\begin{aligned} z(\sigma_{11}C_1 + \sigma_{12}C_2) &= \gamma_{11}C_1 + \gamma_{12}C_2 \\ z(\sigma_{12}C_1 + \sigma_{22}C_2) &= \gamma_{12}C_1 + \gamma_{22}C_2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Eliminando C_1 e C_2 da equação acima obtem-se uma equação de segundo grau dada por:

$$(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)z^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12})z + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) = 0 \tag{2.34}$$

Assim esta equação pode ter 2 raízes (z_1, z_2) correspodentes as duas velocidades de propagação Vp_{fast} e Vp_{slow}, que representam as velocidades de primeira espécie e segunda espécie, respectivamente:

$$Vp^2_{(fast)} = \frac{V_c^2}{z_1} \tag{2.35}$$

$$Vp^2_{(slow)} = \frac{V_c^2}{z_2} \tag{2.36}$$

CAPÍTULO 3

Modelagem Numérica

A equação dinâmica que governa a propagação de ondas dilatacionais em um meio homogêneo, poroso, isotrópico e saturado por um fluido é dada por (Biot, 1956):

$$\begin{aligned} \nabla^2 (Pe + Q\epsilon) &= \rho_{11}\ddot{e} + \rho_{12}\ddot{e} + b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \\ \nabla^2 (Qe + R\epsilon) &= \rho_{12}\ddot{e} + \rho_{22}\dot{\epsilon} - b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde e representa a dilatação do esqueleto sólido e ϵ a dilatação do fluido. Os parâmetros P, Q e R e as constantes ρ_{11}, ρ_{12} e ρ_{22} podem ser expressas na forma de outras constantes elásticas (Apêndice B).

Na forma matricial a equação de Biot é expressa por:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Multiplicando-a por:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.3}$$

temos agora a seguinte equação proposta por Hassanzadeh (1991)

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Sendo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho_{11}R - \rho_{12}Q)/T & (\rho_{12}R - \rho_{22}Q)/T \\ (\rho_{12}P - \rho_{11}Q)/T & (\rho_{22}P - \rho_{12}Q)/T \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b(R+Q))/T \\ (b(P+Q))/T \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Como

$$b = \frac{\eta.\Phi^2}{k} \tag{3.7}$$

e

$$T = PR - Q^2 > 0 \tag{3.8}$$

3.1 Solução da equação de Biot por Diferenças finitas(Caso 2−D)

Sendo a equação de Biot eq. (3.4) e definindo $e(x,z,t) = (m\Delta x, p\Delta z, k\Delta t)$, que representa o deslocamento da parte sólida no meio e $\epsilon(x,z,t) = (m\Delta x, p\Delta z, k\Delta t)$, representando o deslocamento da parte fluida. Podemos reescrever 3.4 na sua forma discreta:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^k_{m,p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^k_{m,p} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon^k_{m,p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon^k_{m,p} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Onde as derivadas de primeira ordem no tempo são:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} e^k_{m,p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^k_{m,p} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

E as derivadas segundas temporais:

$$\begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^k_{m,p} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^k_{m,p} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Onde abaixo estão representadas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem para as derivadas no tempo (ver equações (A.4) e (A.15)).

$$\frac{\partial}{\partial t} e^k_{m,p} = \frac{1}{2\Delta t} \left[e^{k+1}_{m,p} - e^{k-1}_{m,p} \right] \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon^k_{m,p} = \frac{1}{2\Delta t} \left[\epsilon^{k+1}_{m,p} - \epsilon^{k-1}_{m,p} \right] \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^k_{m,p} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[e^{k-1}_{m,p} - 2e^k_{m,p} + e^{k+1}_{m,p} \right] \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^k_{m,p} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\epsilon^{k-1}_{m,p} - 2\epsilon^k_{m,p} + \epsilon^{k+1}_{m,p} \right] \tag{3.15}$$

3.1.1 Solução das derivadas espaciais de segunda ordem e com aproximação de quarta ordem no espaço resolvida com o operador de diferenças finitas

Podemos obter através da expansão em serie de Taylor pela eq. (A.17) as soluções para:

Parte sólida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^k_{m,p} = \frac{1}{12(\Delta x)^2}\left[-e^k_{m-2,p} + 16e^k_{m-1,p} - 30e^k_{m,p} + 16e^k_{m+1,p} - e^k_{m+2,p}\right] \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^k_{m,p} = \frac{1}{12(\Delta z)^2}\left[-e^k_{m,p-2} + 16e^k_{m,p-1} - 30e^k_{m,p} + 16e^k_{m,p+1} - e^k_{m,p+2}\right] \tag{3.17}$$

Parte Fluida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon^k_{m,p} = \frac{1}{12(\Delta x)^2}\left[-\epsilon^k_{m-2,p} + 16\epsilon^k_{m-1,p} - 30\epsilon^k_{m,p} + 16\epsilon^k_{m+1,p} - \epsilon^k_{m+2,p}\right] \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon^k_{m,p} = \frac{1}{12(\Delta z)^2}\left[-\epsilon^k_{m,p-2} + 16\epsilon^k_{m,p-1} - 30e^k_{m,p} + 16\epsilon^k_{m,p+1} - \epsilon^k_{m,p+2}\right] \tag{3.19}$$

Agora substituindo todos os termos na eq. (3.4) teremos a solução do campo de onda no tempo $(t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[-e^k_{m-2,p} + 16e^k_{m-1,p} - 30e^k_{m,p} + 16e^k_{m+1,p} - e^k_{m+2,p}\right] \\ &+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[-e^k_{m,p-2} + 16e^k_{m,p-1} - 30e^k_{m,p} + 16e^k_{m,p+1} - e^k_{m,p+2}\right] \\ &+\frac{b_1\Delta t}{2}\left[e^{k-1}_{m,p} - \epsilon^{k-1}_{m,p}\right] + a_{11}\left[2e^k_{m,p} - e^{k-1}_{m,p}\right] + a_{12}\left[2\epsilon^k_{m,p} - \epsilon^{k-1}_{m,p}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[-\epsilon^k_{m-2,p} + 16\epsilon^k_{m-1,p} - 30\epsilon^k_{m,p} + 16\epsilon^k_{m+1,p} - \epsilon^k_{m+2,p}\right] \\ &+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[-\epsilon^k_{m,p-2} + 16\epsilon^k_{m,p-1} - 30\epsilon^k_{m,p} + 16\epsilon^k_{m,p+1} - \epsilon^k_{m,p+2}\right] \\ &+\frac{b_2\Delta t}{2}\left[e^{k-1}_{m,p} - \epsilon^{k-1}_{m,p}\right] + a_{21}\left[2e^k_{m,p} - e^{k-1}_{m,p}\right] + a_{22}\left[2\epsilon^k_{m,p} - \epsilon^{k-1}_{m,p}\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Onde

$$\left[a_{11} + \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + \left[a_{12} - \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_1 \tag{3.22}$$

$$\left[a_{22} + \frac{b_1 \Delta t}{2}\right] \left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + \left[a_{21} - \frac{b_1 \Delta t}{2}\right] \left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_2 \tag{3.23}$$

Reduzindo a eq. (3.22) e eq. (3.23).

$$w_{11} \left[e^{k+1}_{m,p}\right] + w_{12} \left[\epsilon^{k+1}_{m,p}\right] = W_1 \tag{3.24}$$

$$w_{21} \left[e^{k+1}_{m,p}\right] + w_{22} \left[\epsilon^{k+1}_{m,p}\right] = W_2 \tag{3.25}$$

Resolvendo as equações acima teremos a solução do deslocamento da parte sólida e fluida proposta por (Pinheiro e Botelho, 1996):

$$e^{k+1}_{m,p} = (w_{22} W_1 - w_{12} W_2)/\Delta \tag{3.26}$$

$$\epsilon^{k+1}_{m,p} = (w_{11} W_2 - w_{21} W_1)/\Delta \tag{3.27}$$

Onde o $\Delta = w_{11} w_{22} - w_{12} w_{21}$.

Seguindo a solução por diferenças finitas da equação de Biot (1956) apresentado por Pinheiro e Botelho (1996), iremos extender a sua solução por diferenças finitas para o caso 3D.

3.2 Solução da equação de Biot por Diferenças finitas (Caso 3-D)

Considerando agora um campo de onda 3D e sabendo que $e(x, y, z, t)$=$(m\Delta x, n\Delta y, p\Delta z, k\Delta t)$ representa o delocamento no sólido e $\epsilon(x, y, z, t)$=$(m\Delta x, n\Delta y, p\Delta z, k\Delta t)$ o delocamento no fluido. Pode-se reescrever a eq. (3.4) na seguinte forma matricial:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^k_{m,n,p} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^k_{m,n,p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^k_{m,n,p} \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon^k_{m,n,p} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon^k_{m,n,p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon^k_{m,n,p} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Onde as derivadas primeiras temporais são:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} e^k_{m,n,p} \\ \\ \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^k_{m,n,p} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

E as derivadas segundas temporais:

$$\begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^k_{m,n,p} \\ \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^k_{m,n,p} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Abaixo estão representadas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem (Caso 3-D) para as derivadas no tempo (ver equações (A.4) e (A.15)).

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{2\Delta t}\left[e^{k+1}_{m,n,p} - e^{k-1}_{m,n,p}\right] \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{2\Delta t}\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p} - \epsilon^{k-1}_{m,n,p}\right] \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[e^{k-1}_{m,n,p} - 2e^{k}_{m,n,p} + e^{k+1}_{m,n,p}\right] \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[\epsilon^{k-1}_{m,n,p} - 2\epsilon^{k}_{m,n,p} + \epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] \tag{3.34}$$

3.2.1 Solução das derivadas espaciais de segunda ordem e com aproximação de quarta ordem no espaço resolvida com o operador de diferenças finitas

Agora através da expanção em serie de Taylor para o (caso 3-D) pela eq. (A.17) as soluções para:

Parte sólida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta x)^2}\left[-e^{k}_{m-2,n,p} + 16e^{k}_{m-1,n,p} - 30e^{k}_{m,n,p} + 16e^{k}_{m+1,n,p} - e^{k}_{m+2,n,p}\right] \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta y)^2}\left[-e^{k}_{m,n-2,p} + 16e^{k}_{m,n-1,p} - 30e^{k}_{m,n,p} + 16e^{k}_{m,n+1,p} - e^{k}_{m,n+2,p}\right] \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta z)^2}\left[-e^{k}_{m,n,p-2} + 16e^{k}_{m,n,p-1} - 30e^{k}_{m,n,p} + 16e^{k}_{m,n,p+1} - e^{k}_{m,n,p+2}\right] \tag{3.37}$$

Parte Fluida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta x)^2}\left[-\epsilon^{k}_{m-2,n,p} + 16\epsilon^{k}_{m-1,n,p} - 30\epsilon^{k}_{m,n,p} + 16\epsilon^{k}_{m+1,n,p} - \epsilon^{k}_{m+2,n,p}\right] \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon^{k}_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta y)^2}\left[-\epsilon^{k}_{m,n-2,p} + 16\epsilon^{k}_{m,n-1,p} - 30\epsilon^{k}_{m,n,p} + 16\epsilon^{k}_{m,n+1,p} - \epsilon^{k}_{m,n+2,p}\right] \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\epsilon^k_{m,n,p} = \frac{1}{12(\Delta z)^2}\left[-\epsilon^k_{m,n,p-2} + 16\epsilon^k_{m,n,p-1} - 30e^k_{m,n,p} + 16\epsilon^k_{m,n,p+1} - \epsilon^k_{m,n,p+2}\right] \tag{3.40}$$

Substituimos todos os termos na eq. (3.4) temos:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[-e^k_{m-2,n,p} + 16e^k_{m-1,n,p} - 30e^k_{m,n,p} + 16e^k_{m+1,n,p} - e^k_{m+2,n,p}\right] \\ &\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2\left[-e^k_{m,n-2,p} + 16e^k_{m,n-1,p} - 30e^k_{m,n,p} + 16e^k_{m,n+1,p} - e^k_{m,n+2,p}\right] \\ &+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[-e^k_{m,n,p-2} + 16e^k_{m,n,p-1} - 30e^k_{m,n,p} + 16e^k_{m,n,p+1} - e^k_{m,n,p+2}\right] \\ &+\frac{b_1\Delta t}{2}\left[e^{k-1}_{m,n,p} - \epsilon^{k-1}_{m,n,p}\right] + a_{11}\left[2e^k_{m,n,p} - e^{k-1}_{m,n,p}\right] + a_{12}\left[2\epsilon^k_{m,n,p} - \epsilon^{k-1}_{m,n,p}\right] \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[-\epsilon^k_{m-2,n,p} + 16\epsilon^k_{m-1,n,p} - 30\epsilon^k_{m,n,p} + 16\epsilon^k_{m+1,n,p} - \epsilon^k_{m+2,n,p}\right] \\ &\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2\left[-\epsilon^k_{m,n-2,p} + 16\epsilon^k_{m,n-1,p} - 30\epsilon^k_{m,n,p} + 16\epsilon^k_{m,n+1,p} - \epsilon^k_{m,n+2,p}\right] \\ &+\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[-\epsilon^k_{m,n,p-2} + 16\epsilon^k_{m,n,p-1} - 30\epsilon^k_{m,n,p} + 16\epsilon^k_{m,n,p+1} - \epsilon^k_{m,n,p+2}\right] \\ &+\frac{b_2\Delta t}{2}\left[e^{k-1}_{m,n,p} - \epsilon^{k-1}_{m,n,p}\right] + a_{21}\left[2e^k_{m,n,p} - e^{k-1}_{m,n,p}\right] + a_{22}\left[2\epsilon^k_{m,n,p} - \epsilon^{k-1}_{m,n,p}\right] \end{aligned} \tag{3.42}$$

Onde

$$\left[a_{11} + \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + \left[a_{12} - \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_1 \tag{3.43}$$

$$\left[a_{22} + \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + \left[a_{21} - \frac{b_1\Delta t}{2}\right]\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_2 \tag{3.44}$$

Reduzindo a equação acima.

$$w_{11}\left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + w_{12}\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_1 \tag{3.45}$$

$$w_{21}\left[e^{k+1}_{m,n,p}\right] + w_{22}\left[\epsilon^{k+1}_{m,n,p}\right] = W_1 \tag{3.46}$$

Resolvendo as equações acima teremos a solução do deslocamento da parte sólida e fluida para o caso 3-D, dado por:

$$e^{k+1}_{m,n,p} = (w_{22}W_1 - w_{12}W_2)/\Delta \tag{3.47}$$

$$\epsilon^{k+1}_{m,n,p} = (w_{11}W_2 - w_{21}W_1)/\Delta \tag{3.48}$$

Onde $\Delta = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}$.

3.3 Condição de Estabilidade do Método de Diferenças Finitas

O estudo da condição de estabilidade para o método de diferenças finitas passa por Alford, Kelly e Boore (1974), onde foram estudados os limites de estabilidade para o caso de uma malha quadrada de pontos, ou seja ($\Delta x = \Delta z$). Já Faria (1986) obteve matematicamente condições de limite de estabilidade para uma malha retangular ($\Delta x \neq \Delta z$) para o caso bidimensional. Nesta formulação será transcrito o limite de estabilidade proposto por Almeida (1996), onde a malha agora tem forma de paralelepípedo, ($\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z$). O campo $U(x, y, z, t)$ pode ser representado no domínio da freqüência da seguinte forma:

$$U(x, y, z, t) = \beta^t e^{-i(k_x x - k_y y - k_z z)} \tag{3.49}$$

Sendo sua forma discreta:

$$U^l_{p,m,n} = \beta^t e^{-i(k_x p\Delta x - k_y m\Delta y - k_z n\Delta z)} \tag{3.50}$$

Tendo em vista a solução da equação da onda com densidade constante, sob diferenças finitas de quarta ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para as derivadas no tempo.

$$\begin{aligned} U^{k+1}_{m,n,p} &= 2U^k_{m,n,p} - U^{k-1}_{m,n,p} - [A_x + A_y + A_z]2.5U^k_{m,n,p} + \\ &+ \frac{A_x}{12}[-U^k_{m-2,n,p} + 16U^k_{m-1,n,p} + 16U^k_{m+1,n,p} - U^k_{m+2,n,p}] + \\ &+ \frac{A_y}{12}[-U^k_{m,n-2,p} + 16U^k_{m,n-1,p} + 16U^k_{m,n+1,p} - U^k_{m,n+2,p}] + \\ &+ \frac{A_z}{12}[-U^k_{m,n,p-2} + 16U^k_{m,n,p-1} + 16U^k_{m,n,p+1} - U^k_{m,n,p+2}] \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} A_x &= \left(\frac{v(x,y,z)\Delta_t}{\Delta_x}\right)^2, \\ A_y &= \left(\frac{v(x,y,z)\Delta_t}{\Delta_y}\right)^2, \\ A_z &= \left(\frac{v(x,y,z)\Delta_t}{\Delta_z}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde Δ_x, Δ_y, Δ_z correspondem ao tamanho da cela em metros e Δ_t a taxa de amostagem.

Substituindo a eq. (3.50) na eq. (3.51)e dividindo toda a espressão por $\beta^{l-1} e^{-i(k_x p\Delta x - k_y m\Delta y - k_z n\Delta z)}$, obtem-se uma equação do tipo:

$$\beta^2 - 2R\beta + 1 = 0 \tag{3.53}$$

Como A_x, A_y, A_z são valores positivos e reais, têm-se que $R \leq 1$. As soluções da eq. (3.53) são:

$$\beta_1 = \sqrt{R + (R^2 - 1)} \quad e \quad \beta_2 = \sqrt{R - (R^2 - 1)} \tag{3.54}$$

A condição de estabilidade é dada por $|\beta| \leq 1$, como θ, ψ e α são reais e $|R| \leq 1$, quando $R < -1$ implica que $|\beta| \geq 1$, tornando o processo instável, assim R deve ser:

$$-1 \leq R \leq 1, \quad ou, \quad R^2 \leq 1 \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} R = 1 \quad &+ \quad \frac{A_x}{24}(-64\sin^2\theta + 4\sin^2 2\theta) + \frac{A_y}{24}(-64\sin^2\psi + 4\sin^2 2\psi) \\ &+ \quad \frac{A_z}{24}(-64\sin^2\alpha + 4\sin^2 2\alpha). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Sendo a condição de estabilidade da eq(3.55) válida, teremos que;

$$\begin{aligned} &\frac{A_x}{24}(-64\sin^2\theta + 4\sin^2 2\theta) + \frac{A_y}{24}(-64\sin^2\psi + 4\sin^2 2\psi) + \\ &\frac{A_z}{24}(-64\sin^2\alpha + 4\sin^2 2\alpha) \geq -2 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Substituindo A_x por $A_z\left(\frac{\Delta_z}{\Delta_x}\right)^2$, A_y por $A_z\left(\frac{\Delta_z}{\Delta_y}\right)^2$ e multiplicando eq(3.57) por (-1) temos:

$$A_z \leq \frac{1}{12}\left[(16\sin^2\theta - \sin^2 2\theta)\left(\frac{\Delta_z}{\Delta_x}\right)^2 + (16\sin^2\psi - \sin^2 2\psi)\left(\frac{\Delta_z}{\Delta_y}\right)^2 + (16\sin^2\alpha - \sin^2 2\alpha)\right] \tag{3.58}$$

Assim o seu valor máximo para A_z quando $\theta = \psi = \alpha = \frac{\pi}{2}$, simplificando e rearrumando a eq(3.58) temos:

$$A_z \leq \frac{12}{\left[\left(\frac{\Delta_z}{\Delta_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_z}{\Delta_y}\right)^2 + 1\right]16} \tag{3.59}$$

ou

$$A_x + A_y + A_z \leq \frac{3}{4} \tag{3.60}$$

Assim a inequação que mostra a condição de estabilidade da onda para aproximações por diferenças finitas com operadores de quarta ordem para derivadas espaciais e segunda ordem para derivadas temporais. E substituindo as eq. (3.60), eq. (3.52) na eq. (3.59) teremos a solução:

$$\Delta_t \leq \frac{\left[\frac{1}{(\Delta_x)^2} + \frac{1}{(\Delta_y)^2} + \frac{1}{(\Delta_z)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}}{v(x,y,z)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{3.61}$$

Considerando a função dada acima, pode-se representar o gráfico de estabilidade *versus* tamanho da cela (Figura 3.3):

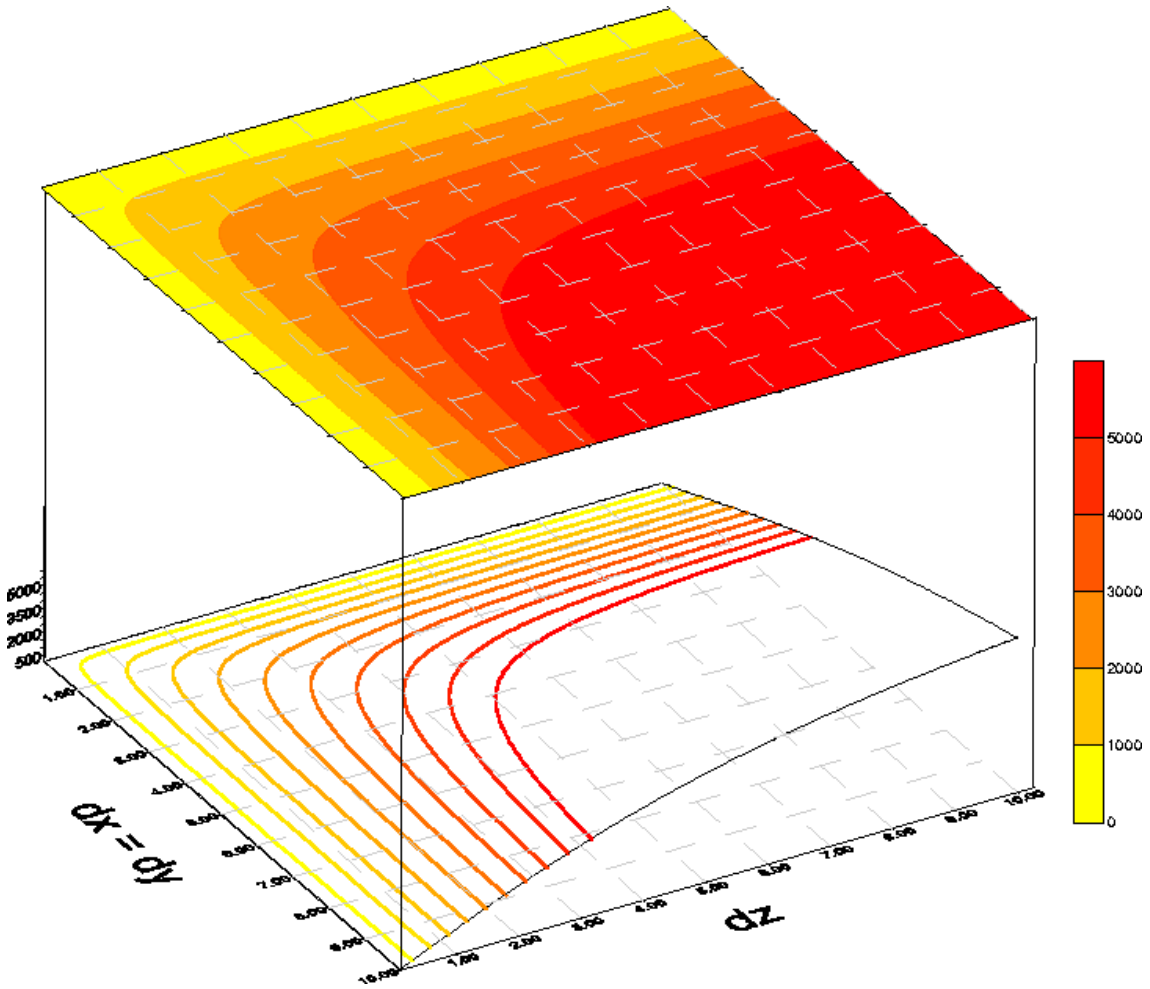


Figura 3.1: Gráfico de estabilidade representando o campo de velocidade(m/s) X tamanho da cela considerando uma aproximação $\Delta_x = \Delta_y \neq \Delta_z$

CAPÍTULO 4

Modelagem Sísmica

4.1 Estudo da Fonte

A fonte utilizada para a modelagem de Biot, na propagação de meios saturados porosos, foi a derivada da Gaussiana, por apresentar características de estabilidade para a modelagem em diferenças finitas. Esta fonte de acordo do Kelly, Ward, Treitel e Alford (1976) é dada pela seguinte expressão no tempo:

$$f(t) = (T + f_s - t)\, e^{-[2\pi f(T+f_s-t)/1,25]^2} \tag{4.1}$$

Sendo f a freqüência dominante da propagação, T o período da função fonte e f_s a fase do sinal, ou seja o quanto o eixo de simetria está deslocado da origem.

A (Figura 4.1) mostra a função fonte para uma taxa de amostragem $\Delta_t = 0,25ms$, sendo que no programa tomamos a metade do número de pontos da função fonte para a inserção da mesma no meio, pois o operador de diferenças finitas se encarrega de projetar a parte negativa da fonte nas 3 direções.

O número de pontos da função fonte foi de 18 pontos, suficiente para uma boa amostragem e eliminação de possíveis reverberações.

A Figura (4.2) mostra o espectro de frequência, calculado através da transformada discreta de Fourier. A frequência dominante é de 104Hz para uma taxa de amostragem de $\Delta_t = 0,25ms$.

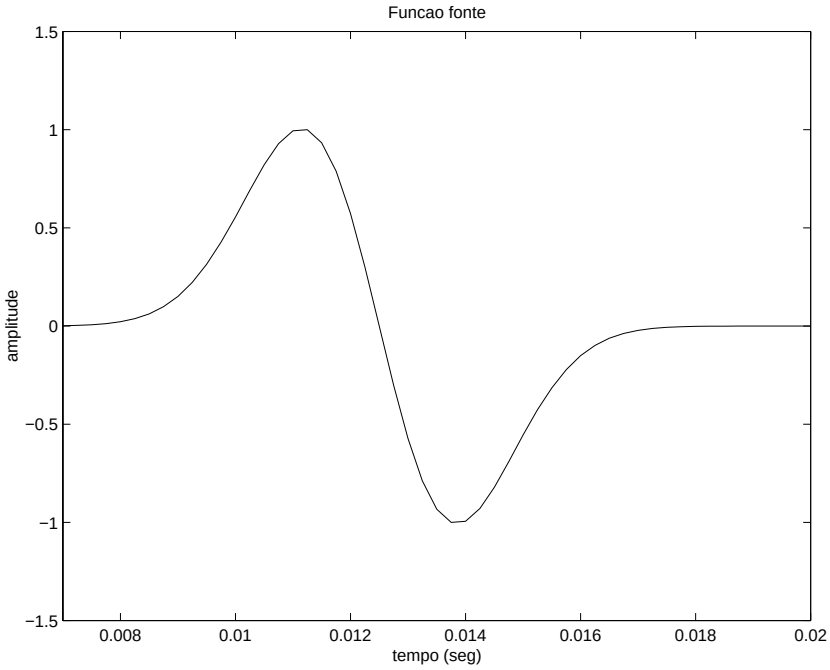


Figura 4.1: (a) Função fonte.

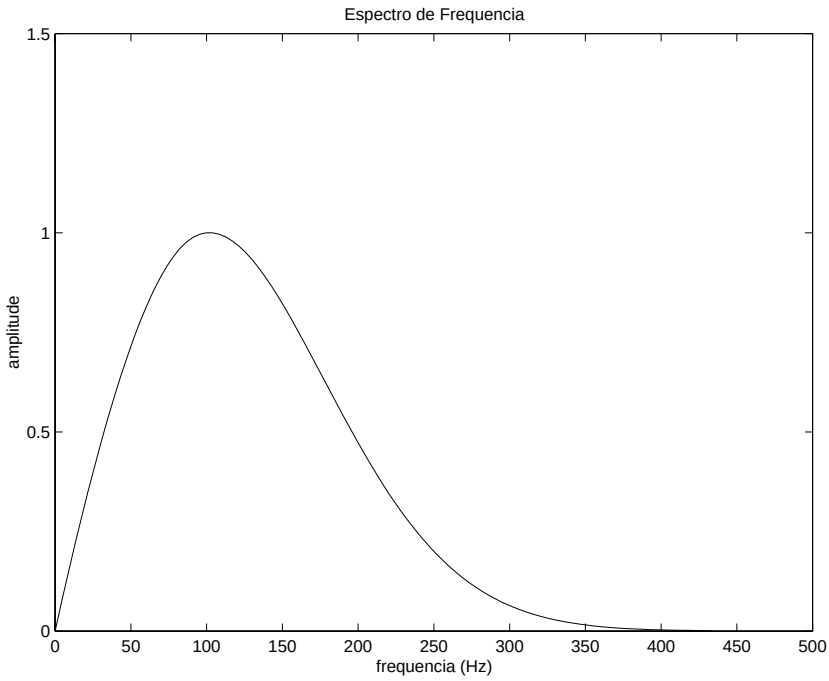


Figura 4.2: (b) Espectro de freqüência da função fonte.

4.1.1 Simulação de Fonte Explosiva

Nas modelagens em meios elásticos a fonte fica melhor distribuída no meio se a mesma apresentar uma simetria radial, ou seja, a inserção da fonte está atrelada a utilização de uma função cuja a finalidade é proporcionar um espalhamento uniforme do campo de pertubação com a distância ao centro da fonte. Esta função também se mostrou eficiente no caso acústico 3D, evitando dispersão numérica após a passagem da onda.

A função que controla o espalhamento é dada por Thedy (1995):

$$w_d = e^{\left(\frac{d^2 \log(0.25)}{r^2}\right)} \tag{4.2}$$

Onde w_d é o peso a ser atribuído à função fonte, d é distância do ponto da malha a fonte, e r é o raio de aplicação da fonte.

A função fonte deve ser escolhida criteriosamente, já que antes de sua inserção não há propagação até a distância do raio de aplicação.

4.2 Bordas de absorção

Um dos grandes problemas no método de modelagem é a dificuldade de se determinar de forma eficaz os limites das bordas de absorção no modelo 3-D em suas diversas direções. Esta zona delimitada tem a função de amortecer suavemente a passagem da frente de onda, sem contudo permitir o retorno de reflexões das bordas do modelo, simulando assim um meio infinito de propagação. A função utilizada no algoritmo é dado pela seguinte função:

$$f_{b_i} = 1 - \frac{\eta_i(1 - C_b)}{\eta_b} \tag{4.3}$$

Onde f_{b_i} é a função da borda de atenuação do *i-ésimo* ponto de absorção no qual o campo de onda deverá ser multiplicado; η_i é o *i-ésimo* ponto da zona de absorção; η_b é o número total de pontos da zona de absorção e o C_b é o fator de amortecimento inicial.

4.3 Resultados

Para realizar este trabalho foram elaborados 4 (quatro) modelos com a finalidade de comprovar a tridimensionalidade do algoritmo bem como a existência da onda de segunda espécie ou onda P lenta prevista pela teoria de Biot (1956), e finalmente modelar um ambiente de reservatório (*traps*) associados a uma armadilha 3D real reais contendo hidrocarbonetos. Os dados que serão mostrados nas seções a seguir obedecem a seguinte legenda.

k_s: Módulo de incompressibilidade do sólido;
k_f: Módulo de incompressibilidade do fluido;
μ: Módulo de rigidez do sólido;
ρ_s: Densidade da matriz sólida;
ρ_f: Densidade da matriz fluida;
ϕ: Porosidade do meio;
κ: Permeabilidade do meio;
η: Viscosidade do fluido;
k_o: Módulo de incompressibilidade do meio vazio;
k: Módulo de incompressibilidade do meio saturado;
ρ: Densidade média do meio saturado;
f_c: Freqüência crítica;
τ: Tortuosidade;
V_{p1}: Velocidade da onda compressional de primeira espécie;
V_{p2}: Velocidade da onda compressional de segunda espécie;

4.3.1 Modelo simulando o meio de Biot com a implementação de fonte pontual

O primeiro modelo (Figura 4.3a) simulando um único meio, tem a finalidade de provar a existência da onda P de segunda espécie, pela teoria de Biot. A descrição do meio é feita através dos parâmetros petrofísicos, dados pela tabela I. Na Figura 4.4(a), (b) (c) e (d) são mostrados os "snaphots" correspondentes aos tempos: $t_{(a)} = 0.0015s$, $t_{(b)} = 0.0025s$, $t_{(c)} = 0.030s$, $t_{(d)} = 0.0035s$.

Podemos observar na Figura (4.4) uma primeira frente de onda representada pela propagação da onda de primeira espécie ($P -$ rápida) e uma segunda que representa a propagação da onda de segunda espécie ($P - lenta$). É possível notar uma forte dispersão numérica, após a passagem da onda de segunda espécie. Isso decorre do fato de que a velocidade da onda Vp de primeira espécie, que foi utilizada para o cálculo do tamanho da cela, é da ordem de 4 vezes maior o valor da velocidade da onda Vp de segunda espécie, assim tornando inevitável

a má amostragem da onda P lenta.

Para evitar essa dispersão numérica na passagem da onda de segunda espécie foi implementada uma função fonte dada por Thedy (1995), que tem a finalidade de distribuir a fonte de maneira uniforme e suave em um certo volume.

Os parâmetros petrofísicos utilizados neste primeiro modelo são mostrados na tabela abaixo.

Tabela I								**Dados do modelo 1**
	k_s	k_f	μ	ρ_s	ρ_f	κ	η	ϕ
camada	N/m^2			kg/m^3		mD	cP	%
1	15×10^9	$2,2 \times 10^9$	8×10^9	2650	1000	400	0,01	15

Suas velocidades são calculadas através das eq. (2.35) e o valor de viscosidade é tomado muito baixo ($\eta = 0.01cP$), para que fosse possível o apareciento da onda de segunda espécie (V_{p_2}), como mostrado na tabela abaixo:

Tabela II							**Parâmetros do modelo 1**
	k_o	k	f_c	τ	ρ_o	V_{p_1}	V_{p_2}
camada	N/m^2		Hz	-	kg/m^3	m/s	m/s
1	$1,8 \times 10^9$	$8,4 \times 10^9$	$1,2 \times 10^5$	3,83	2402,5	2818,6	470,6

Em um teste posterior será mostrada a implementação da função da fonte explosiva com a finalidade de reduzir a dispersão numérica causada pela passagem da onda P lenta.

4.3.2 Modelo simulando o meio de Biot com a implementação de fonte explosiva

Em um modelo de uma unica camada, Figura (4.3b), usado para propagar a onda transmitida na direção vertical, simulando assim um registro poço a poço, agora empregando uma fonte dita explosiva, simulando um espalhamento uniforme da fonte com a finalidade de evitar a dispersão numérica. O principal objetivo é verificar o tempo de chegada das ondas de primeira e segunda espécies mostrada na Figura (4.6), e confirmar a validade da implementação numérica da eq. (2.35) dada por Biot, que prevê os citados eventos.

Como pode-se ver nos snapshots, Figura (4.5), a dispersão numérica da onda P2 foi extremamente reduzida com a implementação da função da fonte explosiva citada por Thedy (1995).

Para essa simulação as dimensões do modelo são (50,50,50) nas direções (x,y,z), respectivamente. A fonte está localizada nas posição F(25,25,0) e a linha de receptores em R(x,y=25,z=25) e os parâmetros petrofísicos são dados na tabela III.

Os dados para este modelo estão na tabela abaixo:

Tabela III							**Dados do modelo 2**
	k_o	k	f_c	τ	ρ_o	V_{p_1}	V_{p_2}
camada	N/m^2		Hz	-	kg/m^3	m/s	m/s
1	$0,81 \times 10^9$	$8,9 \times 10^9$	$1,2 \times 10^3$	2,17	2050	2980,2	871,1

Tabela IV								**Parâmetros do modelo 2**
	k_s	k_f	μ	ρ_s	ρ_f	κ	η	ϕ
camada	N/m^2			kg/m^3		mD	cP	%
1	13×10^9	$5,0 \times 10^9$	7×10^9	2500	1000	400	0,01	30

4.3.3 Modelo simulando um ponto difrator e uma camada plano-paralela

O modelo apresentado na Figura (4.3c) representa três meios com parâmetros petrofísicos diferente, onde o meio 1 representa a rocha encaixante com velocidade $V_{P1} = 2784,6m/s$, o meio 2 com velocidade $V_{P1} = 499,4m/s$, representa um corpo heterogêneo de dimensões muito menores que o comprimento de onda ($\lambda \approx 3L$) e o meio 3 representa um substrato, cujo o topo é paralelo e apresenta uma velocidade $V_{P1} = 3141,3m/s$.

Para demostrar a tridimensionalidade das equações de propagação da onda baseadas na equação de Biot (1956) implementada numericamente, deduzidas neste trabalho, no capítulo 3, foi criada uma geometria de aquisição de tal forma que não houvesse a possibilidade de se obter quaisquer resultado seja reflexões ou difrações, provenientes de heterogeniedades situadas fora de um plano de aquisição. Assim, o arranjo de aquisição está deslocado lateralmente do corpo heterogêneo, a fonte está posicionada em F(100,50,0) e os geofones espalhados ao longo do eixo X, G(X,Y=50,Z=0). O snapshots são mostrados nas Figura (4.7 e 4.8) (a),(b) e (c) correspondendo aos tempos $t_a = 0,04s$, $t_b = 0,05s$, $t_c = 0,06s$, repectivamente.

Observa-se, inicialmente, para o primeiro snapshot, Figura (4.7a), a resposta à passagem da onda pelo cubo, onde pode-se vislumbrar círculo correspondente a interseção do plano Z=0 com a esfera de difração gerada a partir da passagem da frente de onda P, pelo corpo heterogêneo. Na Figura (4.7b), a propagação da difração do cubo no meio encaixante a um tempo maior $t = 0,05s$; e na Figura (4.8c) a resposta conjunta da difração ocorrida pela passagem da onda pelo cubo e a reflexão no topo da camada plano-paralela localizada a uma profundidade de 110m.

O sismograma mostrado na Figura (4.9) foi registrado na configuração mostrada na Figura (4.3c) . O tempo de chegada da difração ($t = 0,037s$) causada pelo cubo bem como a reflexão da camada plano-paralela ($t = 0,08s$), validando assim a tridimensionalidade do algoritmo.

4.3.4 Modelo simulando uma armadilha contendo hidrocarbonetos

O modelo apresentado nas Figuras (4.10 a 4.14) simula a armadilha com 5 camadas, contendo hidrocarbonetos (gás ou óleo) e água, selados por uma camada de folhelho, cuja a base é representada por um refletor curvo e uma falha normal e selante.

A geometria de aquisição é mostrada na Figura (4.10) com a fonte localizada na posição F(275,250,0) e linhas de receptores sendo localizadas paralelamente e transversalmente a falha.

Os parâmetros petrofísicos descrito do reservatório e rocha selante são dados pelas tabelas V e VI a seguir:

Tabela V **Dados do modelo 4**

	k_s	k_f	μ	ρ_s	ρ_f	κ	η	ϕ
camada	N/m^2			kg/m^3		mD	cP	%
1	$12,5 \times 10^9$	3×10^9	7×10^9	2650	400	500	0,02	25
2	$12,5 \times 10^9$	5×10^9	7×10^9	2650	800	500	100	25
3	$12,5 \times 10^9$	7×10^9	7×10^9	2650	1000	500	1	25
4	14×10^9	7×10^9	8×10^9	2415	1000	1	1	2
5	13×10^9	3×10^9	8×10^9	2600	1000	1	1	2

Tabela VI **Parâmetros do modelo 4**

	k_o	k	f_c	τ	ρ	V_{p_1}
camada	N/m^2		Hz	-	kg/m^3	m/s
1	$0,9 \times 10^9$	$7,2 \times 10^9$	$4,0 \times 10^3$	2,5	2087,5	2852
2	$0,9 \times 10^9$	$9,2 \times 10^9$	$9,9 \times 10^6$	2,5	2187,5	2913,8
3	$0,9 \times 10^9$	10×10^9	$8,0 \times 10^4$	2,5	2237,5	2977,4
4	$7,0 \times 10^9$	14×10^9	$3,2 \times 10^6$	25,5	2386,7	3197,3
5	$6,5 \times 10^9$	12×10^9	$3,2 \times 10^6$	25,5	2568	2986,4

As Figuras (4.11 e 4.12) ilustram melhor o modelo geológico com suas repectivas camadas. Vale ressaltar que os números contidos nas figuras representam as camadas: (5) camada de folhelho representando um meio selante; (1) camada de arenito contendo gás; (2) camada de arenito contendo óleo; (3) camada de arenito com água e (4) camada de folhelho selante.

A Figura (4.15) mostra os snapshots para os tempos $t = 0.03s$, $t = 0.06s$, $t = 0.09s$ e $t = 0.12s$ no modelo da trapa de dimensões (400x400x400) nas direções x, y e z. Pode-se notar a reflexão seguida de difração causada pelo topo da camada de arenito contendo gás, observada a partir do snapshot na face superior da Figura (4.15c e d).

Para facilitar a visualização do modelo foram retirados fatias transversais ao plano de falha

e paralelos a esta, mostradas nas Figura s(4.11 e 4.13). As suas repectivas visões frontais são mostradas nas Figuras (4.12 e 4.14).

As figuras(4.16 e 4.17) mostram a propagação da onda pelo meio de onde pode-se ver difrações e reflexões geradas como resposta à passagem da onda pelas interfaces do modelo.

Em uma primeira análise, nas figuras citadas acima, obtivemos do cubo de dados Figura (4.15), as fatias transversais à falha passando pelo plano Y na posição 275m, mostradas nas Figuras (4.16 e 4.17), convenientemente localizadas na fonte, para os tempos $t = 0,03s$, $t = 0,06s$ e $t = 0,09s$ respectivamente.

Na Figura (4.16b) podemos vislumbar a reflexão seguida de uma difração causada no flanco da falha entre a camada de folhelho (5) e a camada de arenito com gás (2), seguida de uma reflexão entre a camada de arenito com gás (1) e arenito com óleo (2), além de uma série de difrações e reflexões geradas entre as camadas de arenito com gás (1) e arenito com óleo (2) à direita da falha. Na Figura (4.17) observamos reflexões das camadas arenito com gás (1) e arenito com óleo (2) e das camadas arenito com óleo (2) e arenito com água (3) à esquerda da falha, e sua correspondente à direita da falha. Podemos notar também uma reflexão à direita da falha correspondendo as camadas arenito com óleo (2) e arenito com água (3).

Na Figura (4.18) temos uma fatia retirada no plano de falha (Y,Z) na posição X=250m, de onde pode-se verificar as reflexões da camada arenito com gás (1) e da camada arenito com óleo (2) e uma reflexão intermediária que não pode ser representada neste modelo (2D), pois corresponde ao topo da camada de arenito com gás no flanco inferior da falha. Este evento, só poderia ser vislumbrado num outro plano (Y,Z) ocupando outra posição em X.

Nas Figuras 4.20 e 4.21 temos uma fatia horizontal (X,Y) retirado no plano Z na posições 60m e 80m. As reflexões entre a camada de folhelho (5) e arenito com gás (1) e a difração da falha também podem ser vistas.

As Figuras (4.22 e 4.23) mostram os sismogramas registrados nas posições transversal e paralelo ao plano de falha. Na Figura (4.22) podemos observar um primeiro evento (1) correspondente à chegada da reflexão proveniente da base da camada de folhelho em contato com o topo do arenito com gás, nele podemos ainda observar o carater de difração na porção direita, proveniente da quina superior da falha. Um segundo evento (2) correspondente a reflexão no topo da camada do arenito com óleo. Na Figura (4.23) é pode-se notar a chegada da reflexão do flanco direito da falha correspondente a camada de arenito com gás (1), percebe-se ainda a reflexão no topo da camada de arenito com óleo (2).

A reflexão no topo do arenito com gás no bloco baixo da falha é perceptível na parte direita do sismograma Figura (4.22) entre as posições 210m e 400m. E finalmente a reflexão no topo do arenito com óleo (2) no bloco baixo.

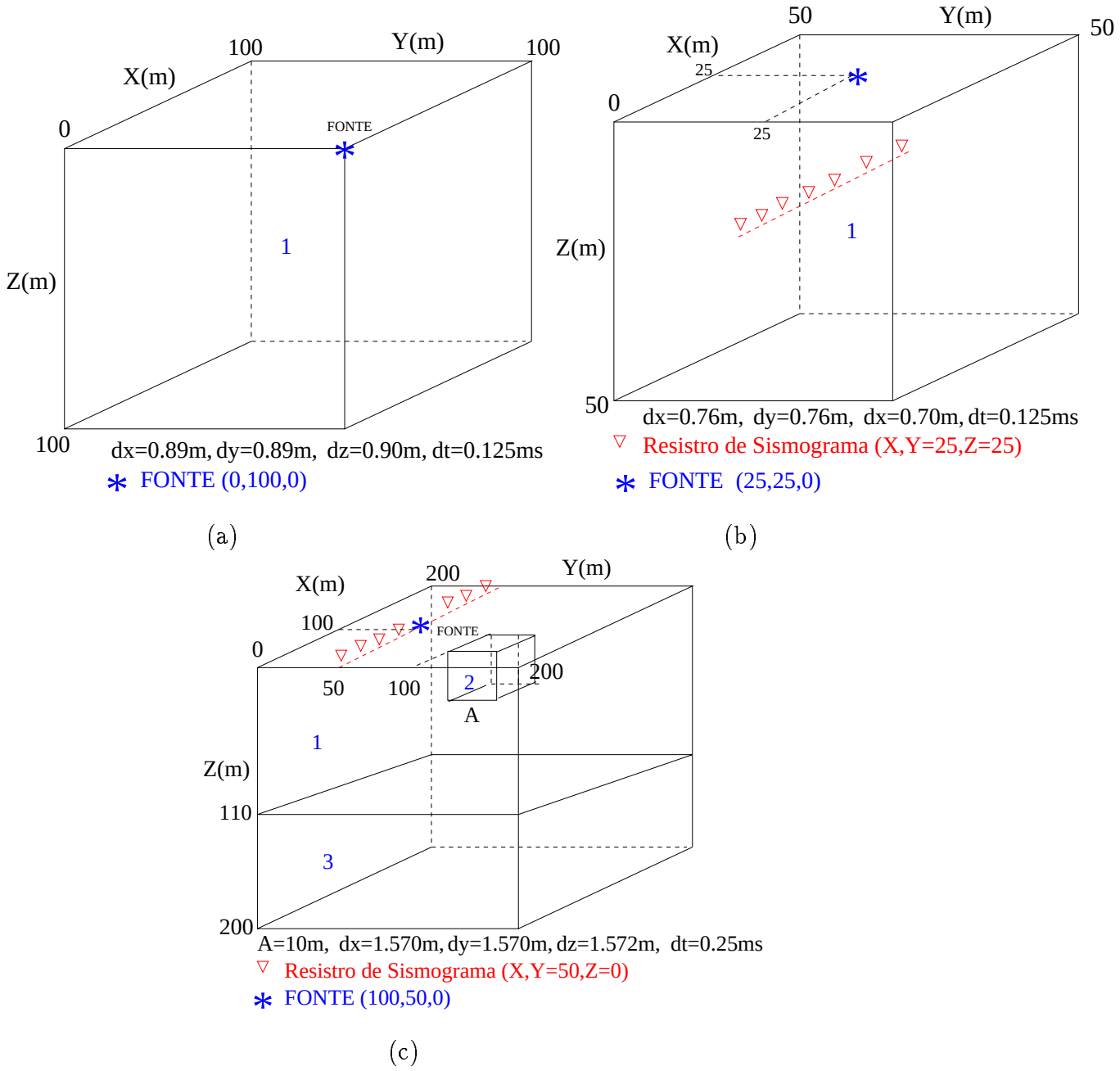


Figura 4.3: Geometria de modelagem: (a) Modelo geométrico do meio de Biot implementando uma fonte pontual; (b) Modelo geométrico do meio de Biot implementando uma fonte explosiva; (c) Modelo geométrico simulando um ponto difrator representado pelo cubo e uma camada plano-paralela.

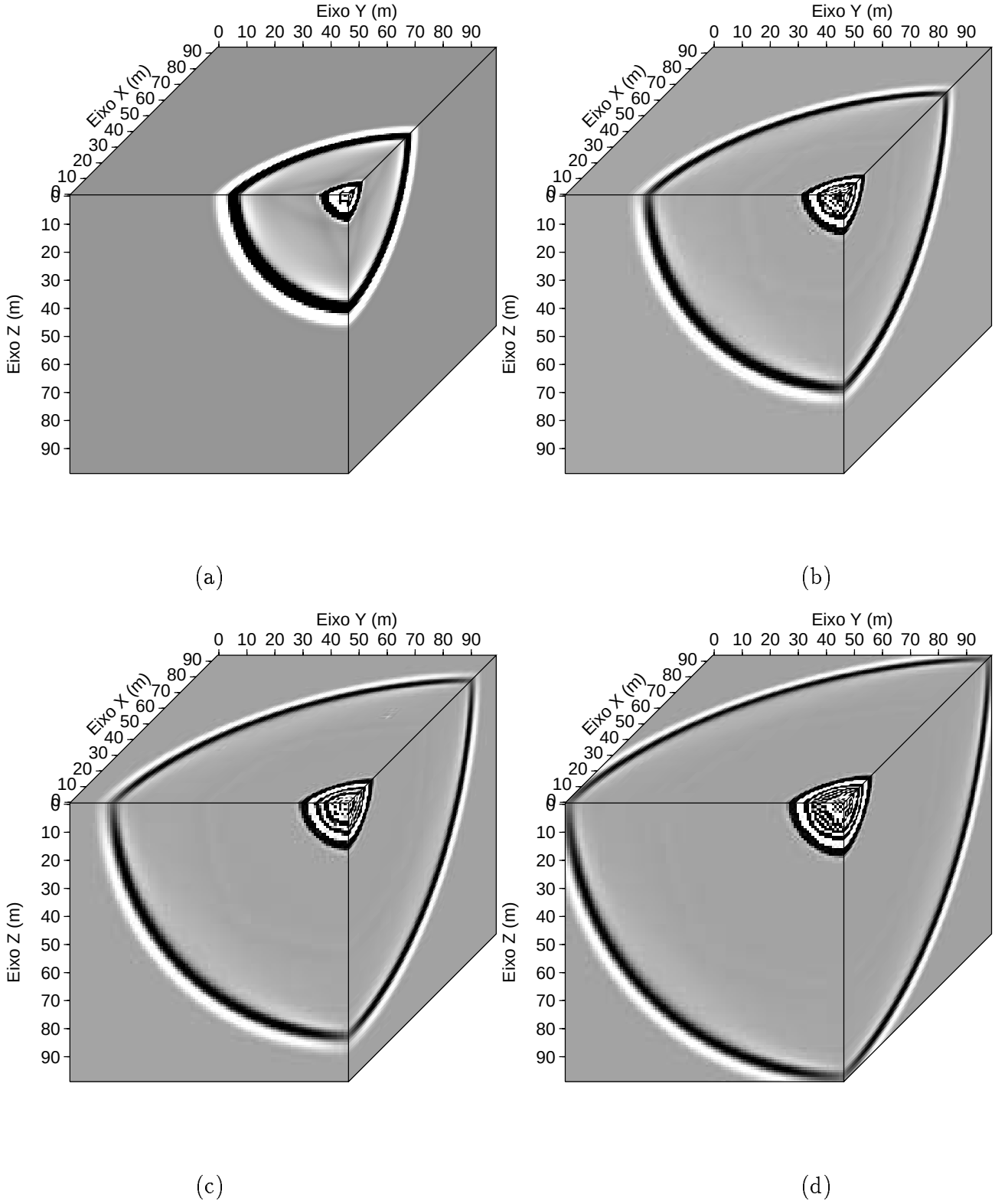


Figura 4.4: Propagação da onda P1 e P2 (modelo1) mostrada nos seguintes tempos:(a) t=0.015s; (b) t=0.025s; (c) t=0.030s; (d) t=0.035s

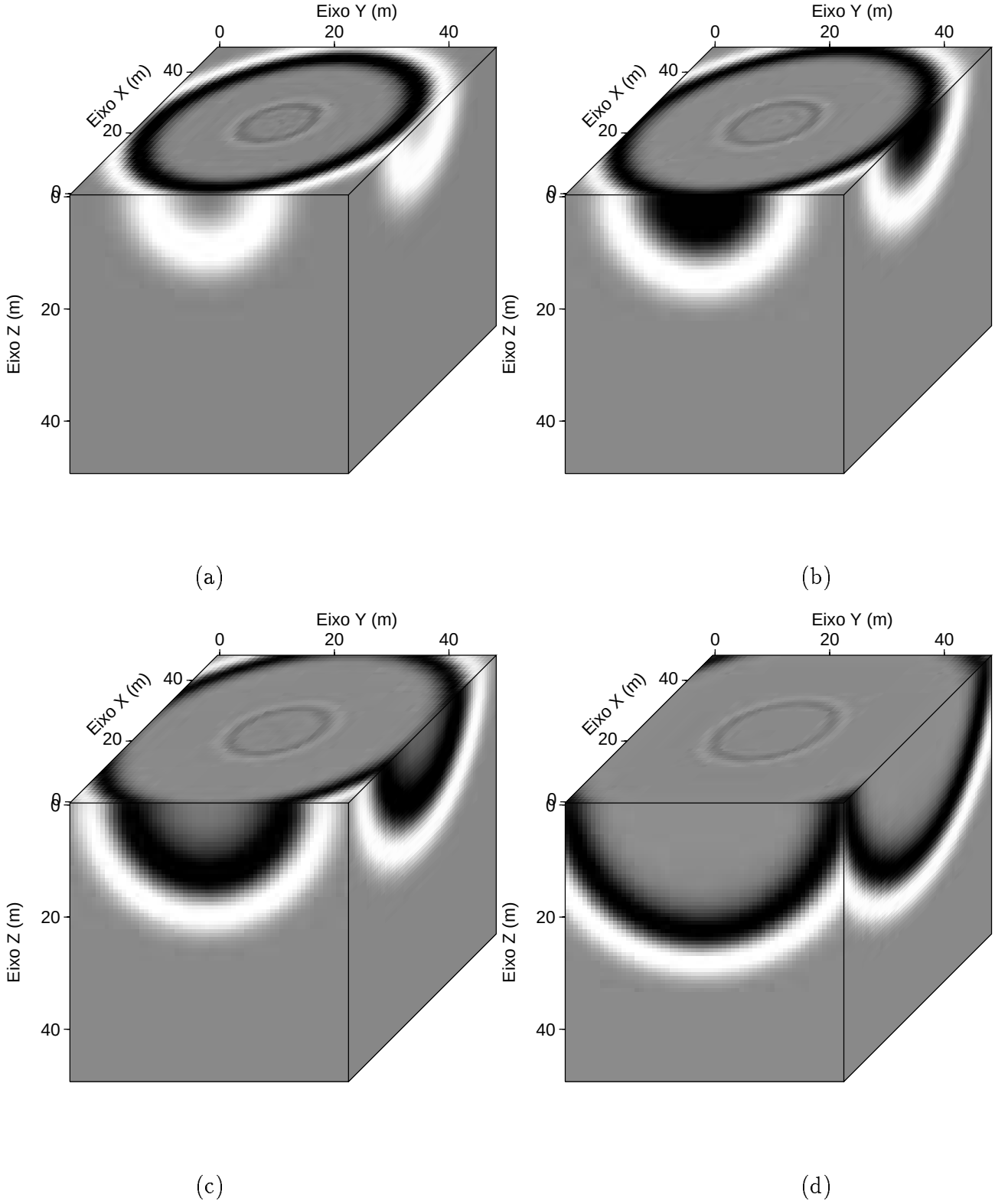


Figura 4.5: Propagação da onda P1 e P2 (modelo2) mostrada nos seguintes tempos:(a) t=0.008s; (b) t=0.009s; (c) t=0.01s; (d) t=0.012s

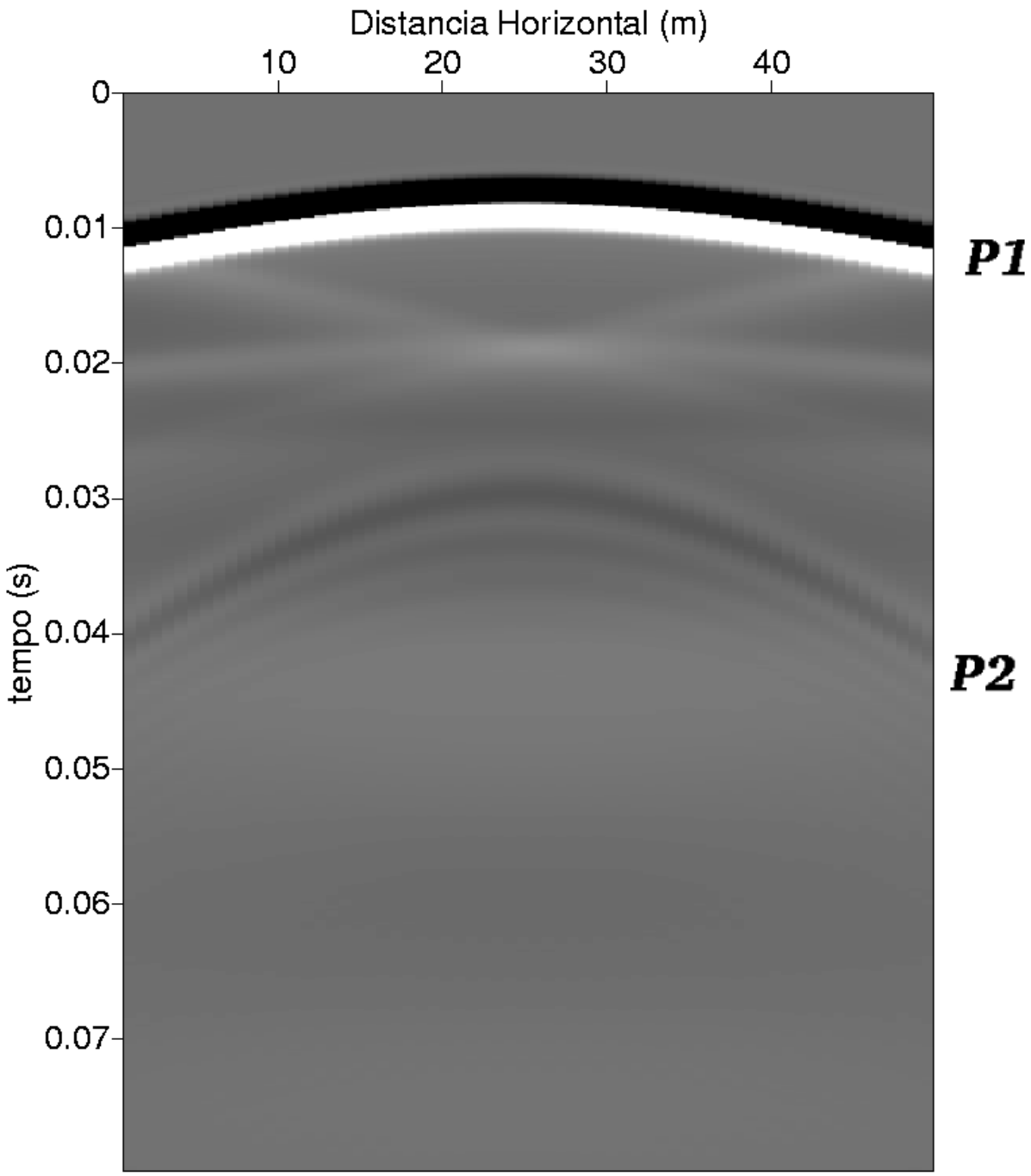
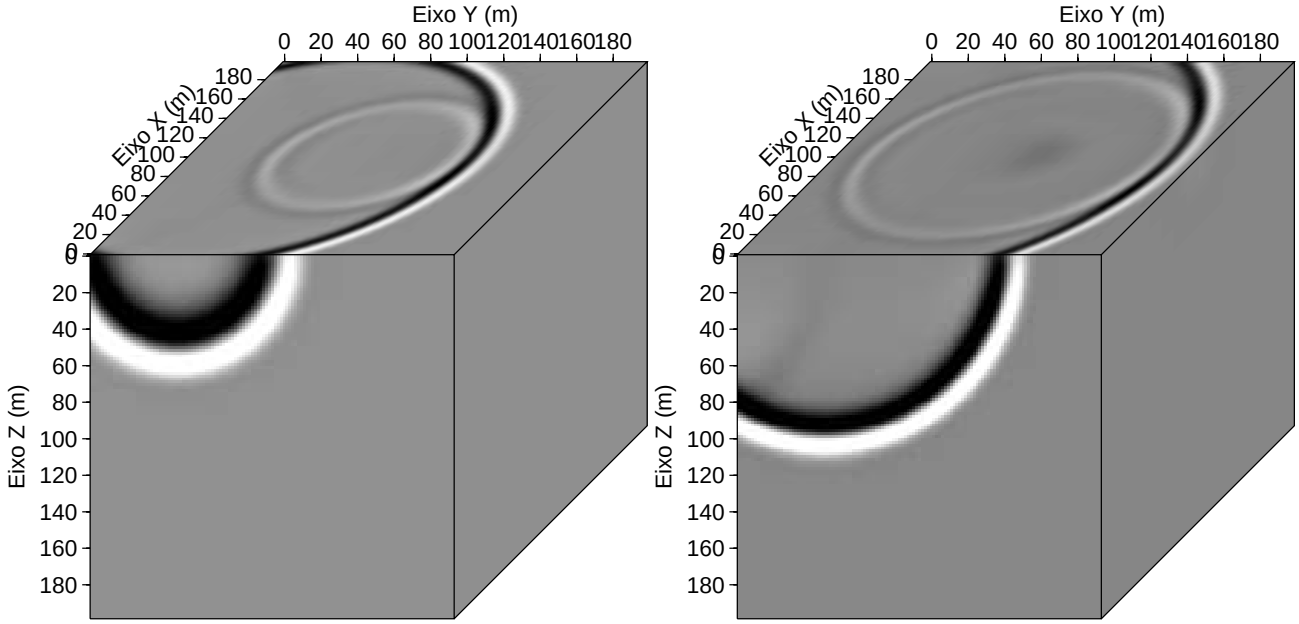


Figura 4.6: Tempo de chegada das ondas de primeira espécie P1 em 0,01s e a de segunda espécie P2 em 0,03s para o segundo modelo.



(a) (b)

Figura 4.7: (a) Snapshot em t=0.04s; (b) Snapshot em t=0.05s

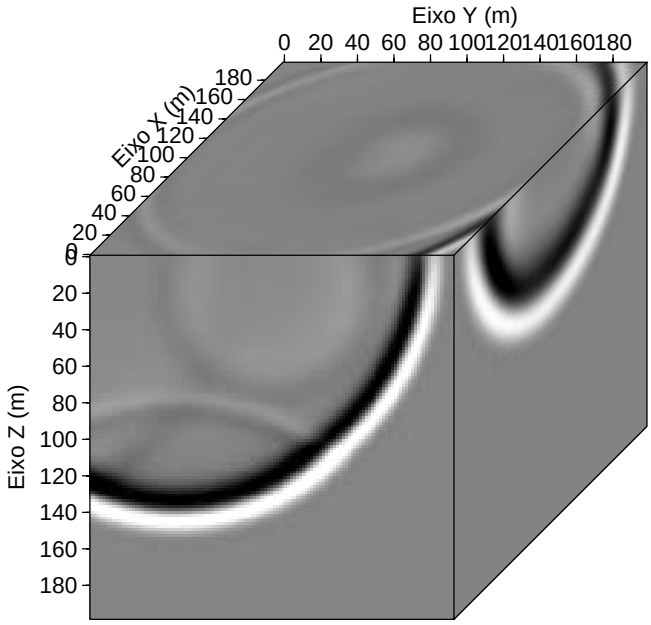


Figura 4.8: Snapshot para t=0.06s

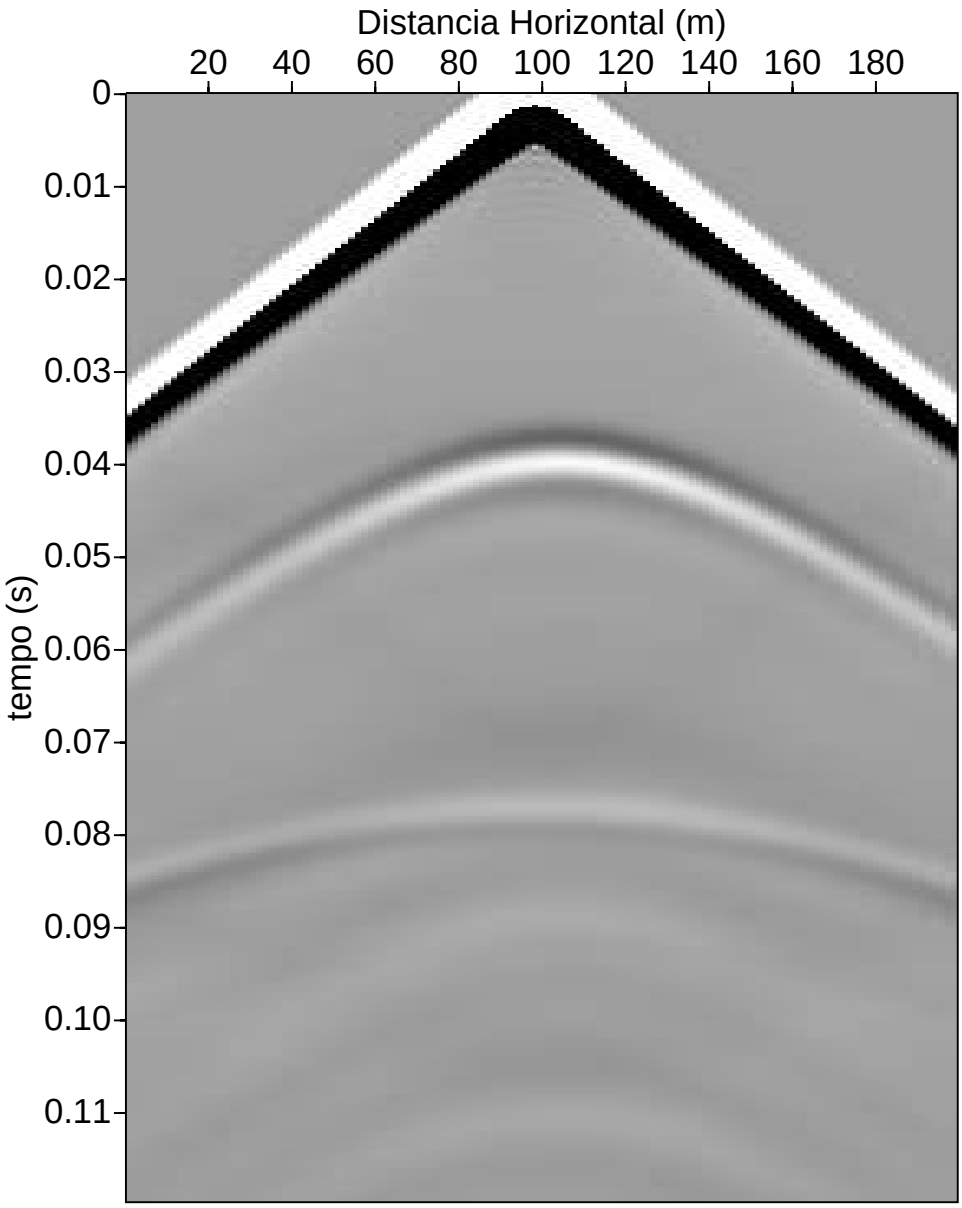


Figura 4.9: Simograma mostrando a difração do cubo bem como as reflexão na camada plano-paralela.

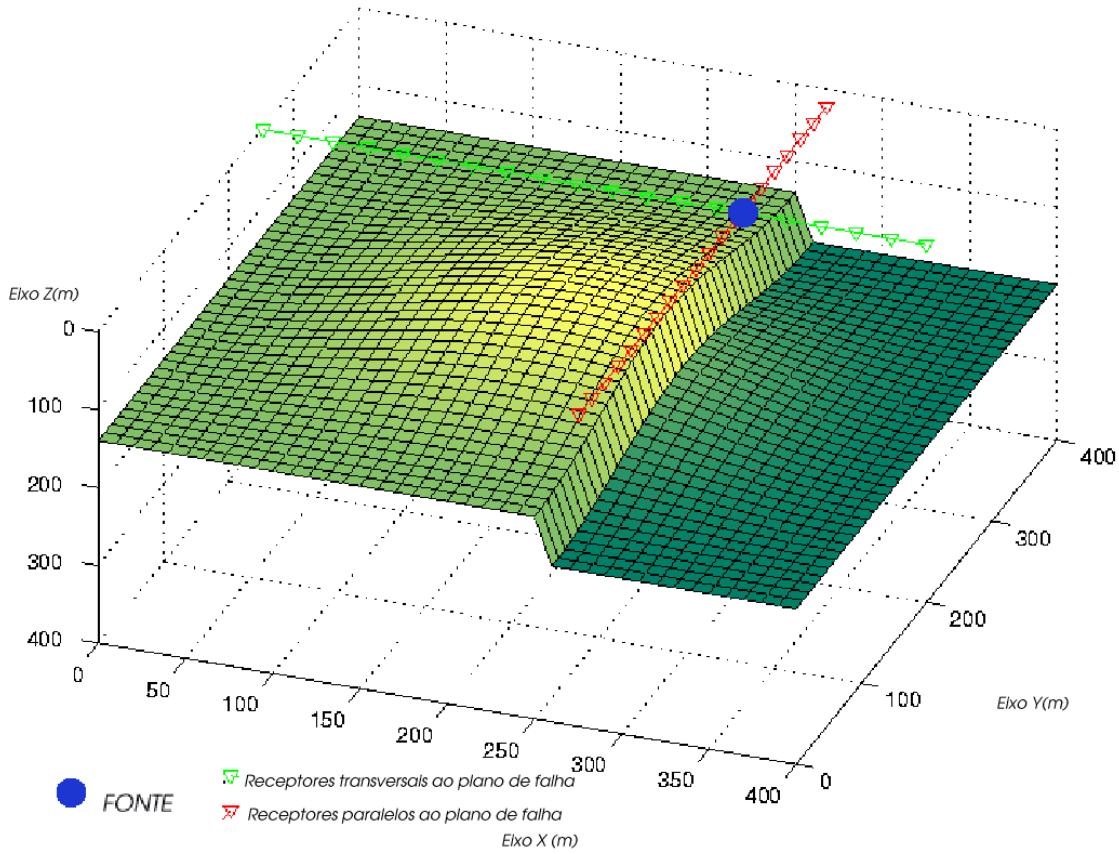


Figura 4.10: Modelo representando a geometria da trapa em 3D, a fonte e a geometria de aquisicão paralela e transversal a falha considerando dx=dy=1.60m e dz=1.59m e dt=0.25ms

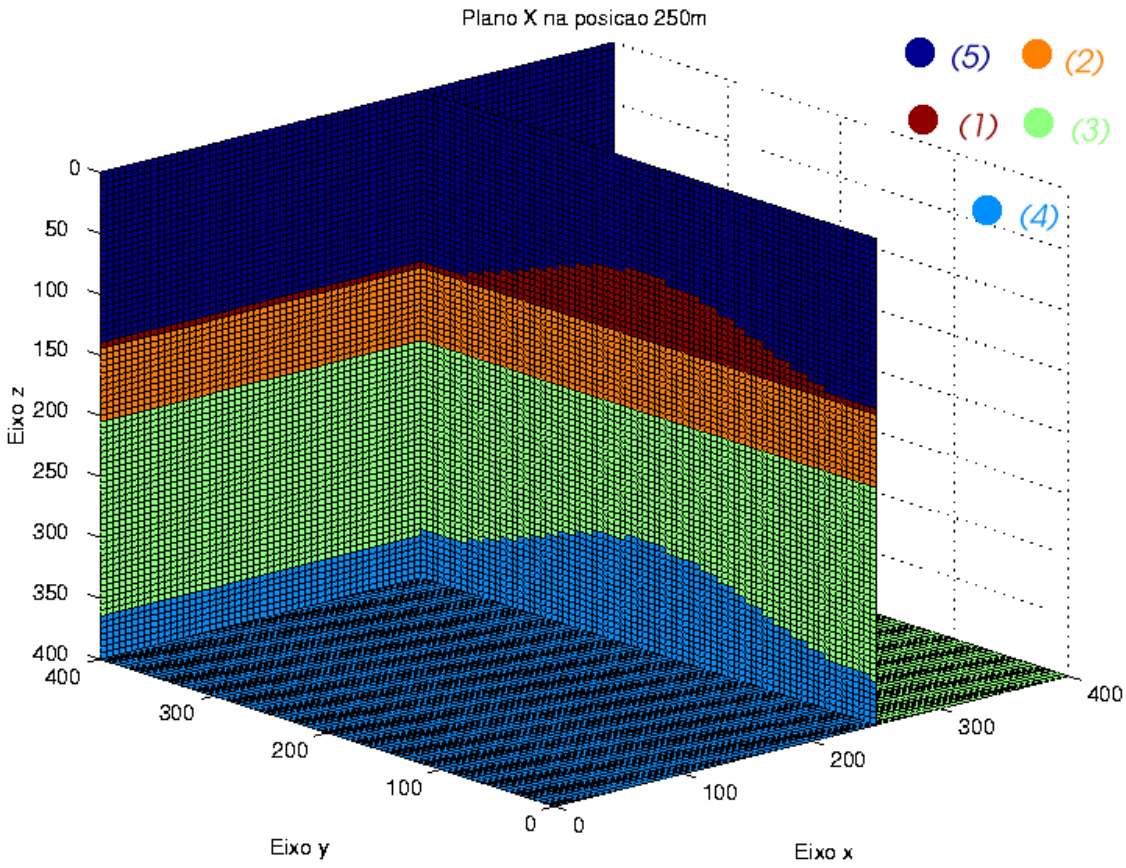


Figura 4.11: Fatia no plano (Y,Z) na posição X=250m

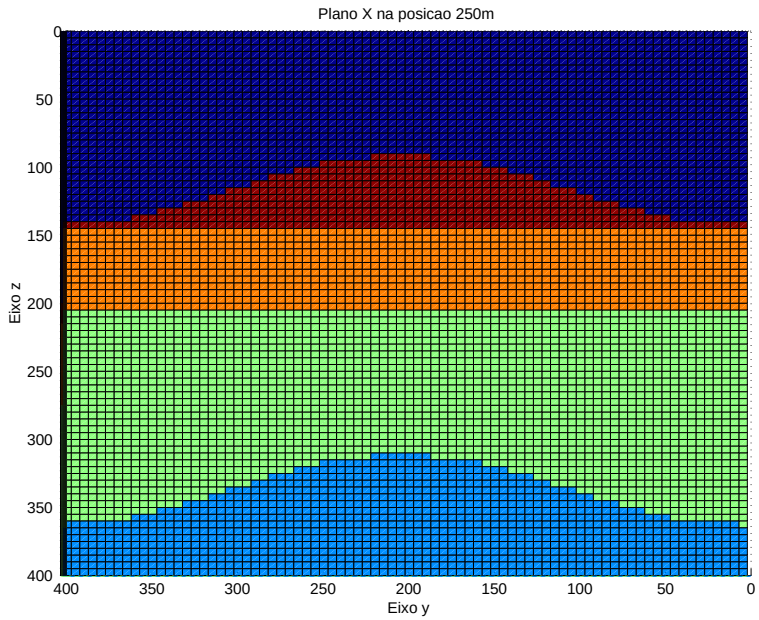


Figura 4.12: Visão frontal do plano (Y,Z) na posição X=250m

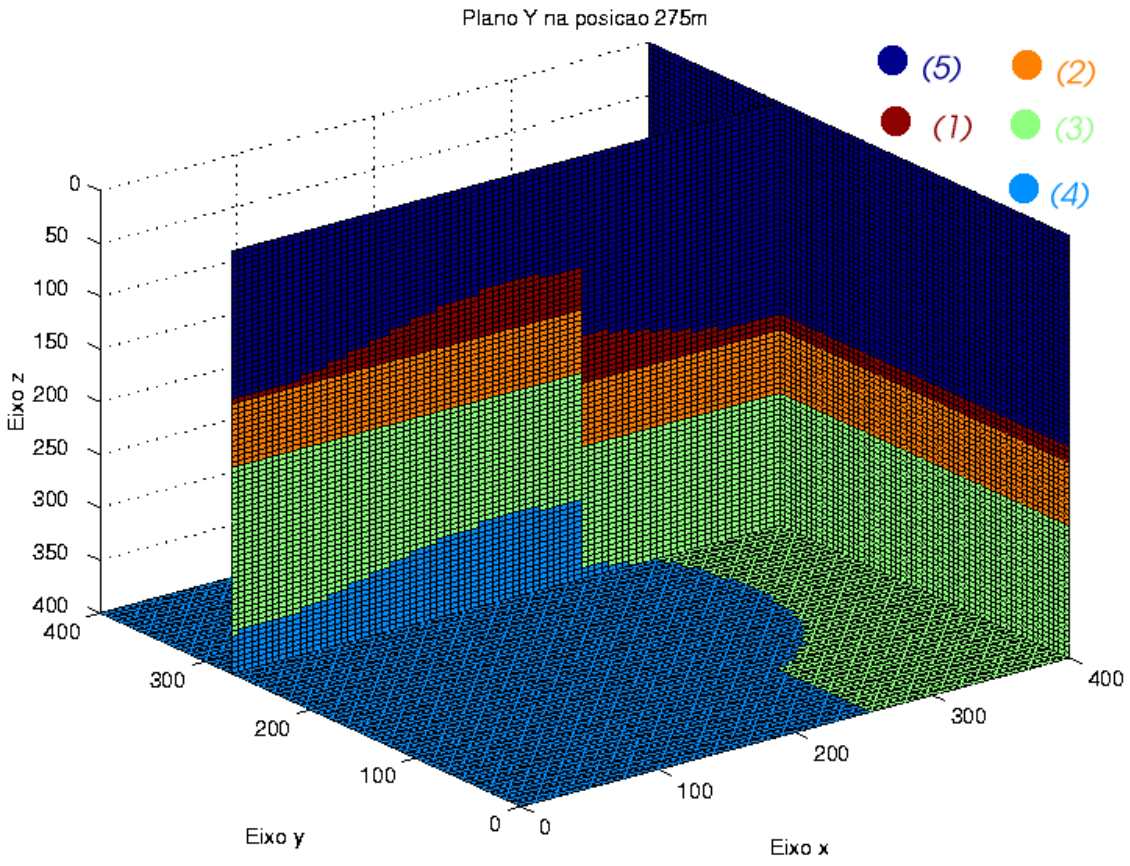


Figura 4.13: Fatia no plano (X,Z) na posição Y=275m

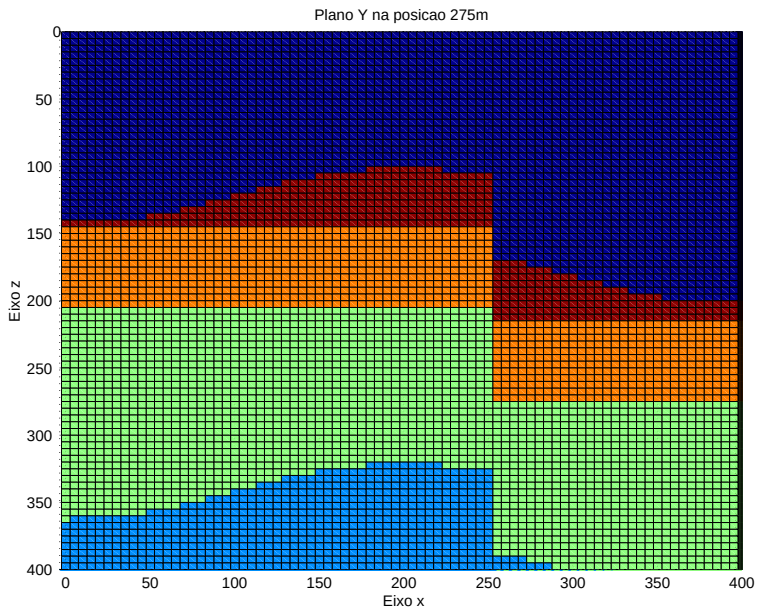


Figura 4.14: Visão frontal do plano (X,Z) na posição Y=275m

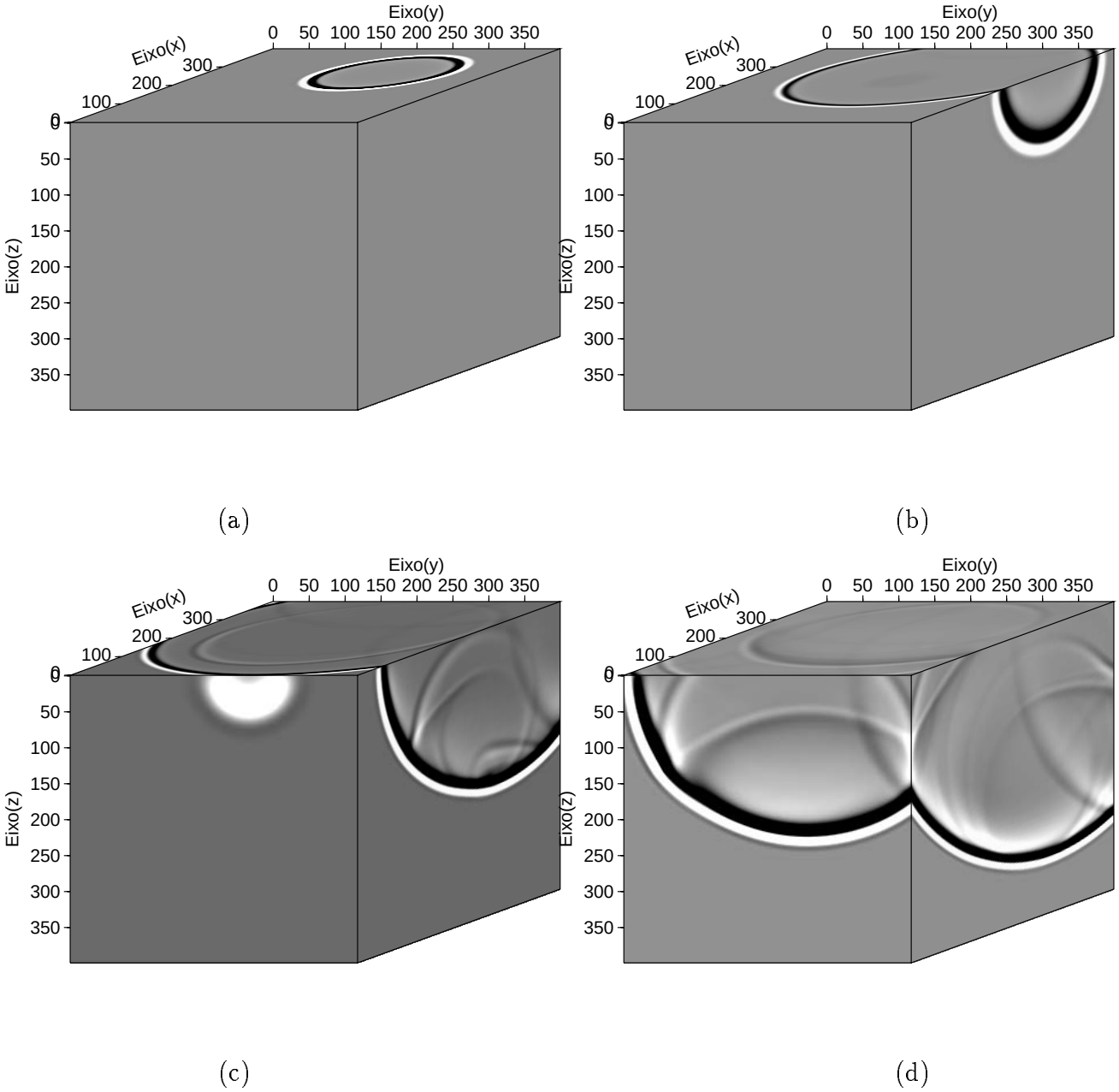
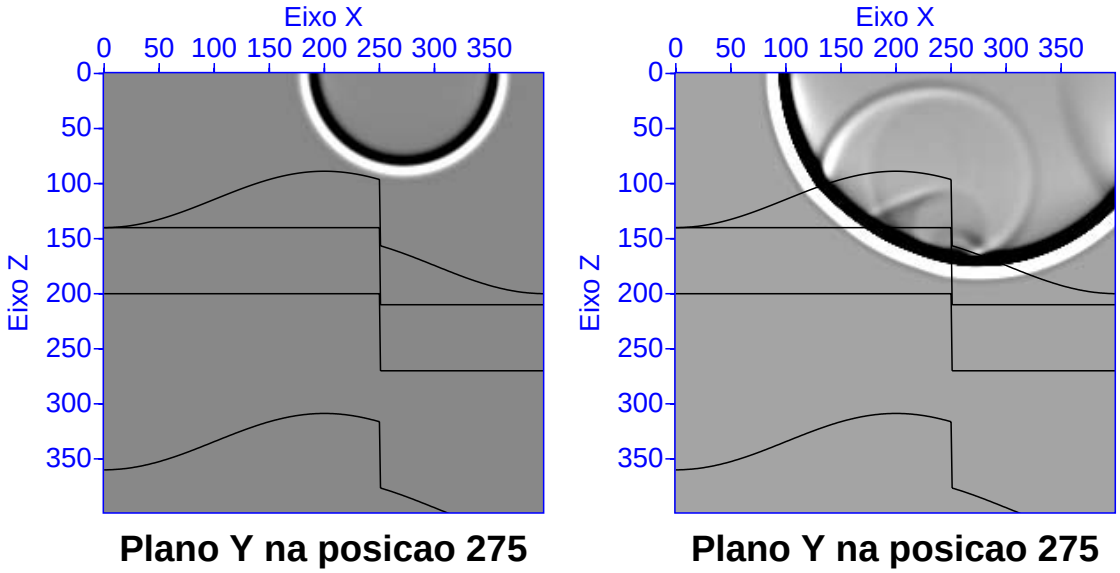


Figura 4.15: Amostragem do campo de onda nos seguintes tempos:(a) t=0.03s; (b) t=0.06s; (c) t=0.09s; (d) t=0.12s



(a) (b)

Figura 4.16: Fatias transversais a falha passando pelo plano (X,Z) na posicão Y=275m para os seguintes tempos (a) t=0.03s e (b) t=0.06s

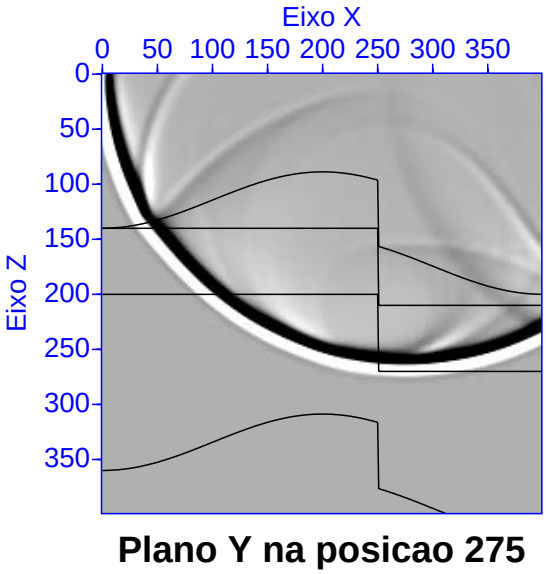
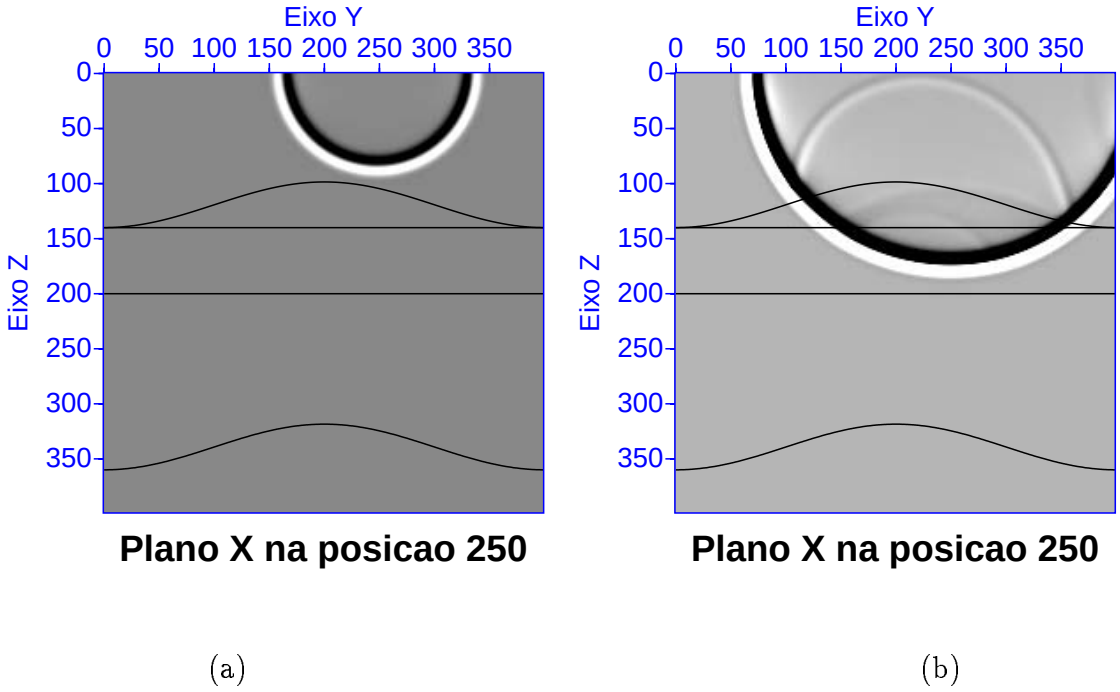


Figura 4.17: Fatia transversal a falha passando pelo plano (X,Z) na posicão Y=275m para o tempo t=0.06s



(a) (b)

Figura 4.18: Fatias transversais a falha passando pelo plano (Y,Z) na posicão X=250m para os tempos (a) t=0.03s e (b) t=0.06s

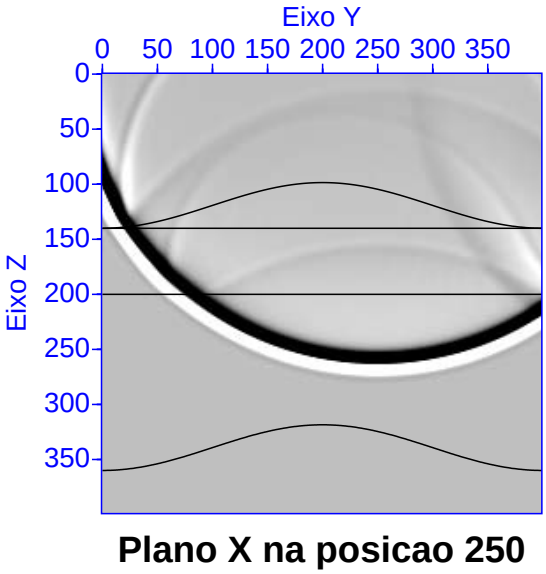


Figura 4.19: Fatia transversal a falha passando pelo plano (Y,Z) na posicão X=250m para o tempo t=0.06s

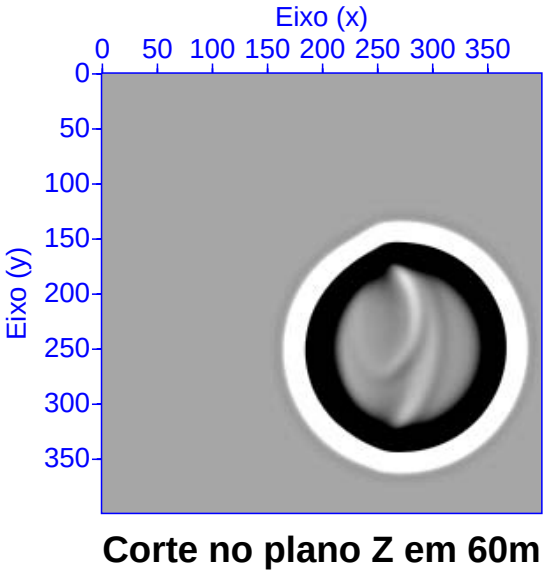


Figura 4.20: Fatia passando pelo plano Z na posicão 60m para o seguinte tempo t=0.09s

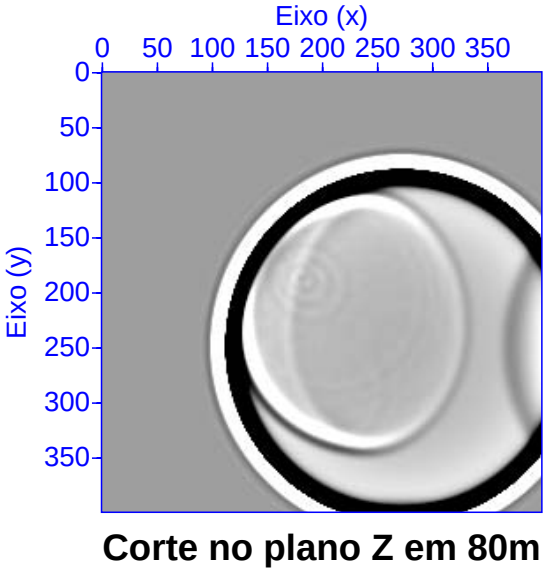


Figura 4.21: Fatia passando pelo plano Z na posicão 80m para os seguinte tempo t=0.09s

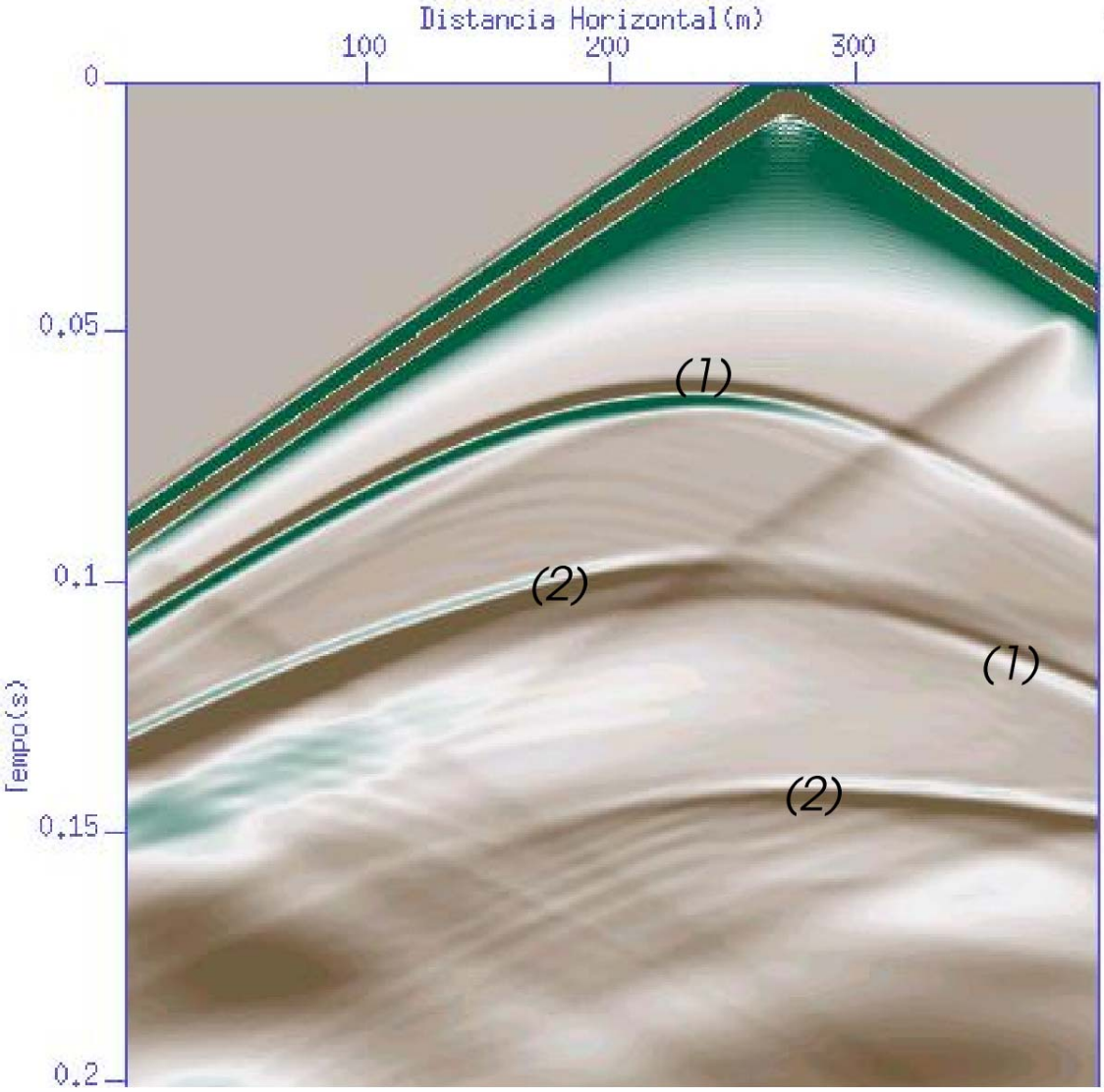


Figura 4.22: Linha de sismograma perpendicular à falha na posição Y=250m

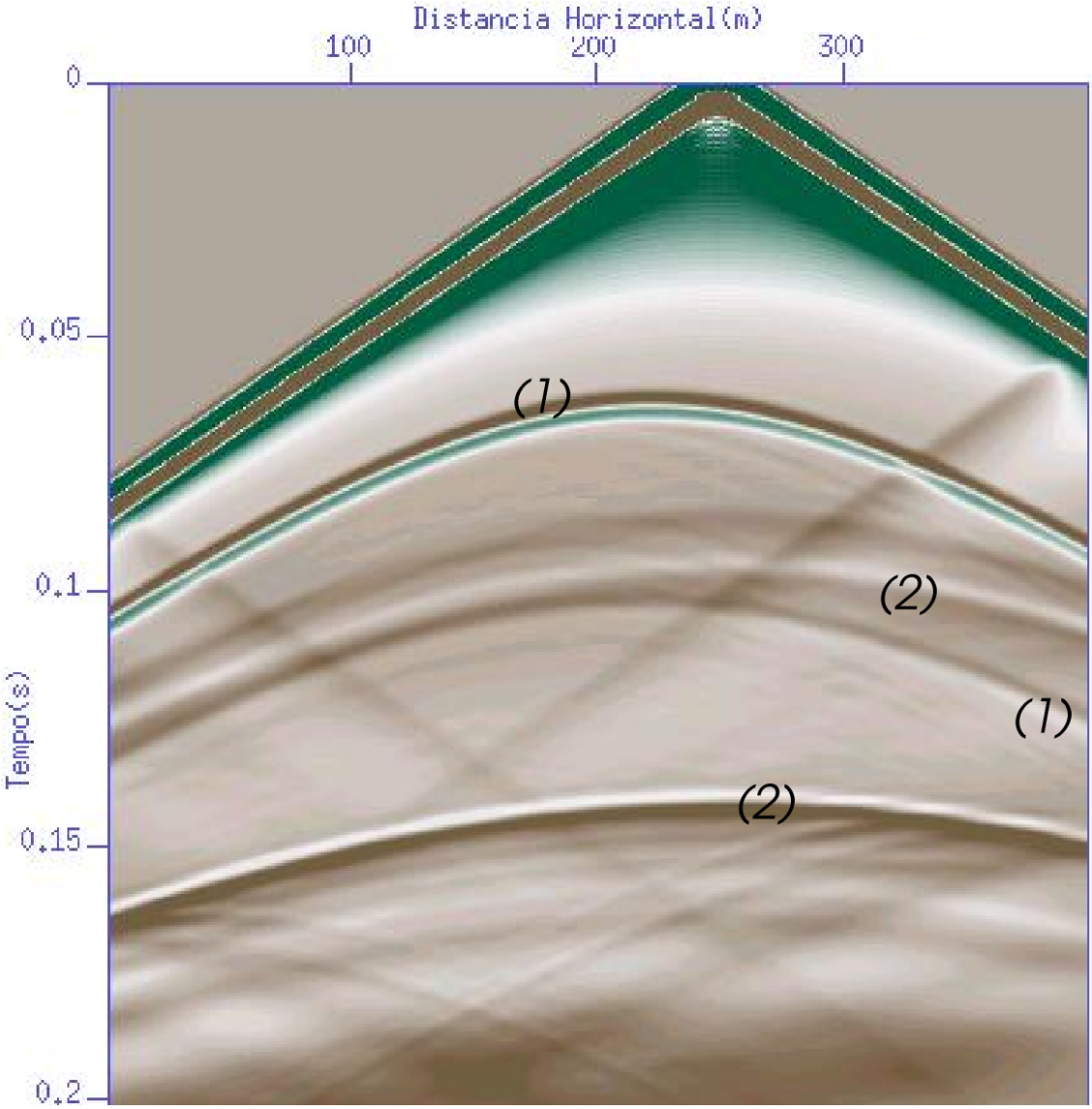


Figura 4.23: Linha de sismograma paralelo à falha na posição X=275m

CAPÍTULO 5

Conclusões e recomendações

A modelagem direta em três dimensões desenvolvida neste trabalho utilizou a técnica de diferenças finitas a fim de resolver numericamente a equação de Biot (1956), para meios acústicos porosos. Essa técnica mostrou-se eficaz para simular a propagação de campos de pressão principalmente ambientes favoráveis à acumulação de hidrocarbonetos, os quais podem ser descritos através de parâmetros petrofísicos da rocha reservatório tais como permeabilidade, viscosidade, porosidade, densidade das matrizes sólida e fluida, tortuosidade entre outros.

A utilização do operador de diferenças finitas de quarta ordem para as derivadas no espaço e de segunda ordem para as derivadas no tempo proporcionaram uma excelente definição do campo de ondas (snapshots) bem como dos refletores (sismogramas).

A comprovação da existência da onda de segunda espécie (P-lenta), para uma viscosidade $\eta = 0.01cP$ prevista pela teoria de Biot (1956), é resultante de uma perda de energia na propagação da onda compressional por um processo de difusão causado pela diferença de fase entre a parte sólida e fluida. Em uma nova simulação numérica esta diferença de acoplamento entre as fases, responsável pelo campo P lento, criou uma forte dispersão numérica já que, o algoritmo está dimensionado para calcular o tamanho da cela em função da velocidade da onda P rápida. Apesar disso, essa dispersão foi extremamente reduzida com a inserção de uma fonte explosiva suave dada por Thedy (1995).

A solução analítica para as velocidades no meio de Biot mostrada no capítulo 2 permitiu a comprovação dos tempos de chegada das ondas de primeira e segunda espécies dadas pela teoria.

O modelo de um anticlinal tridimensional simulou uma armadilha de hidrocarbonetos composta de camadas de folhelho e arenito contendo gás, óleo e água. Os resultados foram conclusivos, pois mostraram, de forma clara, as diversas reflexões e difrações geradas pela passagem da onda no modelo, localizando as descontinuidades do refletor causada pela falha, bem como as reflexões no topo da camada de arenito com gás à direita da falha.

Um dos maiores problemas na modelagem numérica 3D é a aplicação de uma zona de

absorção capaz de reter totalmente as reflexões causadas nas bordas do modelo, pois a aplicação dessa está associada ao crescente tempo computacional. Neste trabalho o coeficiente de absorção foi de ($C_b = 0.9$) e o número de pontos da borda foi de ($n_b = 60$) para o último modelo. Com isso podemos confirmar que esses parâmetros para a zona de absorção são totalmente aplicáveis para modelos maiores que (400x400x400).

A unica desvantagem do método da modelagem 3D, utilizando a técnica de diferenças finitas com aproximação de quarta ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para as derivadas temporais, é a velocidade de processamento nas plataformas atuais e a necessidade de memória, o que poderá ser solucionada com uma filosofia de paralelização. Entretanto, as vantagens de se obter parâmetros informações sobre petrofísicos de reservatório com um pequeno custo computacional é muito compensador se for comparado ao risco exploratório. Esta técnica constitui uma poderosa ferramenta para a indústria petrolífera, fato que o reservatório é descrito a tempos de parâmetros petrofísicos cujas variações acontecem nas três direções do sistema de coordenadas.

AGRADECIMENTOS

A *Deus* e aos meus pais, *Alberto A. de A. Queiroz e Maria de Lourdes Monteiro Andrade Queiroz e ao meu irmão Ricardo Queiroz*, pelo amor, paciência e dedicação que me deram em minha trajetória de vida.

Ao Dr. Marco Botelho, meu orientador pelas discussões e sugestões durante a confecção do trabalho.

Ao Dr. Vicente Pinheiro Neto, pela inestimável ajuda.

A todos os professores do CPGG pela formação profissional e ao funcionário do CPGG, Joaquim Lago pelo apoio técnico na realização desse trabalho.

A ANP, pela concessão da bolsa de estudos do programa PRH/MME/MCT em um período de 2 anos de pesquisa.

A todos os meus colegas de curso durante estes anos de estudo pelo companheirismo que puderam me proporcionar. E especialmente à Atahebson Santos, Gustavo Gomes e Josair Junior pelas correções e comentários prestados neste trabalho.

A Cíntia Carolina, pelo companheirismo nestes 3 anos de convivência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alford, R. M.; Kelly, K. R. e Boore, D. M. (1974) Accuracy of finite-diference modeling of accustic wave equation, Geophisics, **39**:834–398.

Almeida, R. S. (1996) Modelagem e migração tridimensional utilizando o método de direrenças finitas, Dissert. de Mestrado, Ufba.

Alterman, Z. e Karal, F. C. (1968) Propagation of elastic waves in layerd media by finite difference methods, Bull. Seism. Soc. Am., **58:1**:367–398.

Berryman1980, J. G. (1990) Long-wavelenght propagation in composite elastic media, i. spherical inclusition., J. Accoust. Soc. Am., **77**:954–961.

Biot, M. A. (1941) General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys, **12**:155–164.

Biot, M. A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid., The journal of the acoustical society of america, **28**(2), I . low-frequency range.

Bourbie, T.; Coussy, O. e Zinszner, B. (1987) Acoustic of pororus media, Institut francais de petrole publications, gulf publishing company editions technip edic..

Faria, E. L. (1986) Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo, Dissert. de Mestrado, UFBA.

Gassman, J. e Smit, D. C. (1951) Some aspects of elastic wave propagation in fluid saturated porous solids, Geophysics, **16**:673–685.

Hassanzadeh, S. (1991) Acoustic modeling in fluid-saturated porous media, Geophysics, **56**(04):424–435.

Kelly, K. R.; Ward, W. R.; Treitel, S. e Alford, R. M. (1976) Systhetic seismograms: A finite-diference approach., Geophysics, **41**:2–27.

Pinheiro, V. (1994) Modelamento de dados sísmicos de reflexão e transmissão em meios bifásicos, Dissert. de Mestrado, UFBA.

Pinheiro, V. e Botelho, M. (1996) Solução do sistema de equações de biot para meios acústicos porosos usando diferenças finitas com operadores de quarta ordem, Revista Brasileira de Geofísica, **14(2)**(04):131–145.

Plona, T. (1980) Observation of second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, Appl. Phys, **36**:259–261.

Thedy, E. A. (1995) Modelagem sísmica em meios poroelásticos, Dissert. de Mestrado, Ufba.

White, J. E. (1983) Underground sound aplication of seismic waves, Elservier, Amsterdam New York.

Wyllie, M. R. J.; Gregory, A. R. e Gardner, L. W. (1956) Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media., Geophysics, **21**:41–70.

Zhu, X. e MacMechan (1991) Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using biot theory., Geophysics, **56**(3):328–339.

APÊNDICE A

Obtenção do operador de diferenças finitas de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo

Uma derivada percial pode ser discretizada através do truncamento de série de Taylor. Na prática, cada operação diferencial pode ser substituída por um termo de diferenças finitas proveniente da análise numérica de uma equação unidimensional, onde só ocorra a derivada em relação a uma variável específica (Faria, 1986). Assim considerando uma variação do campo de onda em uma dada direção x e uma função $U(x)$ com derivadas contínuas e definidas, podemos escrever o campo de onda no ponto $(x + \Delta_x)$ e $(x - \Delta_x)$ em uma série de Taylor da seguinte forma.

$$U(x + \Delta_x) = U(x) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \tag{A.1}$$

$$U(x - \Delta_x) = U(x) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \tag{A.2}$$

A.1 Solução do operador de diferenças finitas de segunda ordem com aproximação de segunda ordem

Subtraindo-se $U(x + \Delta_x)$ de $U(x - \Delta_x)$

$$U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x) = 2\Delta x \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{A.3}$$

Rearrumando e despresando os termos de grau superior a 2, podemos obter as derivadas de primeira ordem e segunda ordem com aproximação de segunda ordem, respectivamente.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}\left[U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x)\right] \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U(x + \Delta x) - 2U(x) + U(x - \Delta x)\right] \tag{A.5}$$

A.2 Solução do operador de diferenças finitas com derivadas de segunda ordem e aproximação de quarta ordem

Agora queremos obter a segunda derivada com aproximação de quarta ordem. Para isso devemos subtrair $U(x+\Delta_x)$ de $U(x-\Delta_x)$ e desprezar os termos de ordem superior a 4. Assim temos:

$$U(x+\Delta x) - U(x-\Delta x) = 2(\Delta x)\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \tag{A.6}$$

A equação acima pode ser reescritra da seguinte forma:

$$2\Delta x\frac{\partial U}{\partial x} = U(x+\Delta x) - U(x-\Delta x) - 2\frac{\Delta^3 x}{3!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} \tag{A.7}$$

Onde podemos substituir $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ pela eq. (A.5)

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{U(x+\Delta x) - U(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial U(x+\Delta x)}{\partial x} = \frac{U(x+2\Delta x) - U(x)}{2\Delta x} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial U(x-\Delta x)}{\partial x} = \frac{U(x) - U(x-2\Delta x)}{2\Delta x} \tag{A.10}$$

Substituindo as derivadas anteriores na eq. A.7 e rearrumando os termos temos a solução da derivada de primeira ordem com aproximação de quarta ordem.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x}\left(-8U(x-\Delta x) + 8U(x-\Delta x) - U(x+2\Delta x) + U(x-2\Delta x)\right) \tag{A.11}$$

Agora para encontrar as equações de segunda derivada teremos que somar as eq(A.1) e eq(A.2) e rearrumar os termos considerando os mesmos de quarta ordem.

$$U(x+\Delta x) + U(x-\Delta x) = 2U(x) + \frac{2\Delta(x)^2}{2!}\frac{\partial U(x)}{\partial x^2} + \frac{2(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x^4} \tag{A.12}$$

Como no prodedimento anterior a equação pode ser desdobrada para a seguinte forma.

$$\frac{\partial U^2(x)}{\partial x^2} = U(x+\Delta x) - 2U(x) + U(x-\Delta x) - \frac{2(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right) \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x+\Delta x) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U(x+\Delta x) - 2U(x+\Delta x) + U(x)\right] \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U(x+\Delta x) - 2U(x) + U(x-\Delta x)\right] \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x-\Delta x) \quad = \quad \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[U(x)-2U(x-\Delta x)+U(x+2\Delta x)\right] \tag{A.16}$$

Substituindo na eq(A.13) e rearrumando os termos termos a solução da derivada de segunda ordem com aproximação de quarta ordem.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{12(\Delta x)^2}\left[-U(x-2\Delta x)+16U(x-\Delta x)-30U(x)+16U(x+\Delta x)-U(x+2\Delta x)\right] \tag{A.17}$$

APÊNDICE B

Constantes elásticas

Considerando que não há variação de porosidade, os parâmetros P, Q e R na eq. (3.4) os mesmos podem ser expressos em termos de constantes tais como: o módulo de incompresibilidade do fluido (k_f); módulo de incompressibilidade dos grãos sólidos (k_s); módulo de incompressibilidade do meio poroso saturado por um fluido (k) na definição de (Gassman e Smit, 1951) eq(1.15); μ e a pososidade ϕ.

Segue:

$$\begin{cases} P = \dfrac{\left[(1-\phi)(\beta-\phi)k_s + \phi k_s \left(\dfrac{k_o}{k_f}\right)\right]}{\gamma} + \dfrac{4\mu}{3} \\ R = \phi^2 \left[\frac{k_s}{\gamma}\right] \\ Q = (\beta-\phi)\phi \left[\frac{k_s}{\gamma}\right] \\ \gamma = \beta - \phi + \left[\frac{\phi k_s}{k_f}\right] \\ \beta = 1 - \left[\frac{k_o}{k_s}\right] \end{cases} \tag{B.1}$$