



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DA PERSISTÊNCIA DE SÉRIES TEMPORAIS EM DADOS CLIMATOLÓGICOS DE SALVADOR - BAHIA

BRENO MELO BRAGA

SALVADOR – BAHIA

JANEIRO – 2008

**Análise da Persistência de Séries Temporais em Dados Climatológicos de
Salvador - Bahia**

por

BRENO MELO BRAGA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

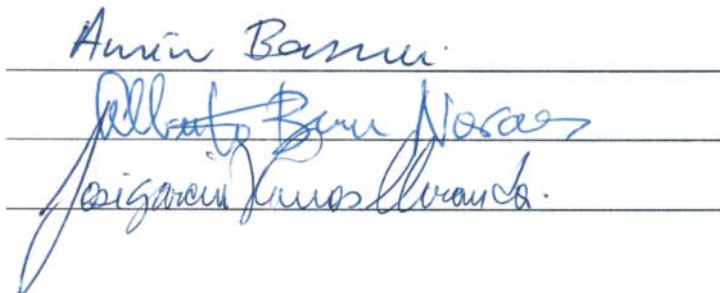
DO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora



The image shows three handwritten signatures in blue ink, each on a horizontal line. The first signature is 'Amin Bassrei'. The second signature is 'Alberto Brum Novaes'. The third signature is 'José Garcia Vivas Miranda'.

Dr. Amin Bassrei - Orientador

Dr. Alberto Brum Novaes

Dr. José Garcia Vivas Miranda

Data da aprovação: 21/01/08

“ O temor ao Senhor é o princípio
da ciência.” Pv 1 . 7

Dedico a Sheila, com amor.

RESUMO

A geometria fractal vem sendo utilizada cada vez com maior frequência para caracterizar e descrever modelos naturais. A sua aplicação se estende desde a dimensão microscópica até o entendimento de processos macroscópicos

Partindo desse princípio, nos propomos a estudar um conjunto de dados climatológicos coletados em Salvador (BA) através dos métodos de análise espectral e análise de faixa reescalada. A série temporal consiste do registro de vários parâmetros naturais como umidade, insolação, precipitação, evaporação, pressão atmosférica além de temperaturas máxima, mínima e média; medidos mensalmente entre os anos de 1961 e 1990.

Para cada parâmetro, o expoente espectral b e o coeficiente de Hurst H foram calculados, documentando assim a variabilidade dos registros. Os resultados obtidos para valores de H variaram entre 0.52 e 0.91 para ambos os métodos, de modo que todos os parâmetros se revelaram persistentes, sendo possível calcular esse coeficiente através dos dois métodos. A importância de tal estudo é mostrar que diferentes métodos fornecem o mesmo resultado, o que é um fato significativo em sistemas complexos. Os resultados descritos acima possibilitaram o cálculo da dimensão fractal dos registros, possibilitando quantificar a complexidade dos fenômenos atmosféricos.

ABSTRACT

Fractal geometry has been used frequently to characterize and describe natural models. Its applications range from microscopical dimensions to the understanding of macroscopic processes.

Following this principle, we propose to study a set of climatological data, collected in Salvador, Bahia, through the methods of spectral analysis and rescaled analysis. The time series are physical parameters of atmospheric pressure, evaporation, humidity, precipitation, solar radiation, and the average, maximum, and minimum temperatures collected monthly in the 30 years span, from 1961 to 1990.

For each parameter, we computed the spectral exponent b , and the Hurst coefficient H , attesting the variability of the available data. The results for H varied between 0.52 and 0.91, for both methods, in such a way that all the parameters behave as persistent.

The importance of such study is to show that different methods provide the same results, which is a significant fact for complex systems. The knowledge of H also provides the computation of the fractal dimension, allowing to quantify the complexity of climatological phenomena.

ÍNDICE

RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE	v
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 Revisão de Fractais	4
1.1 Dimensão	5
1.2 Auto-Similaridade	9
1.2.1 Poeira de Cantor	10
1.2.2 Curva de Koch	10
CAPÍTULO 2 Método de Análise R/S	12
2.1 Teste de Validade para a Lei de Hurst	15
CAPÍTULO 3 Revisão de Análise Espectral	17
3.1 Introdução	17
3.2 Transformada de Fourier	18
3.3 Transformada Discreta de Fourier	19
3.3.1 Falseamento	20
3.4 Transformada Rápida de Fourier - FFT	20
3.4.1 Frequência de Nyquist	21
3.5 Espectro de amplitude	23
3.6 Espectro de potência	23
CAPÍTULO 4 Conjunto de Dados Utilizados	27
CAPÍTULO 5 Aplicação do Método de Análise R/S	32
CAPÍTULO 6 Aplicação do Método de Análise Espectral	38
CAPÍTULO 7 Conclusões	49

Agradecimentos	51
Referências Bibliográficas	52
ANEXO I Algoritmo para análise R/S	53

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	A folha de uma samambaia é um exemplo de fractal (Retirado de Feder, 1989).	5
1.2	Comprimento do segmento de reta.	6
1.3	Área de uma região plana.	6
1.4	Segmento de reta AB	7
1.5	Reta $\log[N(\varepsilon)] \times \log(1/\varepsilon)$	8
1.6	Representação da Poeira de Cantor (Retirado de Feder, 1989).	10
1.7	Curva de Koch (Retirado de Feder, 1989).	11
2.1	Reservatório de água mostrando as variáveis da análise R/S (Retirado de Feder, 1989)	13
2.2	Rugosidade de uma sistema em função de H . Os valores de D associados estão na tabela em anexo	15
3.1	Parte real da transformada de Fourier da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$. . .	22
3.2	Espectro de amplitude da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$	25
3.3	Espectro de potência da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$	26
4.1	Precipitação (mm), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	28
4.2	Pressão atmosférica (hPa), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	28
4.3	Evaporação (mm), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	29
4.4	Umidade (%), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	29
4.5	Insolação (W/m^2), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	30
4.6	Temperatura máxima ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	30
4.7	Temperatura mínima ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	31
4.8	Temperatura média ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.	31
5.1	Análise R/S para precipitação.	33
5.2	Análise R/S para pressão atmosférica.	34
5.3	Análise R/S para evaporação.	34
5.4	Análise R/S para umidade.	35
5.5	Análise R/S para insolação.	35
5.6	Análise R/S para temperatura máxima.	36
5.7	Análise R/S para temperatura mínima.	36
5.8	Análise R/S para temperatura média.	37
6.1	Transformada de Fourier da precipitação.	39

6.2	Transformada de Fourier da pressão atmosférica.	39
6.3	Transformada de Fourier da evaporação.	40
6.4	Transformada de Fourier da umidade.	40
6.5	Transformada de Fourier da insolação.	41
6.6	Transformada de Fourier da temperatura máxima.	41
6.7	Transformada de Fourier da temperatura mínima.	42
6.8	Transformada de Fourier da temperatura média.	42
6.9	Espectro de potência da temperatura média.	45
6.10	Espectro de potência da temperatura mínima.	45
6.11	Espectro de potência da temperatura máxima.	46
6.12	Espectro de potência da precipitação.	46
6.13	Espectro de potência da insolação.	47
6.14	Espectro de potência da pressão atmosférica.	47
6.15	Espectro de potência da umidade.	48
6.16	Espectro de potência da evaporação.	48

INTRODUÇÃO

Os mecanismos relacionados ao clima a primeira vista são completamente aleatórios, entretanto análises mais precisas têm revelado uma certa ordem nesses fenômenos que se expressa sob a forma de uma invariância de escala. Essa invariância de escala é fundamento da geometria fractal.

A geometria fractal é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica, e foram aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. As razões conceituais dos fractais remontam a tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham. Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo. Para estudos nas geociências, um dos problemas de mais difícil solução é a transferência de informações entre as diversas escalas de trabalho. A teoria dos fractais pode vir a contribuir para a descrição e o entendimento destes fenômenos, uma vez que dispõe de ferramentas para estudar as relações geométricas em diferentes escalas de observação. Através dela é possível entender melhor como um comportamento de um processo na escala microscópica pode influenciar no comportamento macroscópico.

Muitas variáveis geofísicas parecem ter um comportamento escalar, o que significa que seus espectros de potência $P(f)$ parecem ser proporcionais a alguma frequência f , isto é:

$$P(f) = \frac{1}{f^b} , \quad (1)$$

ou

$$\ln P(f) = -b \ln(f) , \quad (2)$$

onde b é chamado expoente espectral. Isso implica que uma seqüência de valores dos parâmetros (propriedades) é essencialmente não periódica, mas preserva suas características estatísticas sobre uma faixa de escalas observadas. Esse fenômeno de escala está relacionado a geometria fractal. Quando o expoente espectral assume valores perto de 1, isto é, varia entre 0.5 e 1.5, a propriedade subjacente é dita comportar-se como ruído $1/f$ ou ruído de

cintilação. Um método para quantificar a correlação ou persistência de longo alcance de um sinal é a análise da faixa reescalada (análise R/S), que tem por resultado o cálculo do coeficiente de Hurst H . Um sinal não correlacionado, com nenhuma persistência, como o ruído branco, tem $H = 0.5$. O coeficiente de Hurst e o expoente espectral são relacionados por

$$b_{cum} = 2H + 1, \quad (3)$$

onde b_{cum} é o expoente espectral acumulativo da sequência com expoente espectral b .

Estudos demonstram que maiores variações de um parâmetro correspondem a mudanças estruturais, e essas variações são percebidas pelo comportamento do ruído. Um modo de se estudar um conjunto de dados seria uma análise determinística, entretanto fazer essa análise em variações de pequena escala seria inviável pois a quantidade de informações sobre características de um grande volume em estudo seria virtualmente infinita. Uma alternativa seria a aproximação empírica estatística, embora nesse caso seja necessário aproximar dados a alguma distribuição estatística conhecida.

Alguns autores se propuseram a fazer essa aproximação, analisando algumas séries. Beer (1994) caracterizou, utilizando a análise R/S , reservatórios de hidrocarbonetos. Os dados das séries espaciais se mostraram persistentes, com o valor de H variando entre 0.76 e 0.94 para os vários parâmetros. Esse autor calculou ainda a dimensão fractal da série.

Leonardi (1998) utilizou a análise R/S e a análise espectral para calcular a variabilidade dos registros de dados geofísicos (uma série espacial) no programa de perfuração profunda continental alemã (KTB), onde há um poço de 9 *km* de profundidade, e outro com 4 *km*. Os resultados para o coeficiente de Hurst para os parâmetros variaram entre 0.59 e 0.84.

Miranda e Andrade (1999) analisaram uma série de dados pluviométricos em algumas cidades do nordeste brasileiro. O intervalo de registro variou, em cada cidade, de 38 a 72 anos. Utilizando os métodos de análise R/S e análise espectral, chegaram a um resultado médio para H de 0.709.

Chierice (2003) analisou uma série de dados temporais, o registro diário de chuvas no município de Araras (SP) no período entre 1955 e 2000. Para calcular o coeficiente de Hurst utilizou além da análise R/S , o método da wavelet. Como resultado, o valor de H foi 0.743, e o da dimensão fractal, de 1.254.

Nesse trabalho, utilizamos a análise R/S e a análise espectral para caracterizar uma série de dados climatológicos da cidade de Salvador (BA) entre os anos de 1961 e 1990, onde os parâmetros foram pressão atmosférica, umidade, precipitação, insolação, evaporação, temperaturas máxima, mínima e média.

No primeiro capítulo, apresenta-se uma revisão do conceito de fractais, que são cada vez mais utilizados para se modelar fenômenos naturais e sistemas complexos. Isto é comprovado por uma relação entre dimensão fractal e o coeficiente de Hurst. O trabalho de Chierice (2003) serviu como base teórica desse capítulo.

No segundo capítulo, discutimos os fundamentos da análise R/S , além do histórico dessa ferramenta. Nesse capítulo, são apresentados ainda as propriedades do coeficiente de Hurst. No terceiro capítulo, é feito uma revisão da conhecida análise espectral, onde são apresentadas a transformada de Fourier bem como a transformada discreta de Fourier que é utilizada na sua forma mais usual para séries de valores discretos como uma série temporal.

No quarto capítulo, apresenta-se os dados climatológicos analisados, e nos capítulos cinco e seis têm-se os resultados da aplicação dos métodos de análise R/S e análise espectral respectivamente. Os resultados acompanharam os outros trabalhos mencionados, sendo as séries persistentes e os valores de H variando de 0.602 e 0.848 no método de análise R/S , e 0.525 e 0.908 na análise espectral.

CAPÍTULO 1

Revisão de Fractais

O termo fractais foi primeiramente usado pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot em 1967, popularizando-se no livro *The Fractals Geometry of Nature* lançado em 1982. Esse termo significa fragmentado, quebrado, irregular (do latim *fractus*), e é usado para designar uma geometria de formas fracionárias, muito facilmente encontrada na natureza, e que não são bem descritas pela tradicional geometria euclidiana.

O entendimento humano a respeito dos fenômenos naturais é feito a partir de modelos teóricos, que devem levar em consideração a geometria das partículas que variam de tamanho desde a escala subatômica até a escala do universo. Em cada campo da ciência houve a tendência de se desenvolver modelos, sendo que uma primeira aproximação para isto foram os conceitos da geometria euclidiana como linhas, círculos, esferas e tetraedros.

Ao criar a geometria fractal, Mandelbrot estabeleceu as bases para o estudo focalizando as formas fragmentadas, fraturadas, rugosas e irregulares. Tais categorias de formas são normalmente geradas por uma dinâmica caótica, de forma que a geometria fractal descreve os traços e as marcas deixadas pela passagem dessa atividade dinâmica. Dessa forma um fractal é a fratura deixada pela vibração de um terremoto ou a linha costeira sinuosa esculpida pela turbulência dos oceanos e erosão; os fragmentos irregulares do gelo a medida que as águas se congelam ou a estrutura ramificada de uma samambaia, que marca o processo de seu crescimento, e está ilustrado na Figura 1.1. Portanto, os fractais descrevem a rugosidade do mundo, sua energia, suas mudanças e transformações dinâmicas.

As aplicações práticas nas geociências são freqüentes, como por exemplo, a medida do litoral de ilhas e continentes, a extensão de rios e redes de drenagem, a caracterização de superfícies topográficas, a representação de rede de cadeias de montanhas, além de estudos sísmológicos, tectônicos e geomorfológicos para citar aspectos macroscópicos, ou então, a caracterização de meios porosos, percolação de fluidos entre outras aplicações no âmbito microscópico. Acredita-se ainda que a distribuição dos campos de petróleo obedeça à geometria fractal.

De acordo com Mandelbrot, “um fractal é uma figura feita de partes similares ao todo de alguma forma”. Desse modo, os fractais são definidos como estruturas auto-similares, ou seja, aquelas que apresentam a mesma forma qualquer que seja a escala sob a qual são vistas,

assim apresentam invariância de escala, o que é de grande utilidade nos processos naturais e fenômenos geológicos.

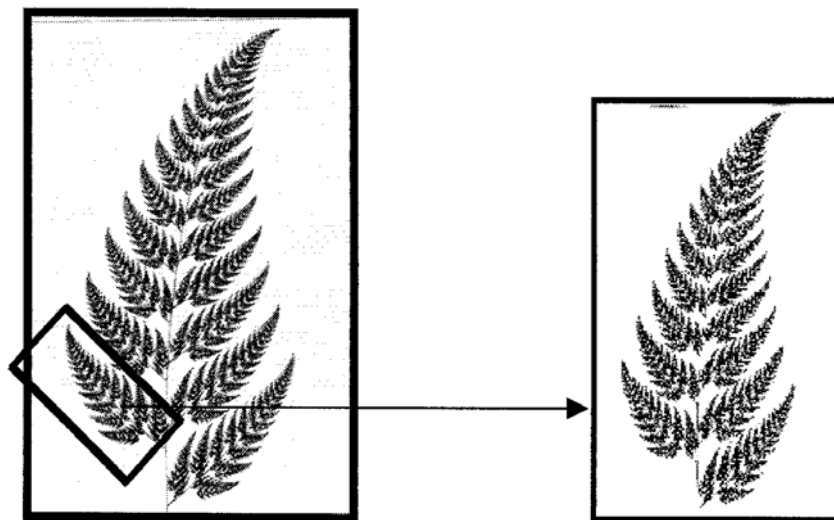


Figura 1.1: A folha de uma samambaia é um exemplo de fractal (Retirado de Feder, 1989).

Entre os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria fractal destacam-se Georg Cantor (1845-1918) que ao desenvolver o denominado conjunto de pontos de Cantor, em 1883, já visualizava aspectos da teoria dos fractais. O grande salto, porém, foi dado por Mandelbrot ao perceber a possibilidade de usar os fractais para resolver complexos problemas matemáticos, dando-lhes uma forma geométrica. Os cientistas da época utilizavam figuras perfeitas como elipses, circunferência e outras. Para Mandelbrot os matemáticos deviam esquecer essas figuras e analisar outros fenômenos naturais como o contorno de montanhas ou a trajetória de gotículas de água, que devido a suas irregularidades não podiam ser descritas pelos conceitos da geometria euclidiana. Grande parte dessa discussão sobre fractais foi baseada no trabalho de Chierice (2003).

1.1 Dimensão

O conceito intuitivo de dimensão é o de que ele toma valores numéricos inteiros, assim a geometria euclidiana pressupõe que os objetos se distribuem no espaço assumindo dimensões 1, 2 ou 3. Uma reta, por exemplo, tem uma única dimensão, porque só pode ser medido de uma maneira: através de seu comprimento. Um plano tem duas dimensões, a sua área se constitui do produto entre o comprimento e a largura. Já um cubo tem três dimensões, com seu volume resultando do produto entre largura, comprimento e altura. Admite-se dimensão zero para o ponto.

Se quisermos medir uma reta, escolhemos uma escala ε e o seu comprimento L será definido por:

$$L = N(\varepsilon)\varepsilon.$$

Tal que $N(\varepsilon)$ é o número de vezes que a escala ε é aplicada, como no caso da Figura 1.2 onde o comprimento é aproximadamente 4ε .

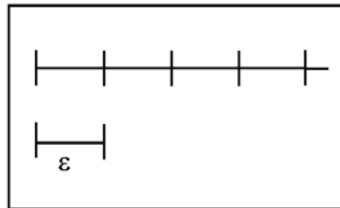


Figura 1.2: Comprimento do segmento de reta.

Se quisermos medir uma área A de uma região plana, conforme a Figura 1.3 teremos:

$$A(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon^2.$$

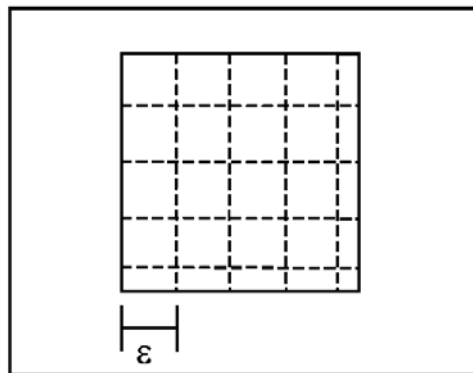


Figura 1.3: Área de uma região plana.

E, analogamente, para um volume V :

$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon^3. \quad (1.1)$$

De acordo com os três exemplos citados, pode-se perceber nas Figuras 1.2 e 1.3 que ao reduzir a escala ε , a medida (comprimento, área ou volume) se torna mais precisa. Assim define-se a medida M de maneira geral como:

$$M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^{D_m}, \quad (1.2)$$

onde D_m é a dimensão do instrumento de medida, ou seja, se estamos medindo retas $D_m = 1$, no caso de planos, $D_m = 2$. Muito facilmente percebe-se que, no caso de uma reta, à medida que ε diminui, o número de intervalos $N(\varepsilon)$ necessários para cobrir toda a figura aumenta na razão inversa, isto é,

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}.$$

Já num plano, tem-se que

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}.$$

Generalizando,

$$N(\varepsilon) = C \varepsilon^{-D}, \quad (1.3)$$

onde C é uma constante de proporcionalidade, e D é a dimensão a ser obtida. Para isso, aplica-se logaritmo de ambos os lados da equação 1.3,

$$\log[N(\varepsilon)] = \log C + D \log(1/\varepsilon). \quad (1.4)$$

Pode-se calcular a dimensão D diretamente da inclinação da reta $\log[N(\varepsilon)] \times \log(1/\varepsilon)$, ou seja,

$$D = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (1.5)$$

Considerando um segmento de reta AB , conforme Figura 1.4, em que ε é a unidade de medida que será usado para medir o comprimento do segmento e $N(\varepsilon)$ é o comprimento desse segmento.

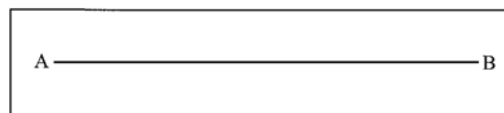


Figura 1.4: Segmento de reta AB .

Atribuindo-se valores a ε com a finalidade de se obter a dimensão fractal do segmento AB. Será usado, por conveniência, logaritmo na base 2:

Nível	ε	$N(\varepsilon)$	$1/\varepsilon$	$\log_2(1/\varepsilon)$	$\log_2[N(\varepsilon)]$
0	1	1	1	0	0
1	1/2	2	2	1	1
2	1/4	4	4	2	2
3	1/8	8	8	3	3
n	$(1/2)^n$	2^n			

Construindo o gráfico $\log[N(\varepsilon)] \times \log(1/\varepsilon)$, como na Figura 1.5, tem-se que a dimensão fractal será obtida a partir da inclinação dessa reta:

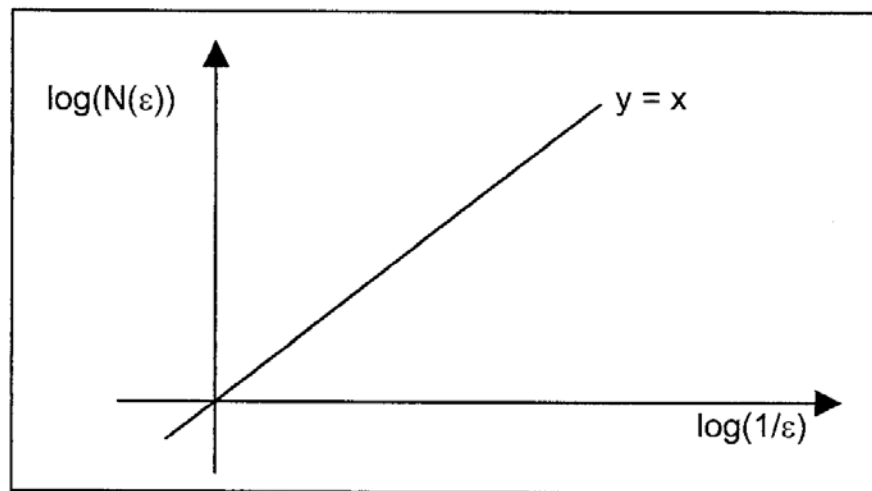


Figura 1.5: Reta $\log[N(\varepsilon)] \times \log(1/\varepsilon)$.

ou pela relação:

$$D = \frac{\log_2[N(\varepsilon)]}{\log_2(1/\varepsilon)} = 1.$$

Se considerarmos um plano, e analogamente, atribuímos valores a ε , conforme a tabela:

Nível	ε	$N(\varepsilon)$	$1/\varepsilon$	$\log_2(1/\varepsilon)$	$\log_2[N(\varepsilon)]$
0	1	1	1	0	0
1	1/2	4	2	1	2
2	1/4	16	4	2	4
3	1/8	64	8	3	8

A dimensão fractal seria então:

$$D = \frac{\log_2[N(\varepsilon)]}{\log_2(1/\varepsilon)} = 2.$$

Nos exemplos anteriores observamos que a dimensão euclidiana das figuras geométricas, independente da unidade de medida usada, é sempre igual a dimensão fractal D dessa figura. Esse fato, no entanto, nem sempre acontece. Ao se tomar a linha de contorno do litoral de uma região qualquer, por exemplo, encontrar-se-á um valor compreendido entre 1 e 2.

A geometria dos fractais possibilita concepções mais amplas para se estudar a dimensionalidade de um objeto, indo além de dimensões inteiras: as dimensões fracionadas (ou dimensões fractais). Essa dimensão torna-se uma maneira de medir propriedades que, sem isso, não tem definição clara: o grau de aspereza, ou de fragmentação, ou de irregularidade de um objeto. Um litoral sinuoso, por exemplo, apesar de sua imensurabilidade em termos de extensão, tem certo grau característico de rugosidade. Mandelbrot especificou maneiras de calcular a dimensão fracionada dos objetos reais, e fez com sua geometria uma afirmação sobre os padrões irregulares que estudara na natureza: a de que o grau de irregularidade permanece constante em diferentes escalas.

1.2 Auto-Similaridade

No início, a definição de fractal estava relacionada com a capacidade de se obter a mesma figura (ao menos estatisticamente) ao se efetuar uma mudança de escala. Há fractais onde uma transformação de escala, com o mesmo fator para todas as direções, leva a sistemas similares, aos quais se denomina fractais auto-similares. A invariância escalar, a auto-similaridade e a aleatoriedade são consideradas como sendo três atributos básicos dos fractais.

A invariância escalar significa que os fractais mostram detalhes similares em diversas escalas. A noção de auto-similaridade baseia-se na similaridade geométrica. Dois objetos são similares quando possuem a mesma forma, independente de seus tamanhos. Os ângulos correspondentes, entretanto, devem ser iguais e os segmentos lineares correspondentes devem ter o mesmo fator de proporcionalidade. Já a aleatoriedade encontra-se relacionado com a dinâmica caótica dos sistemas, de modo que a forma a ser gerada é imprevisível.

Alguns fractais foram desenvolvidos e se tornaram referências clássicas para novos estudos.

1.2.1 Poeira de Cantor

A Poeira de Cantor foi apresentada por George Cantor em 1883 (muito antes das pesquisas iniciais de Mandelbrot sobre fractais). Começa por um segmento de reta que divide-se em três partes auto-similares, da qual retira-se a parte do meio, resultando em dois segmentos, do qual retira-se o terço médio de cada um deles, têm-se então quatro segmentos. Repete-se então a mesma operação nas partes restantes de modo que as estruturas resultantes por serem cada vez menores se assemelham a poeira, conforme Figura 1.6.



Figura 1.6: Representação da Poeira de Cantor (Retirado de Feder, 1989).

Se fosse um reta, independente de seu comprimento, o valor da dimensão fractal seria 1, mas como se trata de uma reta da qual foram retirados segmentos, o valor da dimensão fractal será menor que 1, ou mais especificamente:

Nível	ε	$N(\varepsilon)$	$1/\varepsilon$	$\log_2(1/\varepsilon)$	$\log_2[N(\varepsilon)]$
0	1	1	1	0	0
1	1/3	2	3	1.585	1
2	1/9	4	9	3.169	2
3	1/27	8	27	4.754	3

$$D = \frac{\log_2[N(\varepsilon)]}{\log_2(1/\varepsilon)} = 0.6309.$$

1.2.2 Curva de Koch

A curva de Koch, também chamada floco de neve, foi desenvolvida por Helge Von Koch, matemático sueco, em 1904. Nesse fractal, um segmento de reta é dividido em quatro partes auto-similares e dobrada no ponto mediano, sendo que se esse processo for repetido diversas vezes, a figura assumirá a forma que lembra um floco de neve.

Observa-se na Figura 1.7 que com o avanço do processo, o comprimento de cada segmento tende a zero, enquanto que o comprimento da curva tende para o infinito. Calculando a dimensão dessa curva:

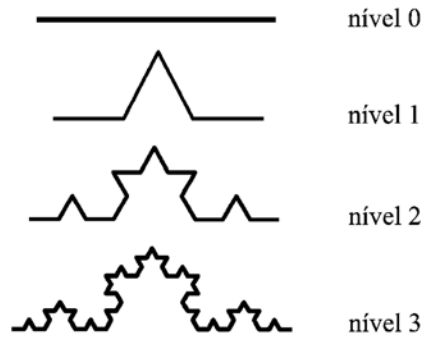


Figura 1.7: Curva de Koch (Retirado de Feder, 1989).

Nível	ε	$N(\varepsilon)$	$1/\varepsilon$	$\log_2(1/\varepsilon)$	$\log_2[N(\varepsilon)]$
0	1	1	1	0	0
1	$1/3$	4	3	1.585	2
2	$1/9$	16	9	3.169	4
3	$1/27$	64	27	4.754	6

De modo que a dimensão fractal D da curva de Koch

$$D = \frac{\log_2[N(\varepsilon)]}{\log_2(1/\varepsilon)} = 1.2618.$$

No próximo capítulo veremos que a dimensão fractal D está relacionado com o expoente de Hurst através da fórmula:

$$D = 2 - H. \tag{1.6}$$

CAPÍTULO 2

Método de Análise R/S

O método de análise R/S , foi desenvolvido por Hurst (1957), e é um método clássico para a análise de seqüências temporais. Hurst estudou problemas relacionados a construção de barragens. Durante muito tempo esse cientista estudou o comportamento do rio Nilo, envolvido na construção da barragem de Assuã. Pretendia determinar o volume ideal de armazenamento de água em um reservatório, baseado na vazão de água ao longo do tempo. O método R/S surgiu, então, como uma tentativa de se resolver o problema de um reservatório finito submetido a um fluxo de entrada aleatória. Um reservatório ideal deve ter as seguintes propriedades:

- (i) o volume de água fornecido deve ser constante;
- (ii) o nível de água após um determinado periodo deve permanecer constante;
- (iii) o lago não deve encher demais para não extravasar;
- (vi) a capacidade de armazenamento deve ser a menor possível.

As condições (i) e (ii) determinam que o volume de água liberado por ano seja igual ao volume médio de água que entra no reservatório durante um periodo de τ anos. Chamando o influxo de água no reservatório por $\xi(t)$, define-se o influxo médio no periodo de τ anos como:

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \quad (2.1)$$

Como há variação na quantidade de fluxo de entrada, em cada ano sempre haverá uma diferença em relação a média do período para mais ou para menos. Essas diferenças em relação a média sempre devem ser somadas de modo cumulativo. Representando por $X(t, \tau)$ a acumulação dessa diferença, a melhor expressão para essa situação é:

$$X(t, \tau) = \sum_{t=1}^{\tau} [\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}]. \quad (2.2)$$

O valor máximo e o mínimo de $X(t, \tau)$ representam o volume máximo e mínimo que

passará pelo reservatório durante todo o periodo analisado. A diferença entre os valores máximo e mínimo representa a amplitude R .

$$R(t, \tau) = \text{Max}X(t, \tau) - \text{Min}X(t, \tau). \quad (2.3)$$

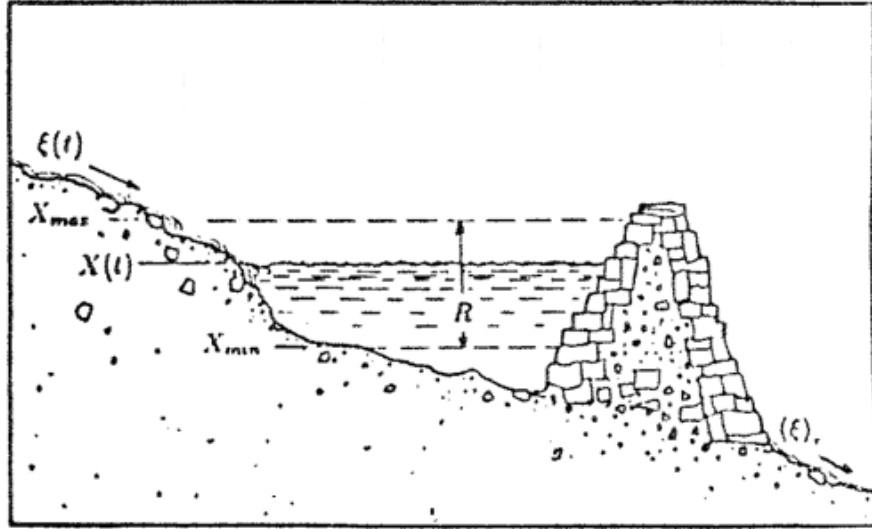


Figura 2.1: Reservatório de água mostrando as variáveis da análise R/S (Retirado de Feder, 1989)

De modo que a capacidade de armazenamento necessária para satisfazer as quatro condições acima é dada por $R(t, \tau)$. Como $R(T)$ depende do fluxo $\xi(t)$, que por sua vez depende do periodo considerado T . Depois de inúmeras experiências, Hurst percebeu que R dependia do periodo T com uma lei de potência,

$$\frac{R}{S} = C(\tau)^H. \quad (2.4)$$

onde C representa uma constante e H é conhecido como expoente de Hurst. Afim de comparar fenômenos de origem e características diferentes, Hurst chegou a conclusão que era necessário dividir R pelo desvio padrão S , tornando assim a variável R/S um número adimensional, tendo assim para cada valor de escala T um número R/S .

$$S(t, \tau) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{\tau} [\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}]^2}{\tau}}. \quad (2.5)$$

Essa técnica estatística para o cálculo de R/S é denominada *Rescaled-Range* ou análise de reescalonamento.

Ao aplicar-se logaritmo na equação (2.4), obtem-se:

$$\log(R/S) = H \log(\tau) + \log(C). \quad (2.6)$$

Construindo o gráfico $\log(R/S) \times \log(T)$, obtemos H que além de representar a inclinação da reta também traz informações sobre as características da série analisada. Além disso, o expoente de Hurst H tem a capacidade de informar sobre a persistência, ou não, do processo, como também informações sobre correlação, que é dada por:

$$C = 2^{(2H-1)} - 1. \quad (2.7)$$

Em que, C é a medida de correlação. Têm-se assim três possibilidades:

1) Para $0.5 < H < 1$: Persistência, um incremento positivo (negativo) no passado aumenta a possibilidade de um incremento positivo (negativo) no futuro, indicando assim um sistema positivamente correlacionado.

2) Para $0 \leq H < 0.5$: Antipersistência, um incremento positivo (negativo) no passado resultarão em um provável incremento negativo (positivo) no futuro, indicando assim um sistema negativamente correlacionado.

3) Para $H = 0.5$: Sistema descorrelacionado, o comportamento do sistema é similar ao movimento aleatório (movimento Browniano)

Os valores de H , para os casos 1 e 2, indicam que o sistema refere-se a um processo de memória longa com componente aleatório, onde um evento passado tem efeito sobre um evento futuro. Fazendo uma analogia, para um melhor entendimento, com o movimento de um bêbado ao longo de uma linha, tem-se que se os passos do bêbado são persistentes, um passo para frente será seguido, provavelmente, por outro passo para a frente, levando-o assim para distâncias cada vez mais longe da origem. Se, no entanto, considerar-se passos antipersistentes, um passo para a frente, provavelmente, será seguido de um passo para trás, e isso o manterá sempre próximo a origem. Dessa maneira o expoente H traz informações sobre a geometria do perfil analisado, como podemos observar na Figura 2.2. A partir da relação

$$D = 2 - H, \quad (2.8)$$

pode-se calcular a dimensão fractal D . De modo que quanto menor o valor de H (e consequentemente maior o de D), maior será a área ocupada pelo gráfico. Traçando o gráfico da distância à origem versus tempo, pode-se perceber como a rugosidade aumenta a uma taxa maior ou menor dependendo de quão persistente ou antipersistente é o sistema. O valor de $H = 0.5$ caracteriza o movimento browniano, que é um conceito que descreve o movimento

aleatório de partículas. Há um padrão escondido nesse movimento aleatório que o classifica como um movimento fractal, pois descreve um padrão dinâmico bem definido.

H	D
0.1	1.9
0.5	1.5
0.9	1.1

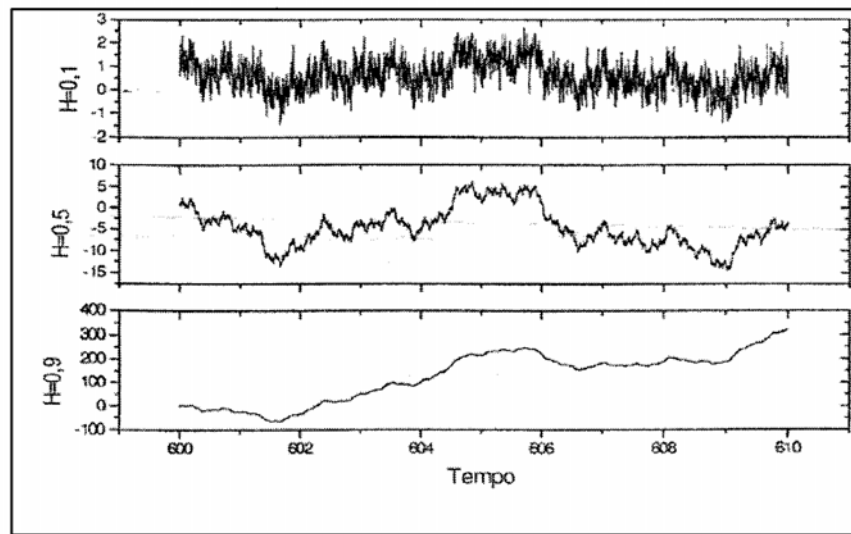


Figura 2.2: Rugosidade de uma sistema em função de H . Os valores de D associados estão na tabela em anexo

Hewett (1986) apresentou a primeira aplicação prática da análise R/S em estudos de reservatórios de petróleo, utilizando essa estatística para determinar o valor de H em registros de perfis elétricos de poço e aplicar este parâmetro em propriedades de rochas. Ainda na área de petróleo, a análise R/S foi aplicada por vários outros autores.

2.1 Teste de Validade para a Lei de Hurst

Hurst realizou vários testes com moedas para criar uma sequência aleatória de caras e coroas com igual probabilidade de ocorrência. Por serem eventos independentes, o resultado esperado é 0.5, como de fato foi comprovado pelo pesquisador.

Feder reproduziu esses experimentos utilizando simulações por computador, gerando sequências muito maiores e mais significativas. Para isso utilizou um gerador de números aleatórios para construir uma sequência de valores $+1$ e -1 escolhidos com igual probabilidade relacionando o número $+1$ com cara e -1 com coroa. A variável $\xi(t)$ considerada para

análise R/S é formada pela soma de 10 números, repetindo-se o processo até o número total N (50000) de amostras. O valor obtido foi $H = 0.503 \pm 0.008$.

Esses pesquisadores também testaram o método criando um viés em um jogo de cartas para simular valores diferentes de 0.5 encontrados em registros físicos. Utilizando um baralho onde as cartas eram numeradas segundo uma frequência de uma população normal, em ± 1 , ± 3 , ± 5 e ± 7 . Assim, nas 52 cartas haviam 26 números 1, 16 números 3, 8 números 5 e 2 números 7. Após misturar bem, o baralho era “cortado” ao acaso e o número do corte anotado, gerando uma sequência aleatória com $H = 0.5$. Retirando algumas cartas após o terceiro corte, segundo regras pré-estabelecidas, e introduzindo um coringa no jogo, Hurst conseguiu criar um viés na distribuição previamente obtida. Utilizando um número maior de dados, Feder obteve o valor de $H = 0.65 \pm 0.2$.

CAPÍTULO 3

Revisão de Análise Espectral

3.1 Introdução

A análise espectral, ou análise de Fourier, de uma série consiste em expressar uma função como uma somatória de funções trigonométricas de senos e cossenos. Um dos princípios fundamentais na análise de Fourier é que um sinal, com período $2L$ definido no intervalo $[-L, L]$ pode ser representado, segundo Hsu (1970) por:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]. \quad (3.1)$$

Em que os coeficientes a_n e b_n são os coeficientes de Fourier, cujos valores são deduzidos do fato de que as funções seno e cosseno formam uma base ortogonal e são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad n > 0.$$

Como $f(t)$ terá o período $T = 2L$, a frequência angular ω_n será dada por $\omega_n = (2\pi/T)n = (\pi/L)n$, de modo que é usual escrever a equação (3.1) como:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi_n}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi_n}{L}t\right) \right]. \quad (3.3)$$

Como a análise espectral de uma série de dados mostra como a energia é distribuída numa faixa de frequências, a transformada de Fourier é uma técnica muito útil, pois decompõe

um sinal em suas componentes elementares seno e cosseno. A transformada de Fourier aplicado a um sinal no domínio espacial ou temporal gera uma informação no domínio da frequência. A denominação é uma homenagem ao matemático francês Joseph Fourier que provou, no início do século XIX, que qualquer forma de onda, independente de sua origem, é um somatório de ondas senoidais de diferentes frequências, amplitudes e fases.

3.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier $X(w)$ de uma função $x(t)$ é definida por:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{iwt} dt , \quad (3.4)$$

sendo que a transformada inversa de $x(t)$ é definida por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{-iwt} dw . \quad (3.5)$$

Faremos agora uma aplicação da transformada de Fourier com a função:

$$x(t) = te^{-\alpha t} , \quad (3.6)$$

onde α é um parâmetro. A transformada de fourier dessa função pode ser calculada como segue:

$$X(w) = \int_0^{\infty} te^{-iwt} e^{-\alpha t} dt , \quad (3.7)$$

Resolvendo a integral por partes

$$X(w) = t \frac{e^{-t(\alpha+iw)}}{-(\alpha+iw)} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\alpha+iw)}}{-(\alpha+iw)} dt ,$$

$$X(w) = t \frac{e^{-t(\alpha+iw)}}{-(\alpha+iw)} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-t(\alpha+iw)}}{-(\alpha+iw)^2} \Big|_0^{\infty} ,$$

Assim a primeira parte da expressão tende a zero, e o resultado final é

$$X(w) = \frac{1}{(\alpha+iw)^2} . \quad (3.8)$$

sendo $w = 2\pi f$.

A análise espectral de uma série de dados de um certo ajuste mostra como a energia é distribuída numa faixa de frequências, para o ruído branco a energia é distribuída para todas as frequências, isto é, o espectro de potência pode ser aproximado por uma curva suave com $b = 0$. As densidades espectrais $P(f)$ dos registros de dados quaisquer são calculadas por meio de periodogramas $P^*(f)$, que são um caminho freqüentemente usado para estimar a densidade espectral. O periodograma dá a decomposição em frequência da potência de uma função sobre um dado intervalo e para uma série de dados é definida como:

$$P^*(f) = \frac{1}{2\pi N_{max}} \left| \sum_{n=1}^t [x(t) - \mu] e^{(-ift)} \right|^2, \quad (3.9)$$

onde N_{max} é o número total de dados, $x(t)$ é a série temporal e μ é uma média da série. Para uma série discreta de dados pode-se utilizar a transformada discreta de Fourier.

3.3 Transformada Discreta de Fourier

Se ao desejar obter a transformada de Fourier de uma função dada, pode acontecer que a função esteja definida nos termos de uma variável independente contínua, como é mais freqüente nos livros, entretanto pode acontecer também que os valores da função estejam dados somente em valores discretos da variável independente, como em medidas físicas feitas em intervalos regulares do tempo. Não obstante a forma da função, se a transformada for avaliada por computação numérica, os valores da transformada irão ser avaliados somente em intervalos discretos.

Seja uma seqüência x_m que represente N amostras consecutivas de um sinal contínuo $x(t)$. A transformada discreta de Fourier (DFT) de N termos é definida por:

$$X(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-i2\pi(\omega/N)t}, \quad (3.10)$$

e a transformada discreta de Fourier inversa sendo dada por:

$$x(t) = \sum_{\omega=0}^{N-1} X(\omega) e^{i2\pi(\omega/N)t}. \quad (3.11)$$

O símbolo ν foi escolhido nesse caso, em vez de f , para enfatizar que a frequência integral está relacionada a frequência mas não é a mesma frequência f . Por exemplo, se o intervalo de uma amostra é 1 segundo e há 8 amostras ($N = 8$), então o componente da

freqüência f será dado por $\nu = 8f$; inversamente, a freqüência representado pela freqüência integral $\nu = 1$ será $\frac{1}{8} Hz$.

3.3.1 Falseamento

Como uma DFT é apenas uma aproximação da transformada de Fourier e fornece resultado apenas para um conjunto finito de freqüências discretas, é natural que o resultado não seja preciso, haverá então um fenômeno denominado efeito de *aliasing* ou falseamento. Esse efeito ocorre sempre que as amostras iniciais não forem espaçadas suficientemente próximas para representar os componentes da alta freqüência, ou seja, o sinal indesejável do *aliasing* é uma réplica do sinal original, porém com a freqüência errada. Matematicamente, os efeitos de *aliasing* ocorrem para qualquer sinal com freqüência maior que a freqüência de Nyquist.

3.4 Transformada Rápida de Fourier - FFT

Há vários caminhos para se entender a transformada rápida de Fourier (FFT). Um caminho mais simples está nos termos da fatorização da matriz da transformada. Da definição, proposta por Bracewell (1986) podemos escrever a relação DFT (para $N = 8$) na forma da matriz,

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \\ X(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \\ x(8) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde $W = e^{-i2\pi/N}$. O valor W é a enésima raiz da unidade, ou seja, $W^N = e^{-i2\pi} = 1$. Isso pode ser pensado como um número complexo cujo módulo é a unidade e cuja fase é $-(1/N) Hz$.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \\ X(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \\ x(8) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A fatorização toma apenas 2 elementos não nulos em cada linha. Em (3.12) há N^2 multiplicações, mas há somente $2N$ multiplicações por fator se usarmos (3.13). E o número de fatores M será dado por $2^M = N$ se não utilizarmos o primeiro fator, que representa meramente o rearranjo. Então o número total de multiplicações será $2N \log_2 N$. O exame dos fatores mostra que muitas das multiplicações são triviais, conseqüentemente para calcular o tempo preciso será necessária atenção cuidadosa aos detalhes.

A função $x(t) = te^{-\alpha t}$ foi discretizada em 360 pontos. Foi escolhido $N = 360$ visto que as séries temporais disponíveis têm essa extensão. Fazendo uma comparação entre o resultado exato da Transformada de Fourier, obtido aqui, e a transformada rápida de Fourier, obtido pelo algoritmo utilizado nesse trabalho, chegou-se ao resultado mostrado na Figura 3.1. Podemos observar que houve uma excelente superposição, validando assim esse programa.

3.4.1 Freqüência de Nyquist

De acordo com o teorema de Nyquist, a quantidade de amostras por unidade de tempo de um sinal, chamada taxa ou freqüência de amostragem, deve ser maior que o dobro da maior freqüência contida no sinal a ser amostrado, para que possa ser reproduzido sem

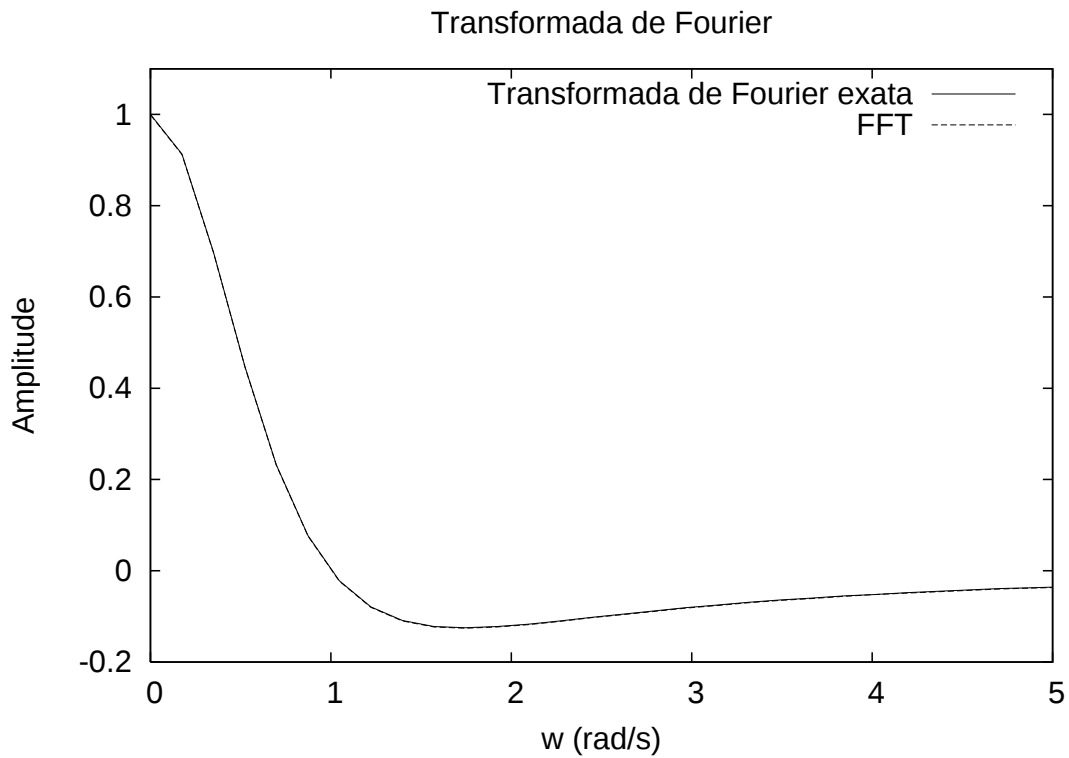


Figura 3.1: Parte real da transformada de Fourier da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$.

erro de *aliasing*. A metade da frequência de amostragem é chamada frequência de Nyquist (f_N) e corresponde ao limite máximo de frequência do sinal que pode ser reproduzido (Bracewell, 1986).

$$f_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}. \quad (3.14)$$

O número total de amostras nesse trabalho para um período de 30 anos foi de $N = 360$, como cada amostra foi coletada em um mês, o intervalo de tempo $\Delta t = 1/12$ anos. O intervalo de frequência pode ser calculado, segundo Bassrei (2003), por:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}. \quad (3.15)$$

Assim teríamos como resultados para esse trabalho,

$$\Delta f = \frac{1}{360 \cdot (1/12)} = 0.0333.$$

E a frequência de Nyquist,

$$f_N = \frac{1}{2 \cdot (1/12)} = 6 \text{ ciclos.}$$

3.5 Espectro de amplitude

Um gráfico onde se marcam no eixo horizontal as frequências angulares e no eixo vertical os valores dos coeficientes c_n das séries. O coeficiente c_n é definido por:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-L}^L f(t) \cos(\omega_n t) dt - i \int_{-L}^L f(t) \text{sen}(\omega_n t) dt \right],$$

$$c_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-L}^L f(t) [\cos(\omega_n t) - i \text{sen}(\omega_n t)] dt \right],$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad (3.16)$$

onde $\omega_n = (2\pi/T)n$, $T = 2L$ e os coeficientes a_n e b_n foram definidos na equação (3.2).

O espectro de amplitude pode ser dado pela relação entre as partes real e imaginária da função no domínio da frequência, ou seja,

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}\{X(w)\}^2 + \text{Im}\{X(w)\}^2}. \quad (3.17)$$

3.6 Espectro de potência

Assumindo que o conteúdo energético de uma função $x(t)$ é finito, isso é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \text{finito}. \quad (3.18)$$

Para essas funções, a potência média sobre o intervalo T tende a zero assim como T tende ao infinito.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-L}^L [x(t)]^2 dt = 0. \quad (3.19)$$

Considerando sinais em que não há conteúdo energético finito, a potência média de $f(t)$ é a quantidade

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-L}^L [x(t)]^2 dt. \quad (3.20)$$

Quando esse limite existe, a quantidade

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-L}^L x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (3.21)$$

é chamado espectro de potência ou densidade espectral de potência de uma função $x(t)$.

Calcularemos agora o espectro de amplitude e o de potência para a função dada pela equação (3.6). No domínio da frequência, a função é dada por

$$X(w) = \frac{1}{(\alpha + iw)^2}. \quad (3.22)$$

Para o cálculo do espectro de amplitude, é necessário separar as partes real e imaginária da equação (3.22),

$$Re\{X(w)\} = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4}, \quad (3.23)$$

e

$$Im\{X(w)\} = -\frac{2\alpha\omega}{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4}. \quad (3.24)$$

O espectro de amplitude será

$$A(\omega) = \sqrt{Re\{X(w)\}^2 + Im\{X(w)\}^2}.$$

Assim,

$$A(\omega) = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4}. \quad (3.25)$$

O espectro de potência é dado pelo quadrado do espectro de amplitude, isto é,

$$P(\omega) = [A(\omega)]^2. \quad (3.26)$$

Então,

$$P(\omega) = \left[\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4} \right]^2. \quad (3.27)$$

Podemos ver os gráficos dos espectros nas Figuras 3.2 e 3.3.

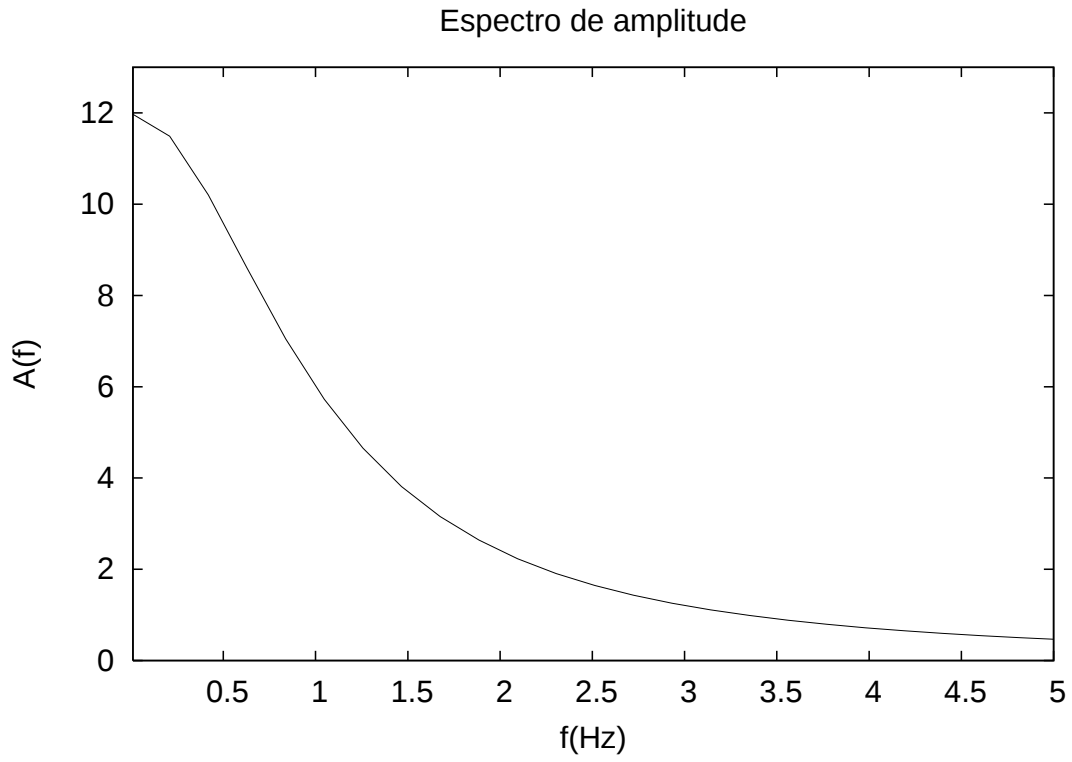


Figura 3.2: Espectro de amplitude da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$.

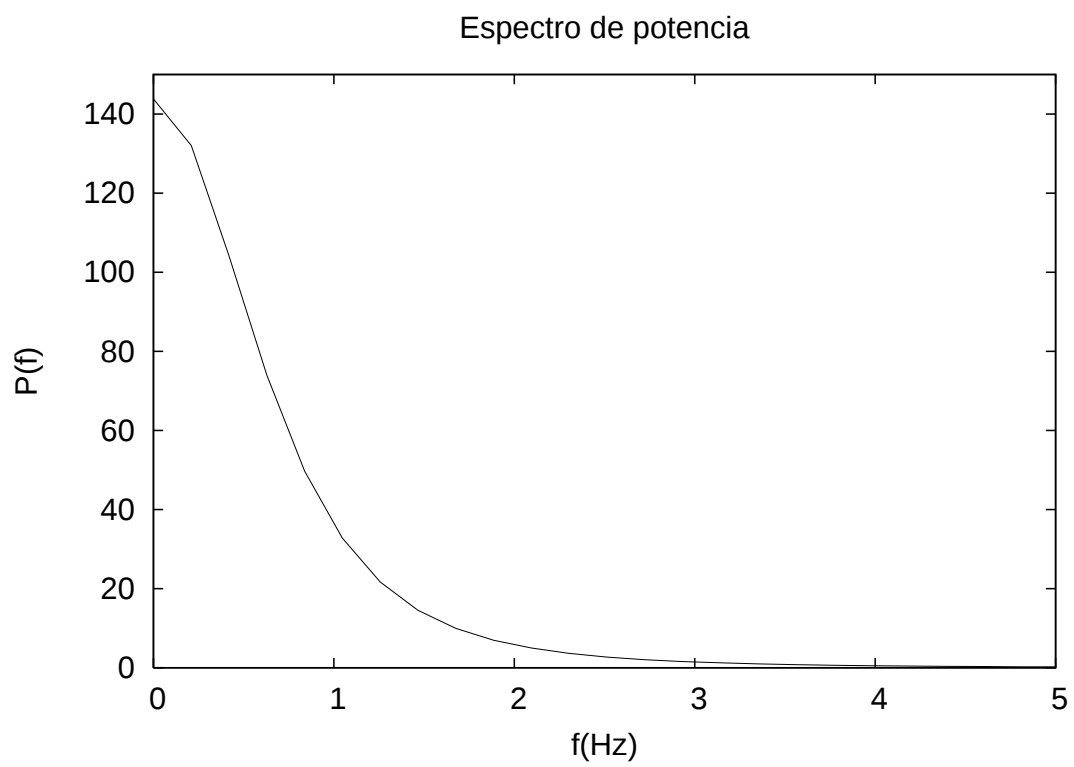


Figura 3.3: Espectro de potência da função $x(t) = te^{-\alpha t}$, com $\alpha = 1$.

CAPÍTULO 4

Conjunto de Dados Utilizados

No desenvolvimento desse trabalho, usou-se dados coletados no Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Os dados foram adquiridos no Quarto Distrito de INMET, sendo coletados na Estação Salvador, que está localizado nas coordenadas $13^{\circ}01'$ da latitude sul, e $38^{\circ}31'$ da longitude oeste. A altitude do local é 51.41 m .

Os dados analisados foram: precipitação (mm), pressão atmosférica (hPa), evaporação (mm), umidade (%), insolação (W/m^2), além de temperaturas máxima, mínima e média ($^{\circ}C$).

Todos os dados amostrados estão na forma de valores mensais, que foram adquiridos no período de 30 anos, entre 1961 e 1990, de modo que o número total de amostras é de 360 para cada parâmetro.

A precipitação, dada em mm , pode ser vista na Figura 4.1. Pode-se notar um caráter periódico, com relativamente poucos picos acima de 400 mm . A pressão atmosférica, dada em hPa e vista na Figura 4.2, apresenta um comportamento anômalo nos primeiros anos da série, tornando-se periódica para o restante.

A evaporação, dada em mm e vista na Figura 4.3, também apresenta comportamento anômalo em duas regiões do gráfico e um padrão bastante irregular para os demais pontos. A umidade, dada em porcentagem, e a insolação, dada em W/m^2 , podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 4.4 e 4.5, e apresentam um padrão de regularidade.

Os registros de temperatura, dados em $^{\circ}C$, podem ser vistos nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8. Pode-se notar um caráter bastante regular com poucos picos acima dos $32^{\circ}C$ para a temperatura máxima, e $28^{\circ}C$ para temperatura média.

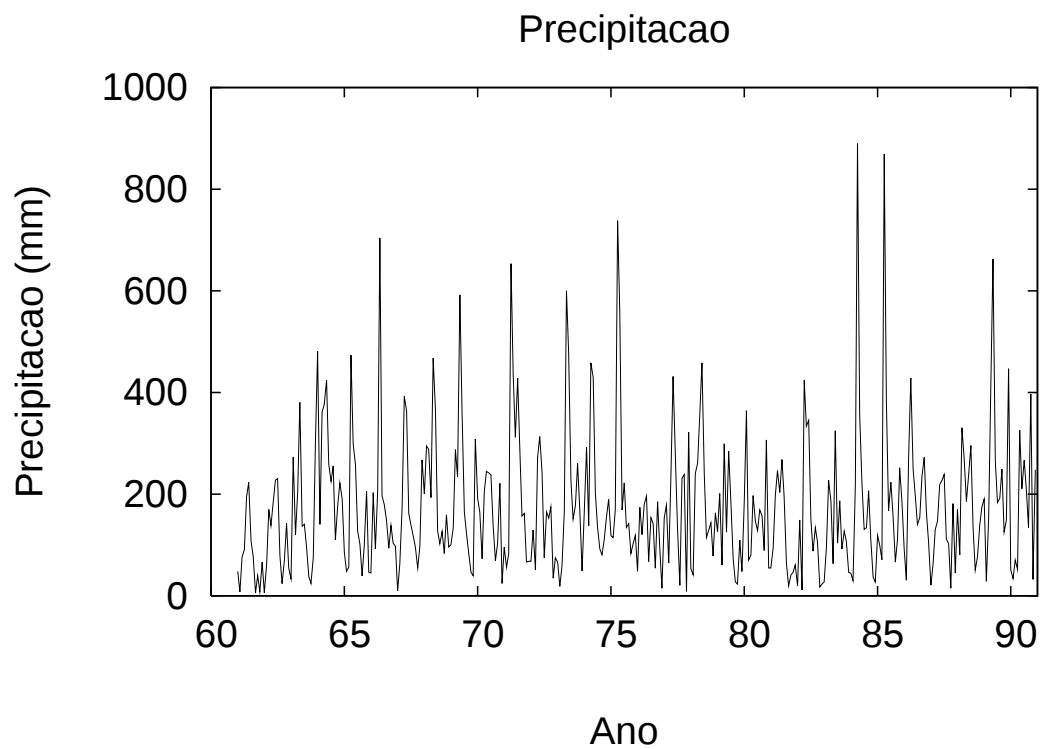


Figura 4.1: Precipitação (mm), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

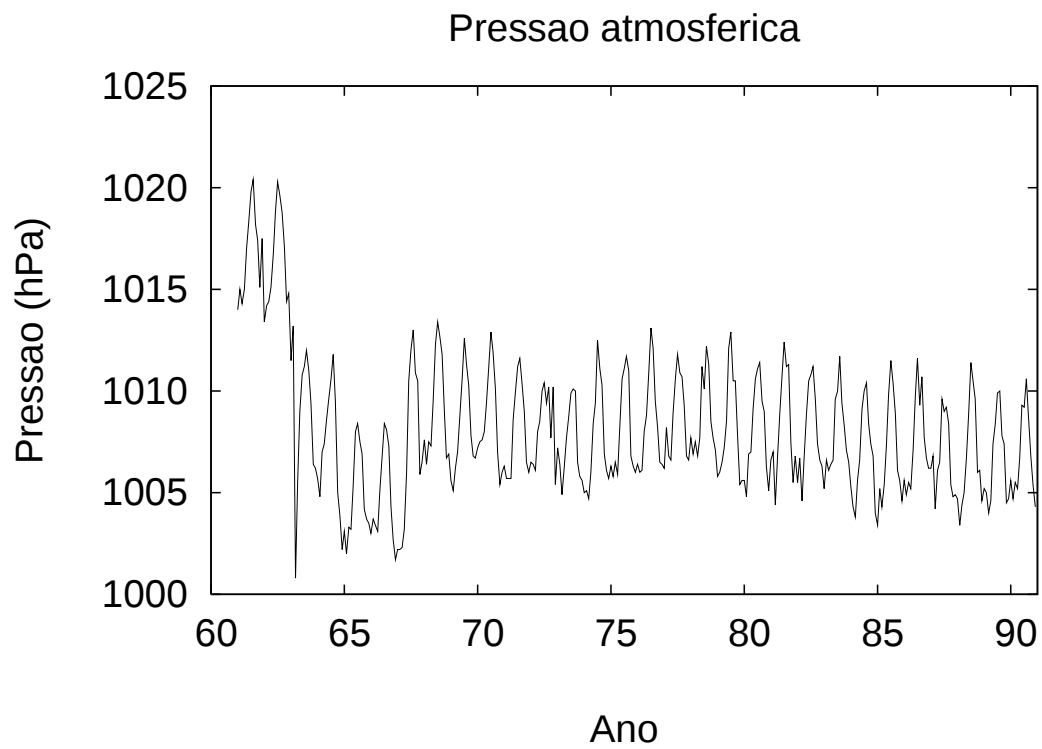


Figura 4.2: Pressão atmosférica (hPa), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

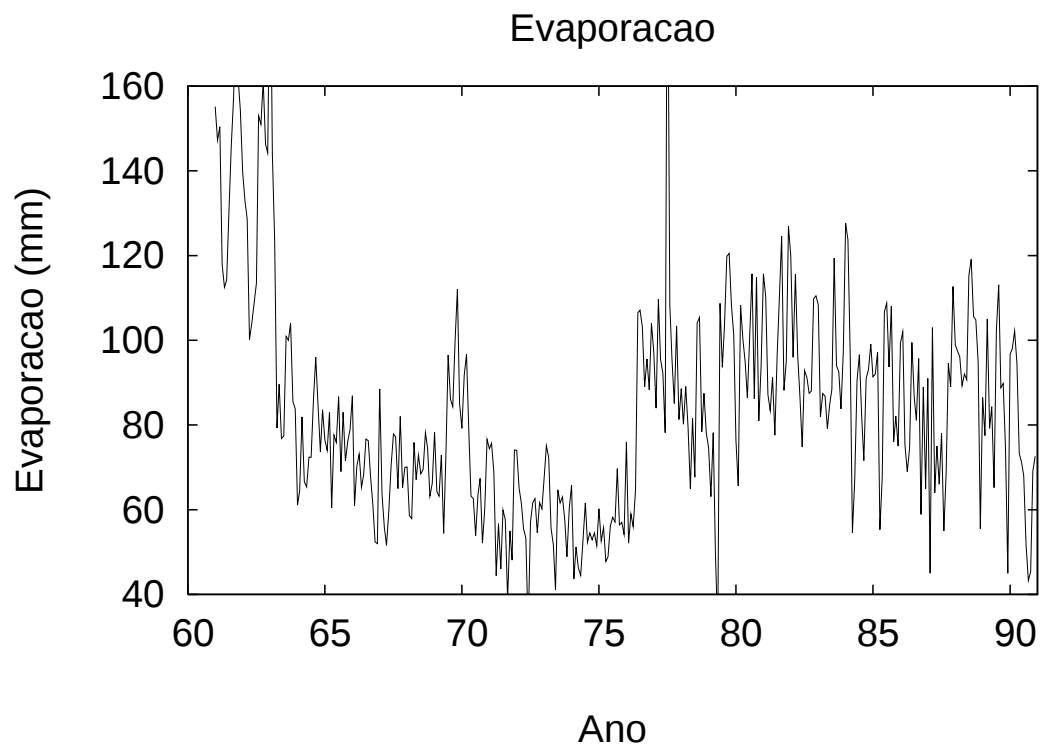


Figura 4.3: Evaporação (mm), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

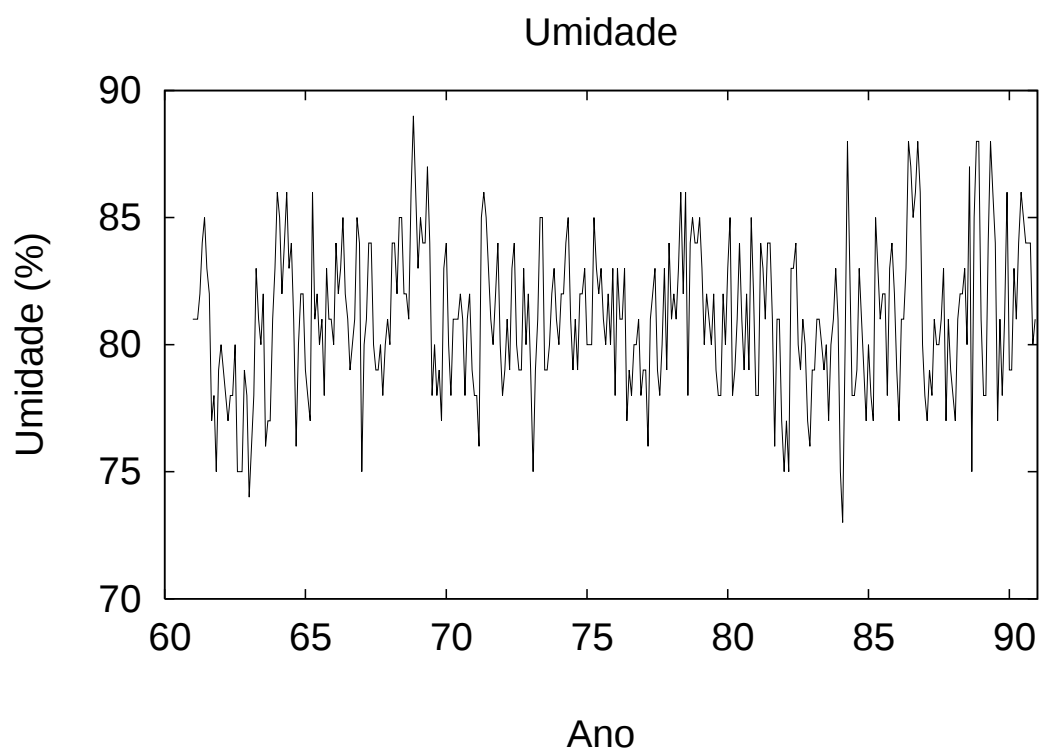


Figura 4.4: Umidade (%), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

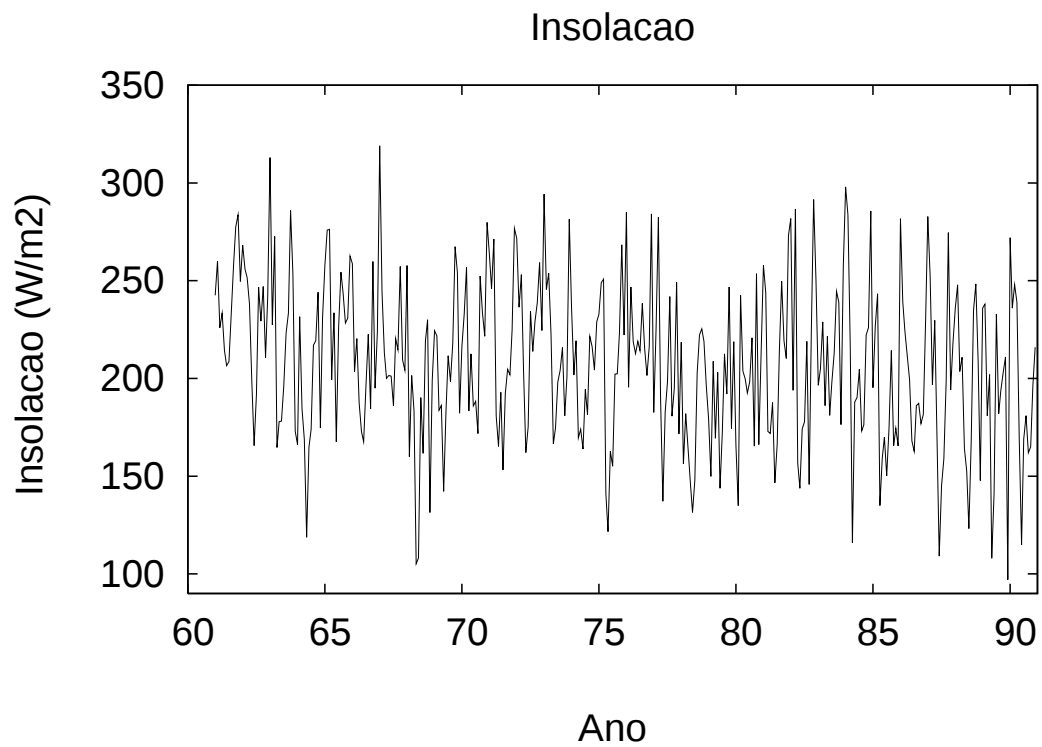


Figura 4.5: Insolação (W/m^2), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

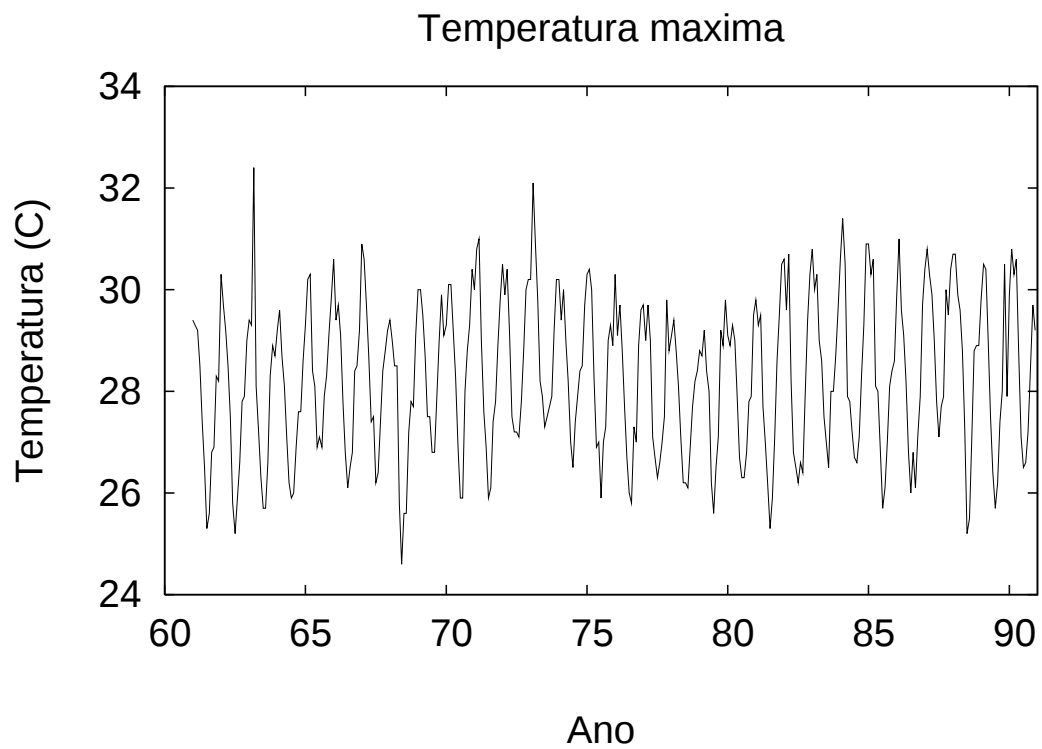


Figura 4.6: Temperatura máxima ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

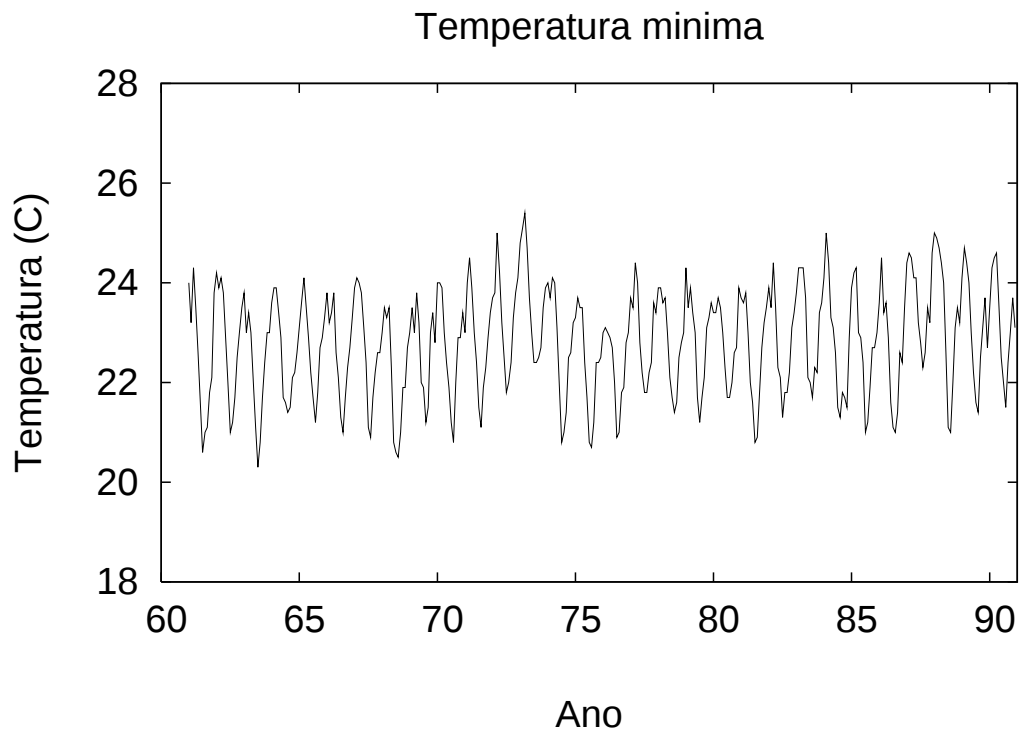


Figura 4.7: Temperatura mínima ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

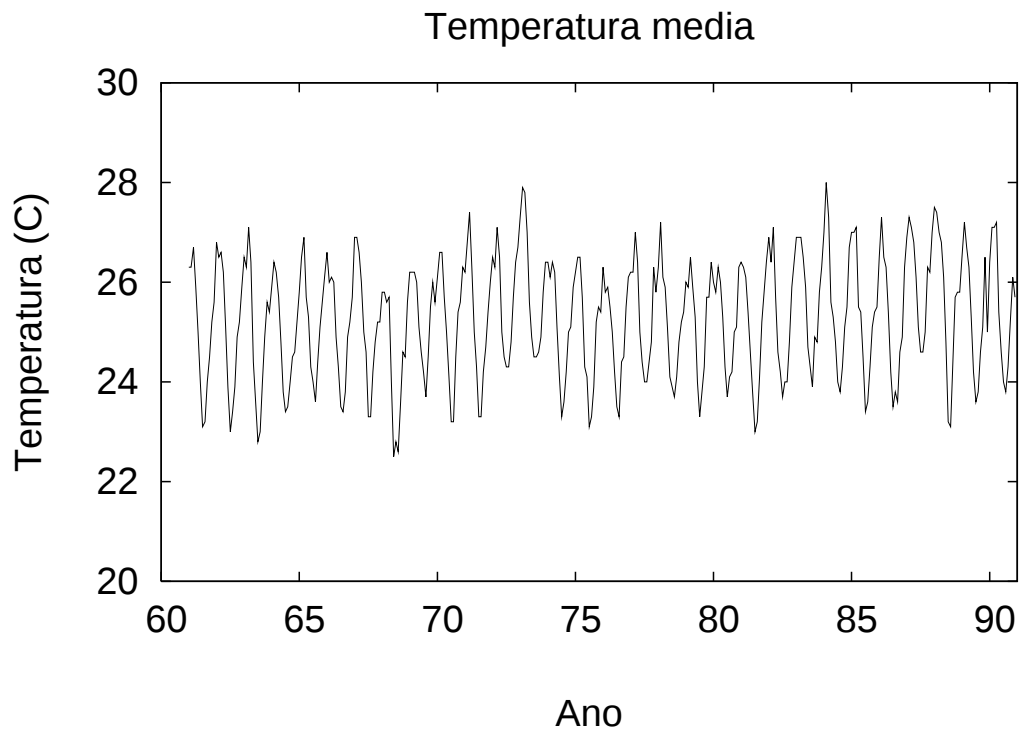


Figura 4.8: Temperatura média ($^{\circ}C$), coletada na Estação Salvador, entre 1961 e 1990.

CAPÍTULO 5

Aplicação do Método de Análise R/S

Utilizando dados obtidos em Salvador, durante todos os meses entre os anos de 1960 e 1990 totalizando assim 360 amostras para cada um dos parâmetros (precipitação, ensolação, umidade, pressão atmosférica, além de temperaturas máxima, mínima e média). Aos dados climáticos coletados foi aplicado a análise R/S . Adaptou-se para esse trabalho, um algoritmo desenvolvido por Beer (1994). A parte prática da análise divide o número total de observações N para cada série de dados em seqüências de amostras τ de diversos tamanhos. Os valores de τ foram 2, 3, 6, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 e 180; com os pontos de partida sendo $t = 1, 10, 20, 30, 40, 100, 200$ e 300. A utilidade do uso do ponto de partida é a quebra da série em subséries, evitando sobreposição de amostras, gerando assim valores de R/S independentes.

Para o cálculo do expoente H , foram plotados os valores de $\log R/S$ e de $\log \tau$, desses pontos foi feito um ajuste pelo método dos mínimos quadrados e chegou-se a uma reta de onde se retira o coeficiente angular, como pode ser visto nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8.

Os valores dos coeficientes de Hurst obtidos foram:

Parâmetro	Coeficiente de Hurst H
Temperatura média	0.625
Temperatura mínima	0.658
Temperatura máxima	0.617
Precipitação	0.618
Insolação	0.655
Pressão atmosférica	0.602
Umidade	0.676
Evaporação	0.869

Chierice, fazendo a análise R/S , obteve para H o valor de 0.743 para precipitação no município de Araras entre os anos de 1955 e 2000. Já Beer caracterizou séries de vários parâmetros em poços de hidrocarbonetos e obteve valores de H entre 0.790 e 0.946.

Miranda e Andrade utilizaram a análise R/S para calcular o expoente de Hurst de dados de precipitação em várias cidades do nordeste brasileiro, inclusive Salvador. Nessa cidade, encontrou para H os valores de 0.51, 0.48 e 0.53.

Nesse trabalho empregamos a metodologia aplicada por Leonardi que utilizou a análise R/S para testar a persistência de um sinal referente a uma série espacial de dados geofísicos de perfilagem de dois poços na Alemanha. Os valores encontrados para H variaram entre 0.6 e 0.8.

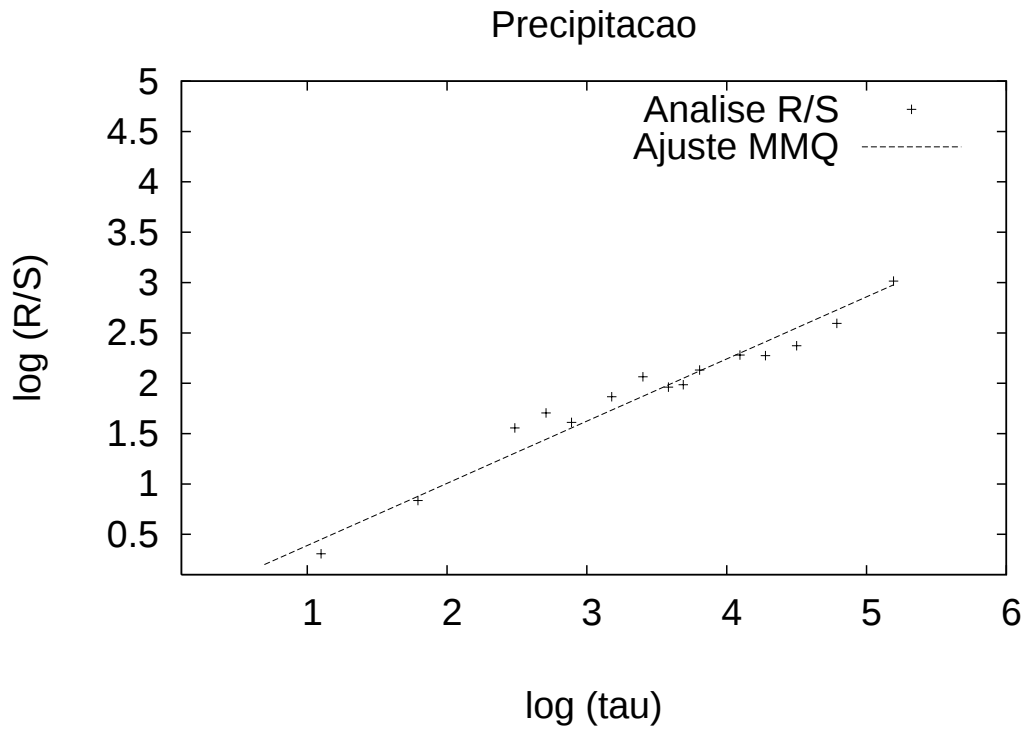


Figura 5.1: Análise R/S para precipitação.

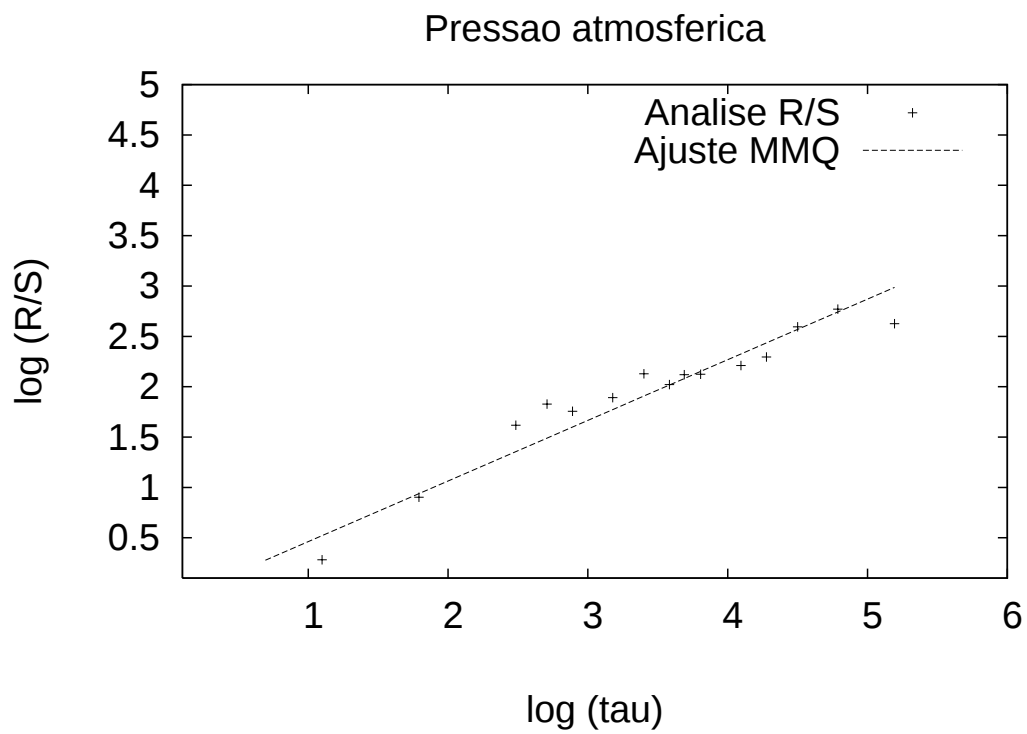


Figura 5.2: Análise R/S para pressão atmosférica.

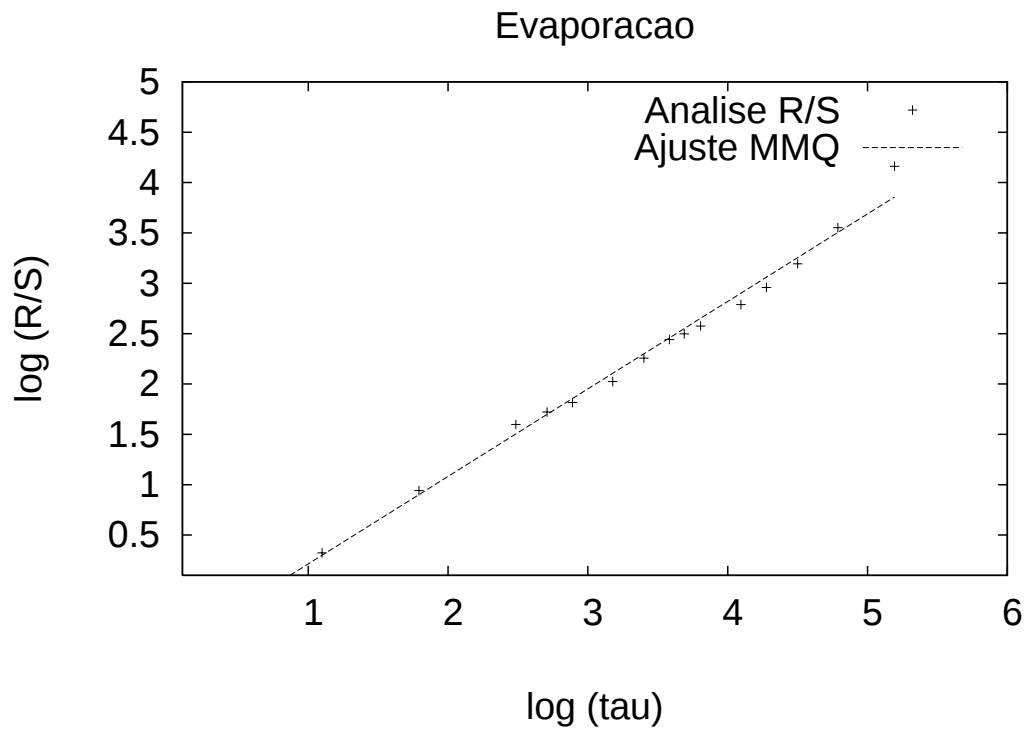


Figura 5.3: Análise R/S para evaporação.

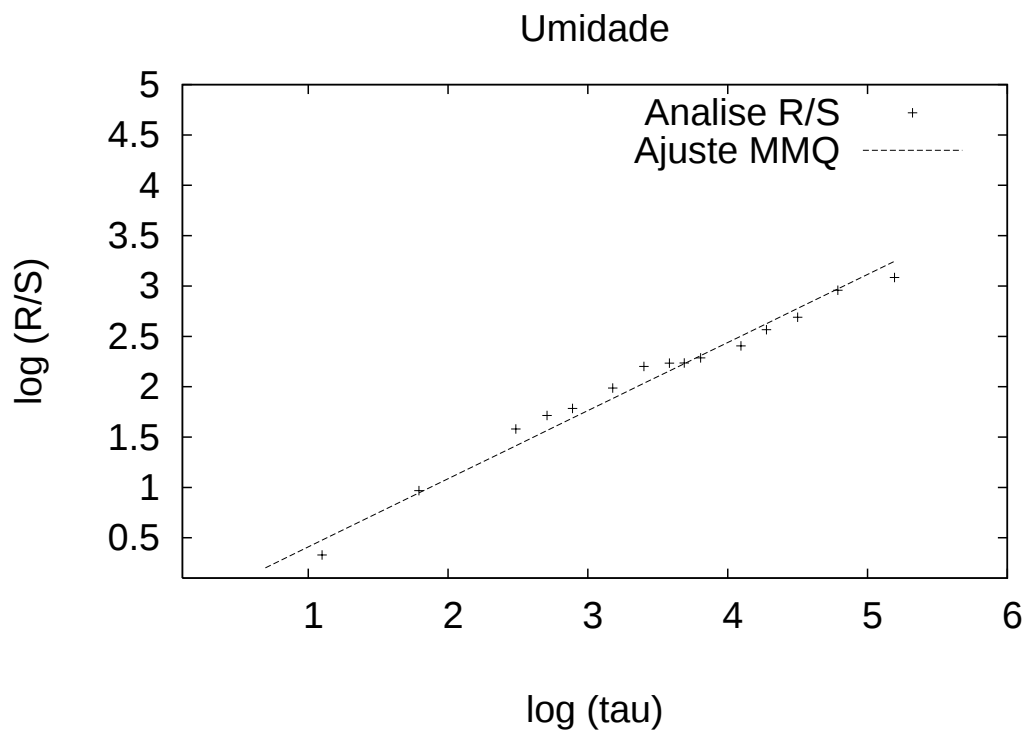


Figura 5.4: Análise R/S para umidade.

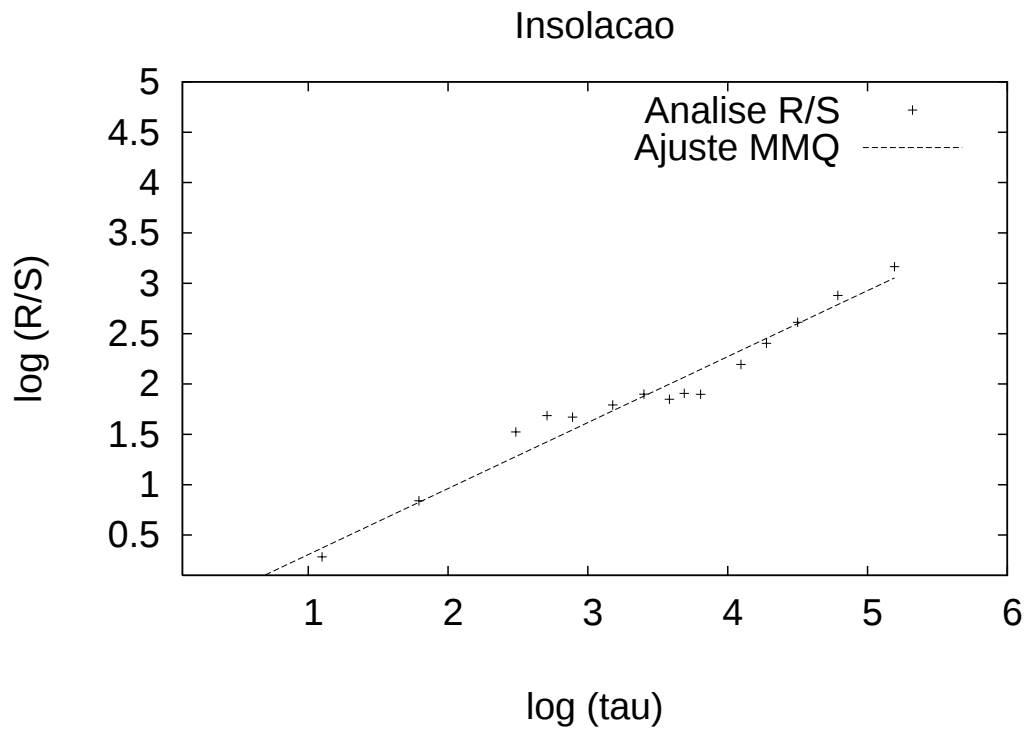


Figura 5.5: Análise R/S para insolação.

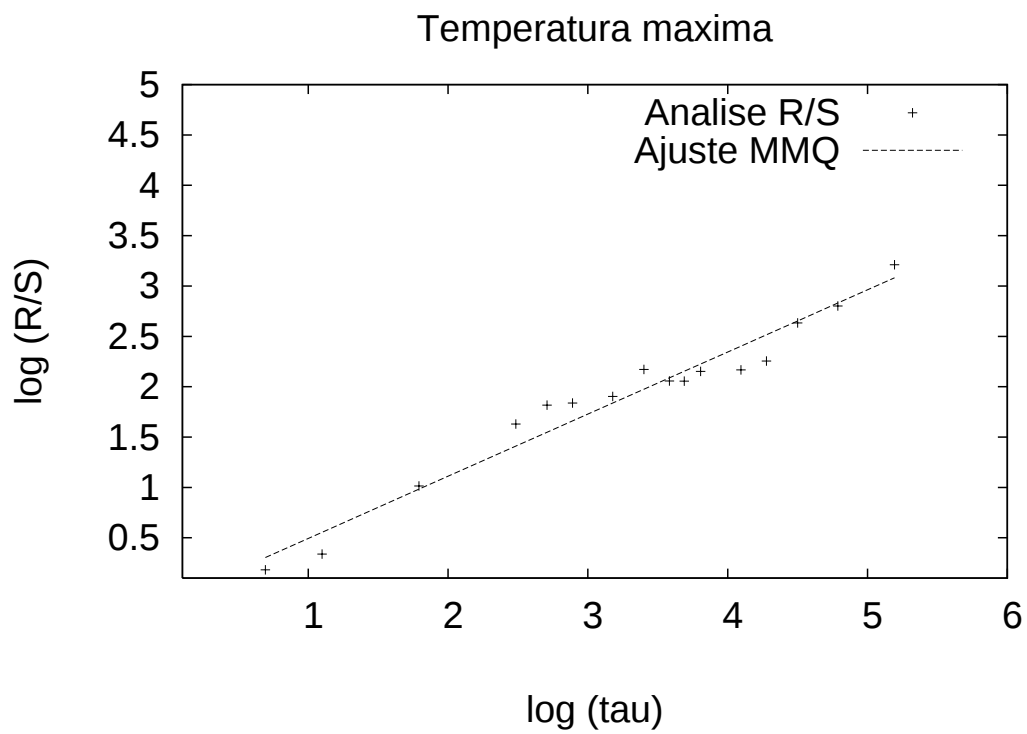


Figura 5.6: Análise R/S para temperatura máxima.

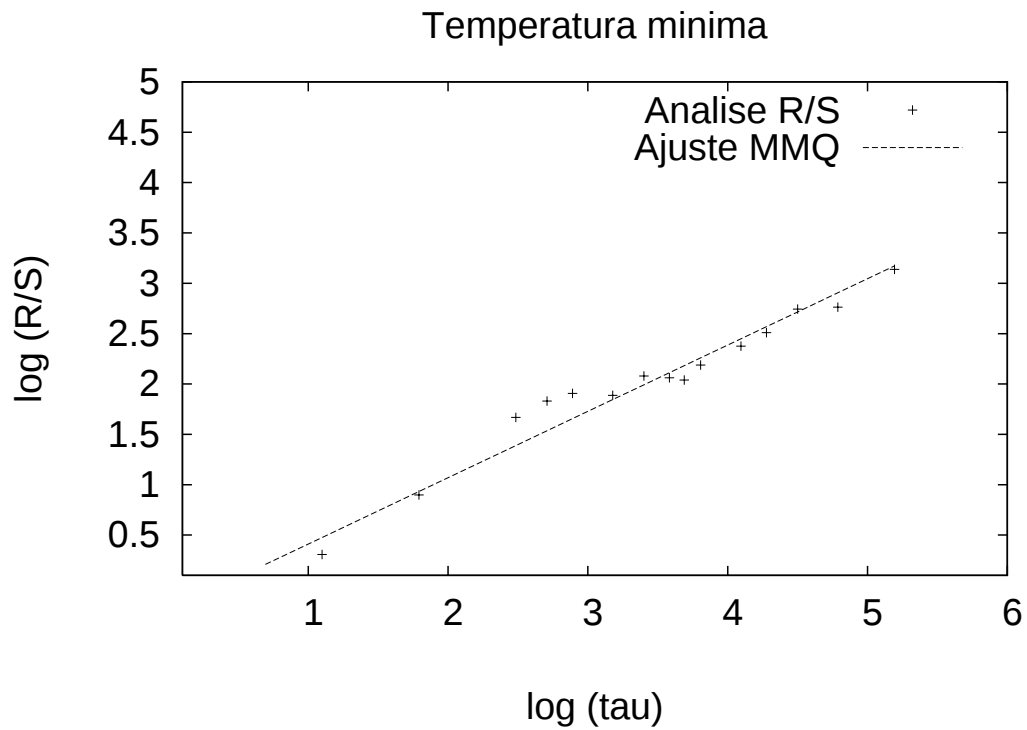


Figura 5.7: Análise R/S para temperatura mínima.

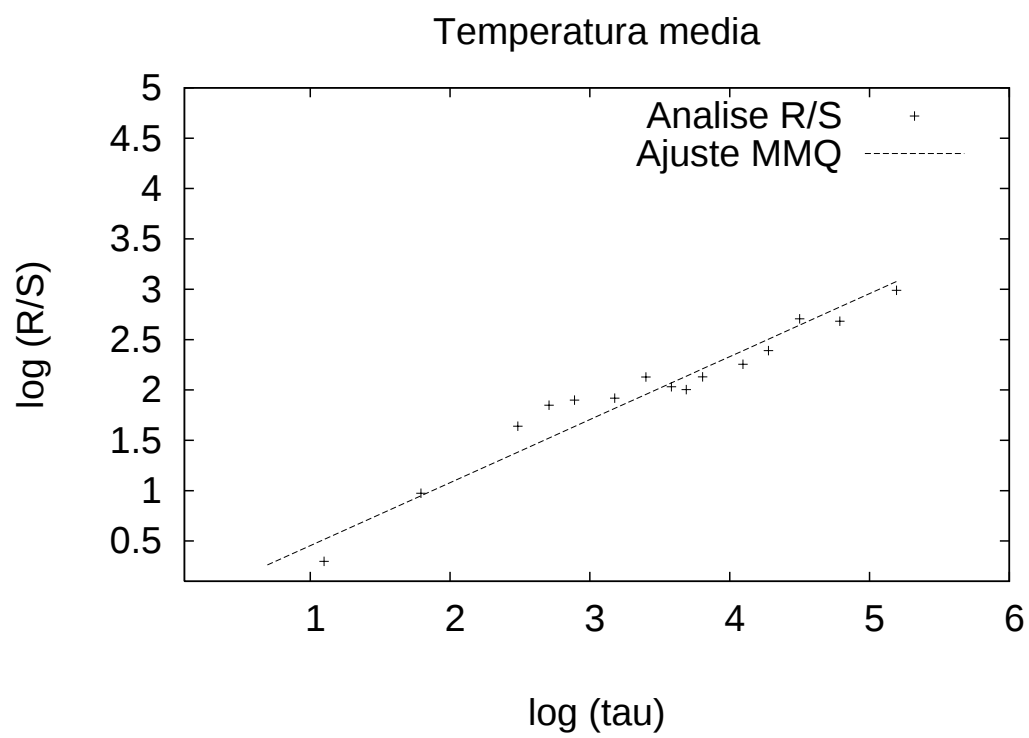


Figura 5.8: Análise R/S para temperatura média.

CAPÍTULO 6

Aplicação do Método de Análise Espectral

O número total de amostras nesse trabalho para um período de 30 anos foi de 360, como cada amostra foi coletada em um mês, o intervalo de tempo $\Delta t = 1/12$ ano. O intervalo de frequência será:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}. \quad (6.1)$$

Assim teríamos como resultados para esse trabalho,

$$\Delta f = \frac{1}{360 \cdot (1/12)} = 0.0333,$$

e a frequência de Nyquist,

$$f_N = \frac{1}{2 \cdot (1/12)} = 6 \text{ ciclos}. \quad (6.2)$$

Aplicando a FFT nas séries temporais, obtemos o espectro de Fourier, conforme Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8.

O resultado da transformada de Fourier aplicado às séries temporais fornece uma relação entre frequência e amplitude desses sinais. Analisando o espectro de frequências, pode-se destacar o valor de 0.0333, que corresponde ao período de 30 dias (um mês). Portanto pela FFT aplicada às séries temporais constatou-se uma periodicidade de um mês.

Com o resultado da transformada de Fourier, calculamos o espectro de potência para cada um dos parâmetros. Com o espectro de potência é possível calcular o expoente espectral b , que seria o coeficiente angular do ajuste do espectro de potência. Leonardi (1998) recomenda que seja feita uma diferença pela média e uma suavização desse espectro. A diferença é feita pela subtração dos dados pela média do conjunto, e pode ser representada pela parte entre colchetes da equação 6.3 que representa o espectro de potência,

$$P^*(f) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{n=1}^t [x(t) - \mu] e^{(-ift)} \right|^2, \quad (6.3)$$

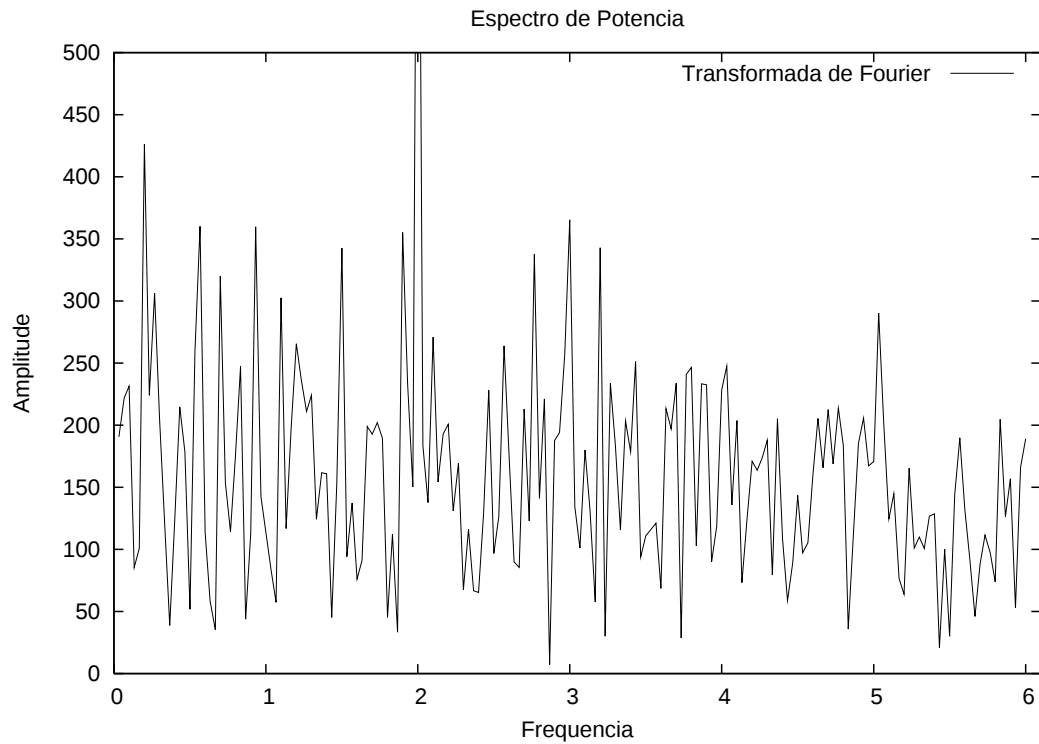


Figura 6.1: Transformada de Fourier da precipitação.

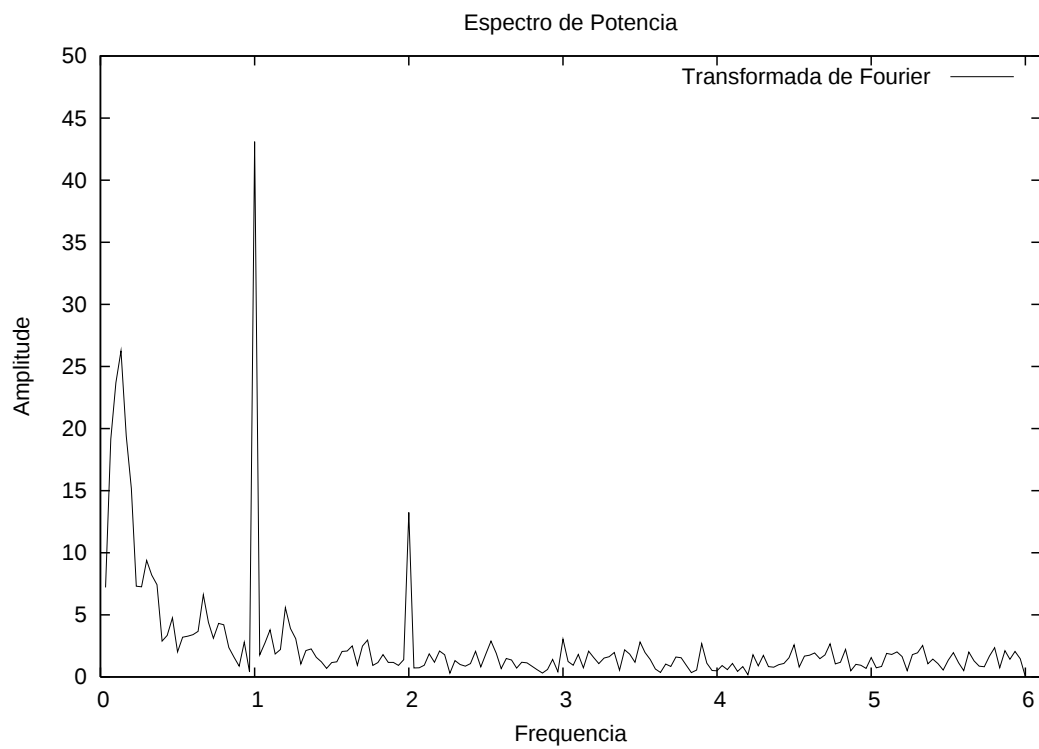


Figura 6.2: Transformada de Fourier da pressão atmosférica.

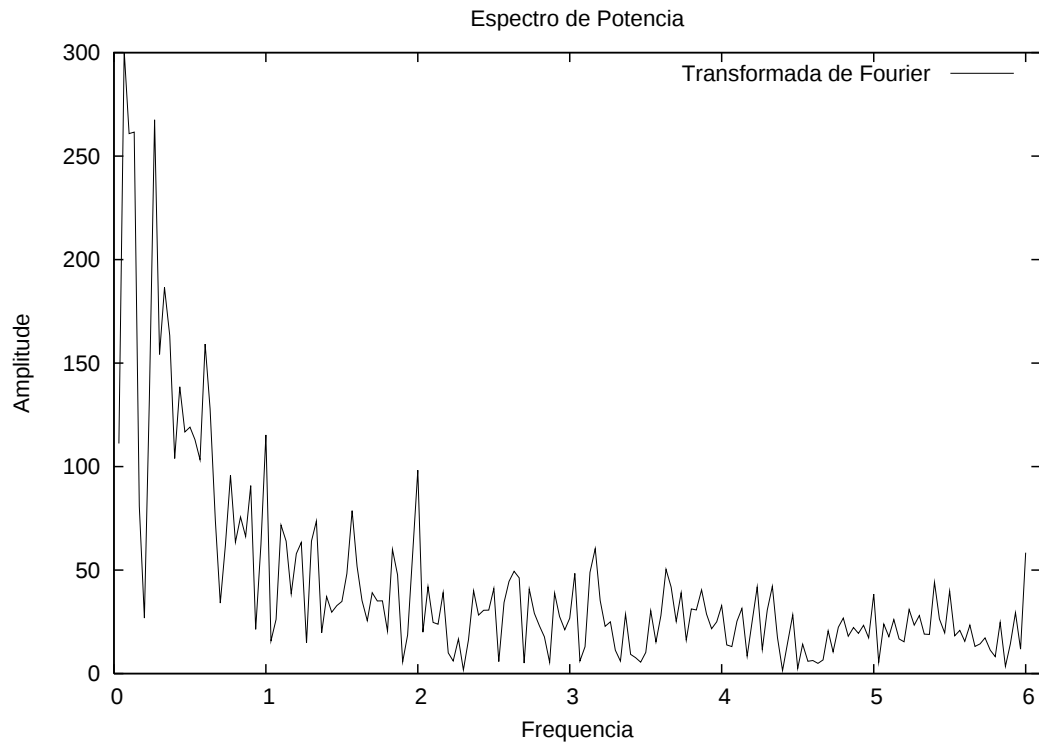


Figura 6.3: Transformada de Fourier da evaporação.

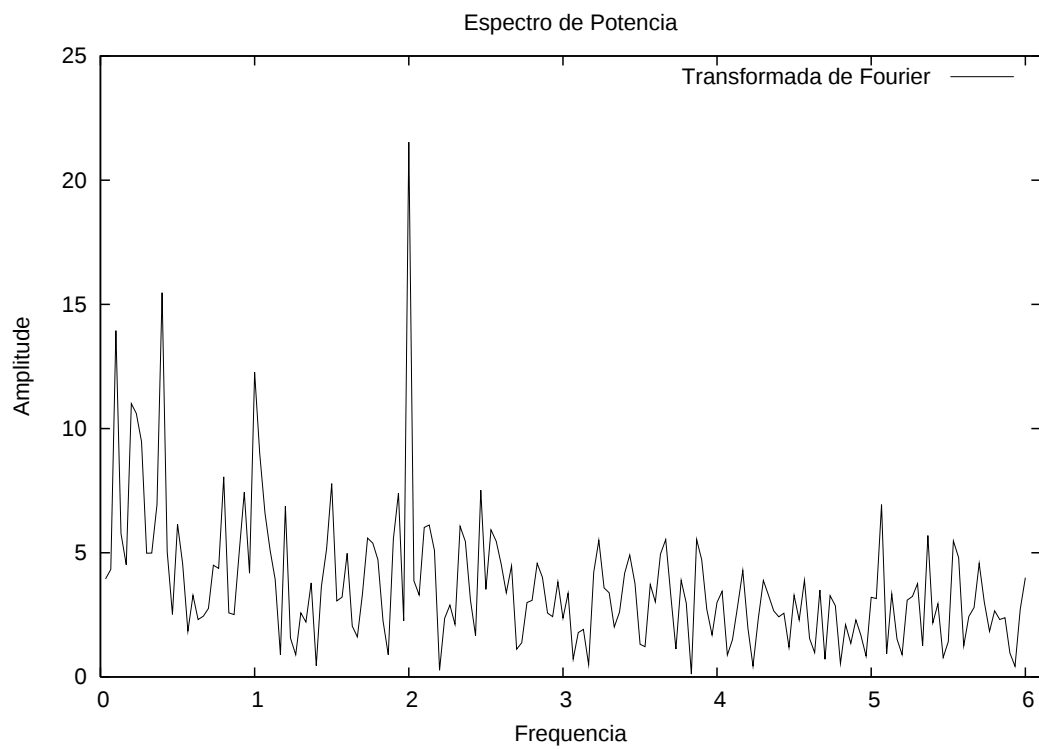


Figura 6.4: Transformada de Fourier da umidade.

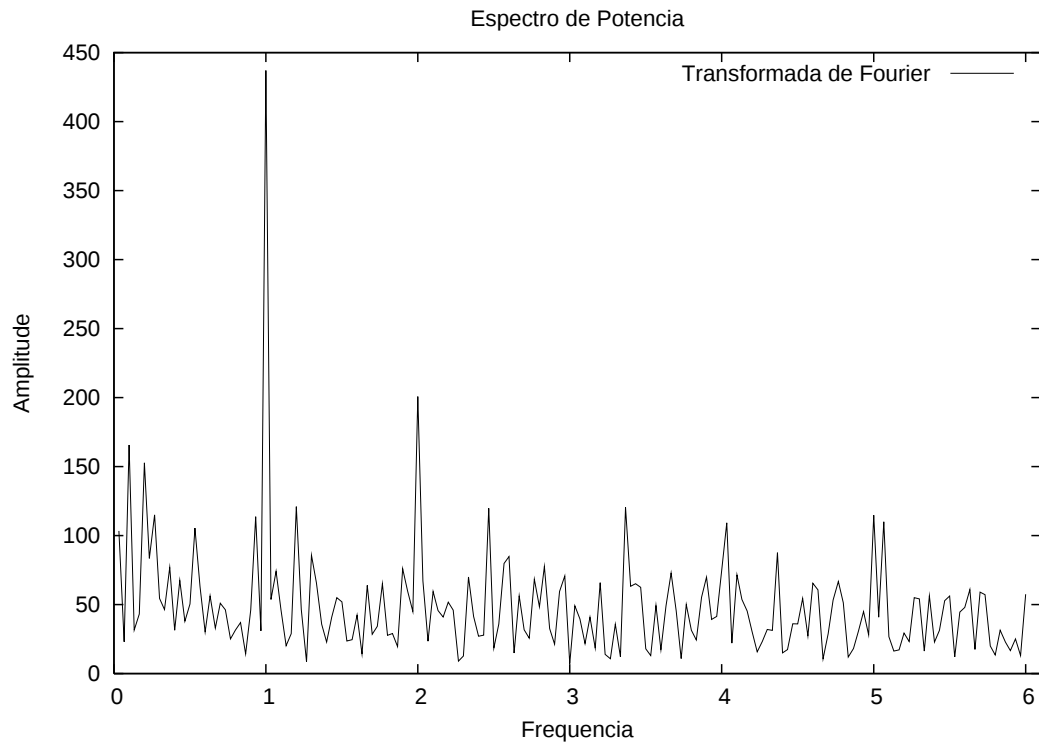


Figura 6.5: Transformada de Fourier da insolação.

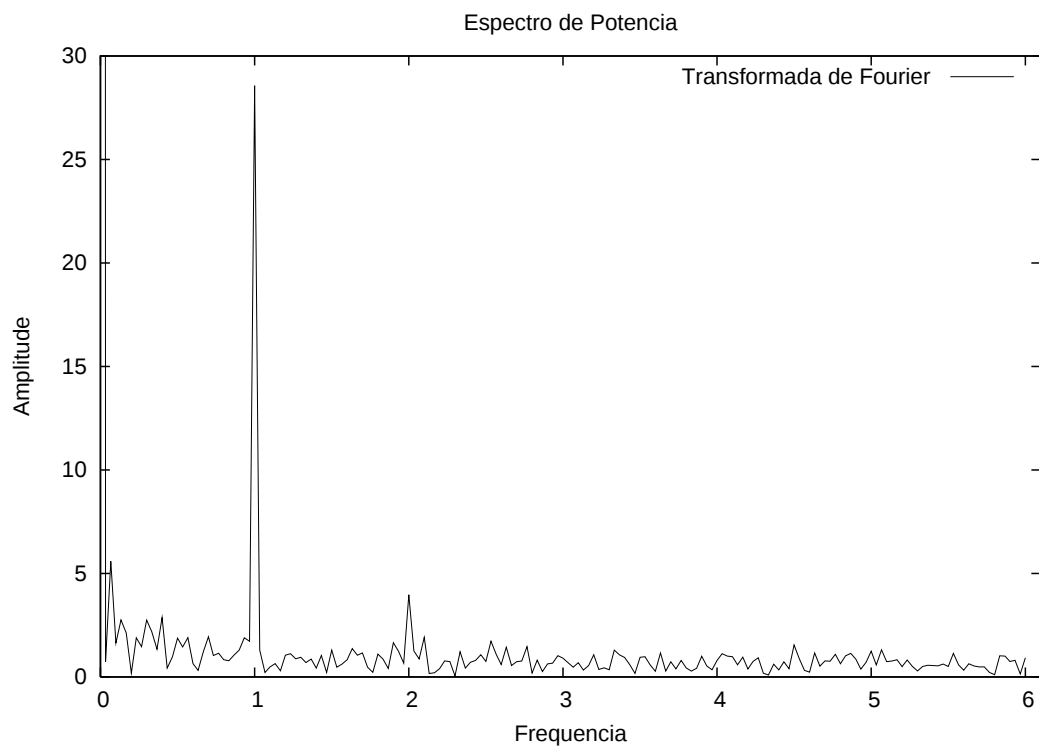


Figura 6.6: Transformada de Fourier da temperatura máxima.

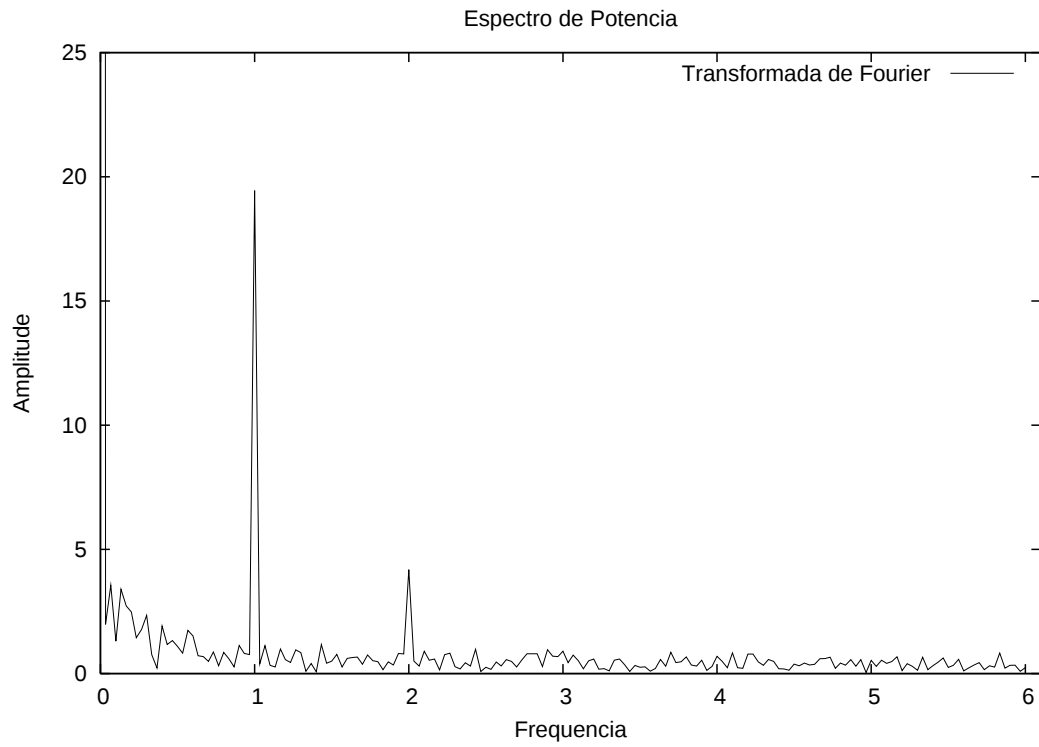


Figura 6.7: Transformada de Fourier da temperatura mínima.

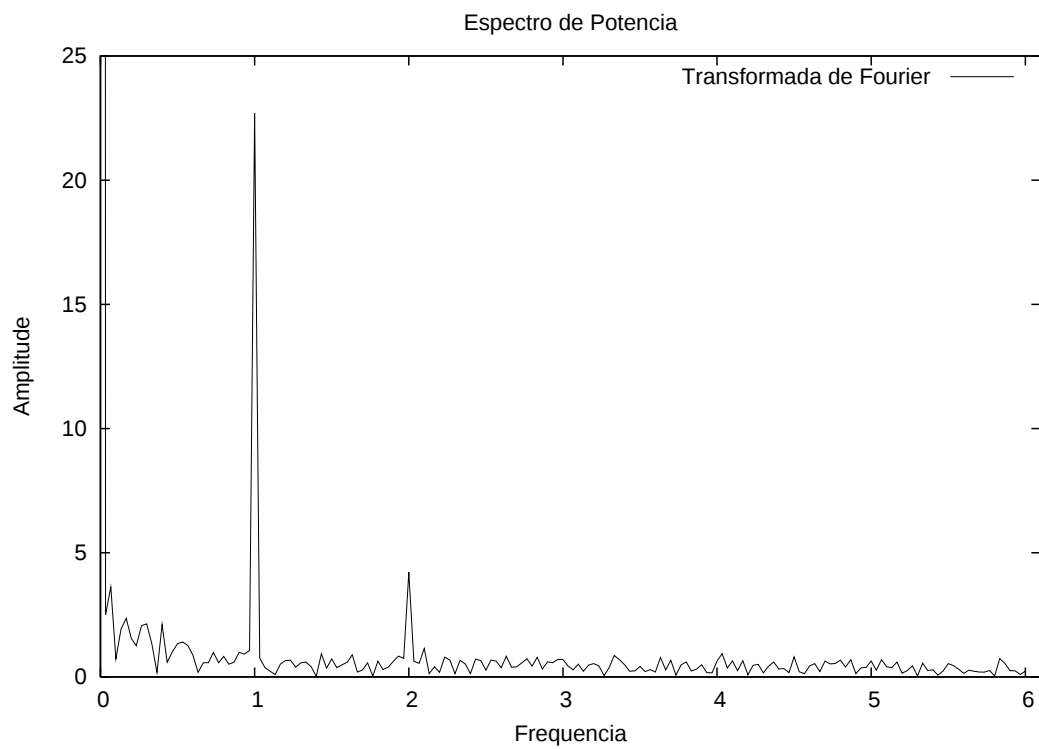


Figura 6.8: Transformada de Fourier da temperatura média.

onde N é o número de dados, $x(t)$ é a série temporal e μ é uma média da série.

Já na suavização, utilizada para reduzir a dispersão, é feita a média do valor, utilizando resíduos dos valores anterior e posterior, de acordo com a equação,

$$P(f) = \frac{1}{4}P^*(f-1) + \frac{1}{2}P^*(f) + \frac{1}{4}P^*(f+1), \quad (6.4)$$

Essa suavização é denominada janela de Tukey-Hanning.

Como forma de teste, obtivemos o valor de b para os dados puros, subtraídos e finalmente subtraídos e suavizados conjuntamente.

Há uma relação entre o expoente espectral b e o coeficiente de Hurst H ,

$$H = 2b_{cum} + 1, \quad (6.5)$$

como o valor de b acumula durante a série, utilizamos um valor de recorrência b_{cum} , onde $b = b_{cum} + 2$. O valor do coeficiente de Hurst para cada caso pode ser vista nas tabelas abaixo.

Temperatura média	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.941
Dados subtraídos	0.533
Dados subtraídos e suavizados	0.670

Temperatura mínima	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.939
Dados subtraídos	0.571
Dados subtraídos e suavizados	0.709

Temperatura máxima	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.750
Dados subtraídos	0.498
Dados subtraídos e suavizados	0.650

Precipitação	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.471
Dados subtraídos	0.483
Dados subtraídos e suavizados	0.576

Insolação	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.589
Dados subtraídos	0.535
Dados subtraídos e suavizados	0.637

Pressão atmosférica	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	1.058
Dados subtraídos	0.393
Dados subtraídos e suavizados	0.525

Umidade	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.740
Dados subtraídos	0.538
Dados subtraídos e suavizados	0.667

Evaporação	Coeficiente de Hurst H
Dados puros	0.913
Dados subtraídos	0.874
Dados subtraídos e suavizados	0.908

Como já era esperado, os resultados para os valores de dados subtraídos e suavizados foram os mais próximos para os valores calculados na análise R/S , conforme pode ser vista na tabela a seguir.

Parâmetro	Coeficiente de Hurst H
Temperatura média	0.670
Temperatura mínima	0.709
Temperatura máxima	0.650
Precipitação	0.576
Insolação	0.637
Pressão atmosférica	0.525
Umidade	0.667
Evaporação	0.908

Nas Figuras 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 e 6.16 pode-se ver o espectros de potência para cada parâmetro, com o ajuste feita pelo método do mínimos quadrados.

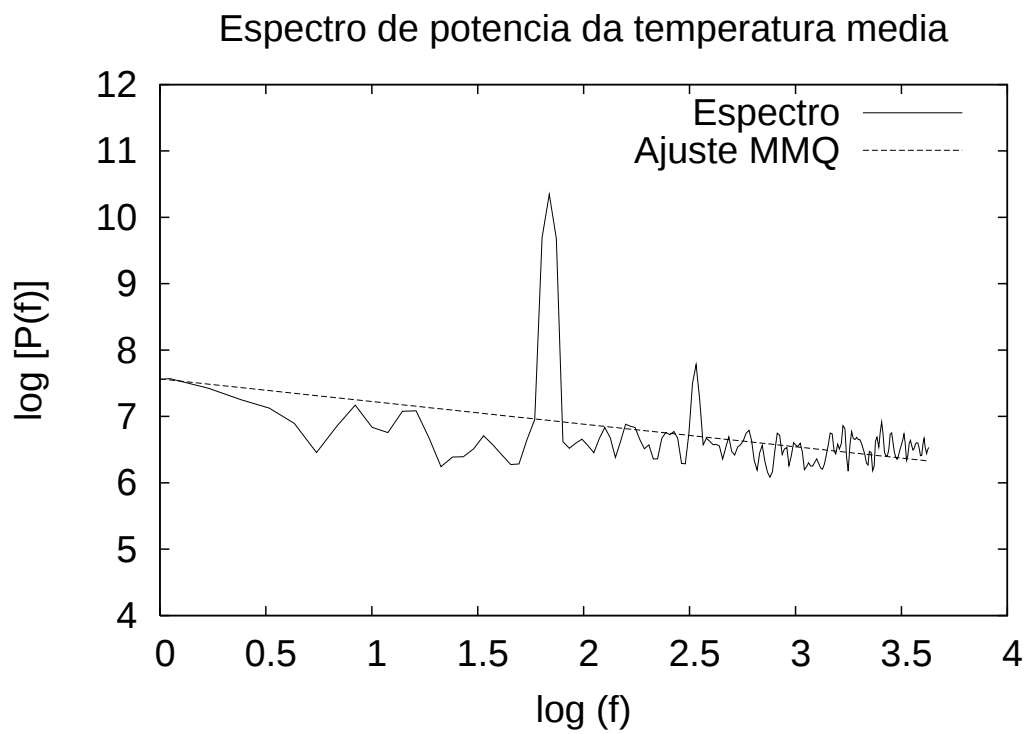


Figura 6.9: Espectro de potência da temperatura média.

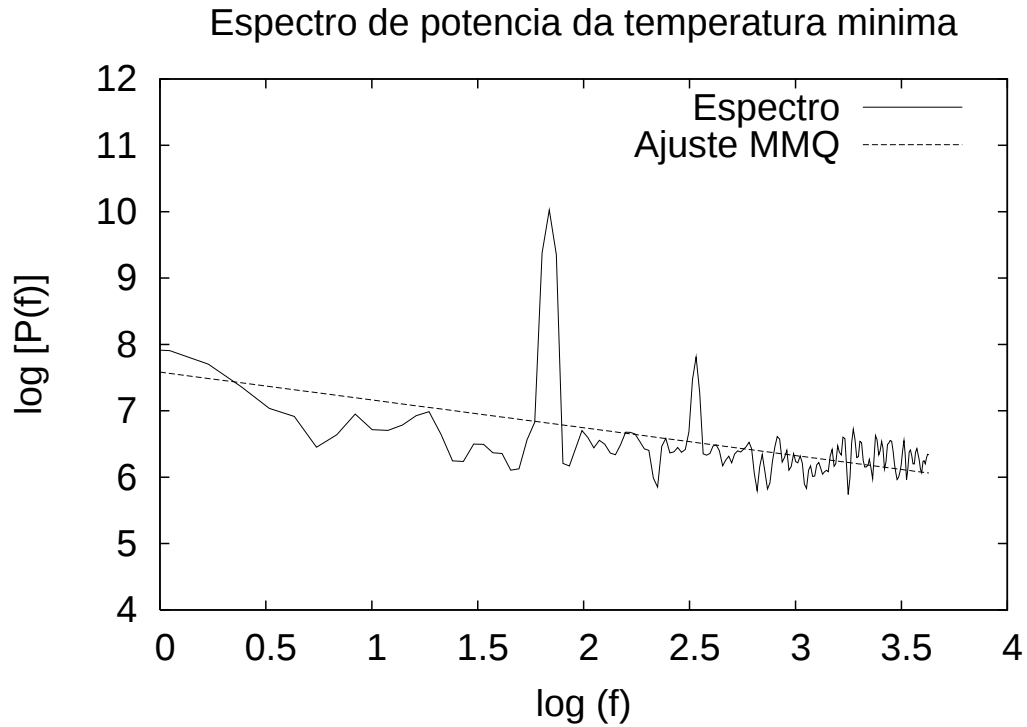


Figura 6.10: Espectro de potência da temperatura mínima.

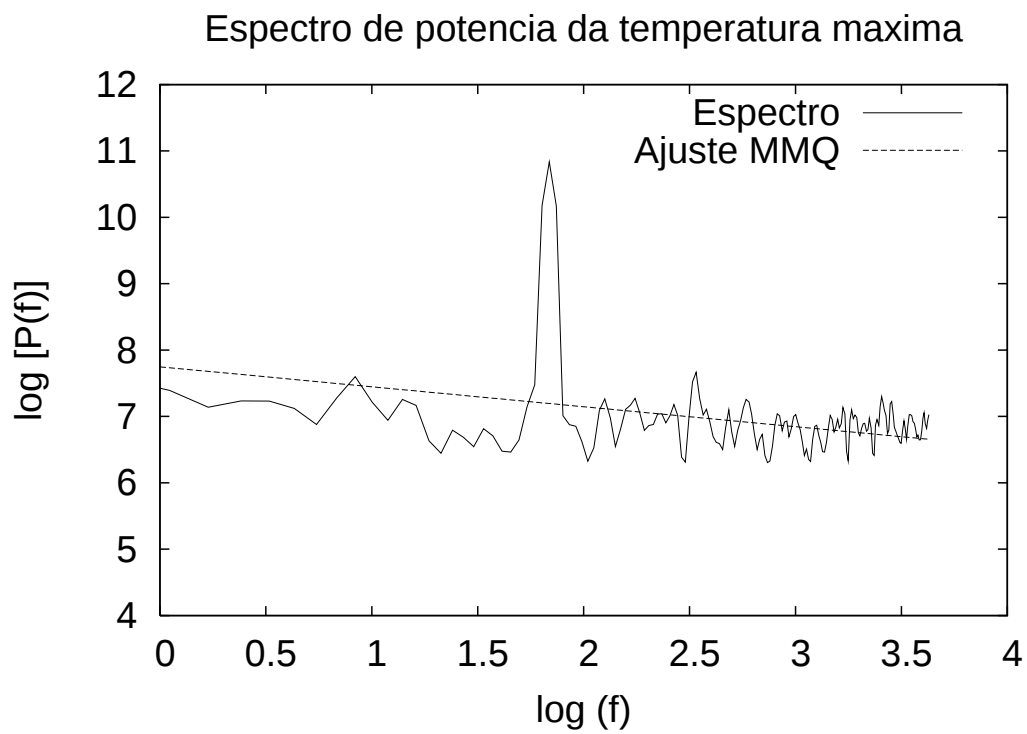


Figura 6.11: Espectro de potência da temperatura máxima.

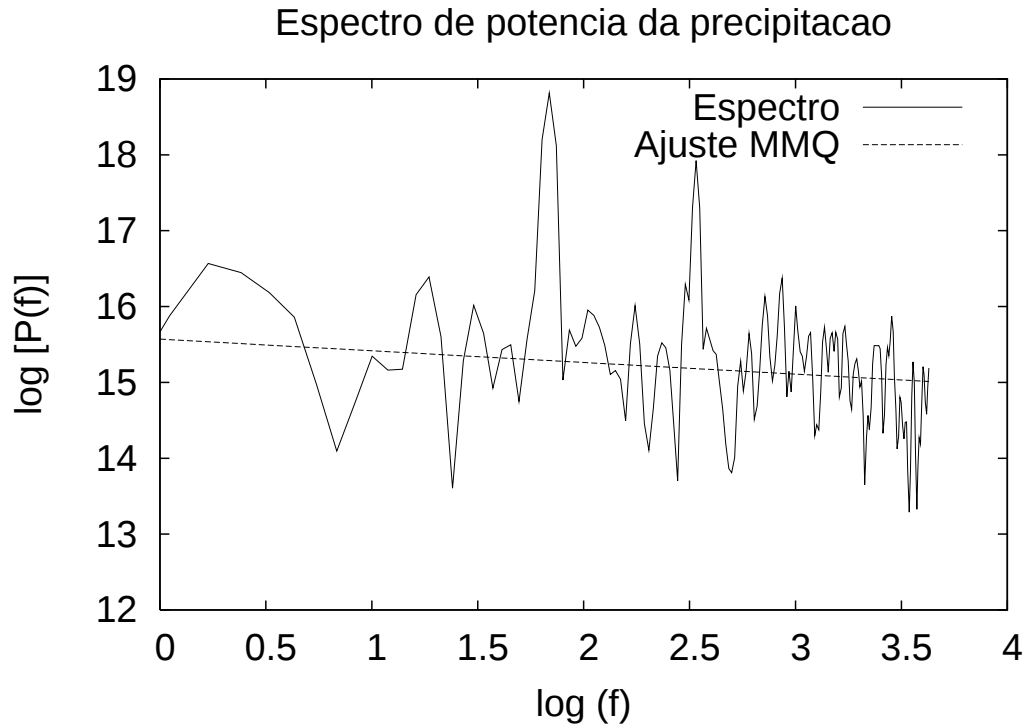


Figura 6.12: Espectro de potência da precipitação.

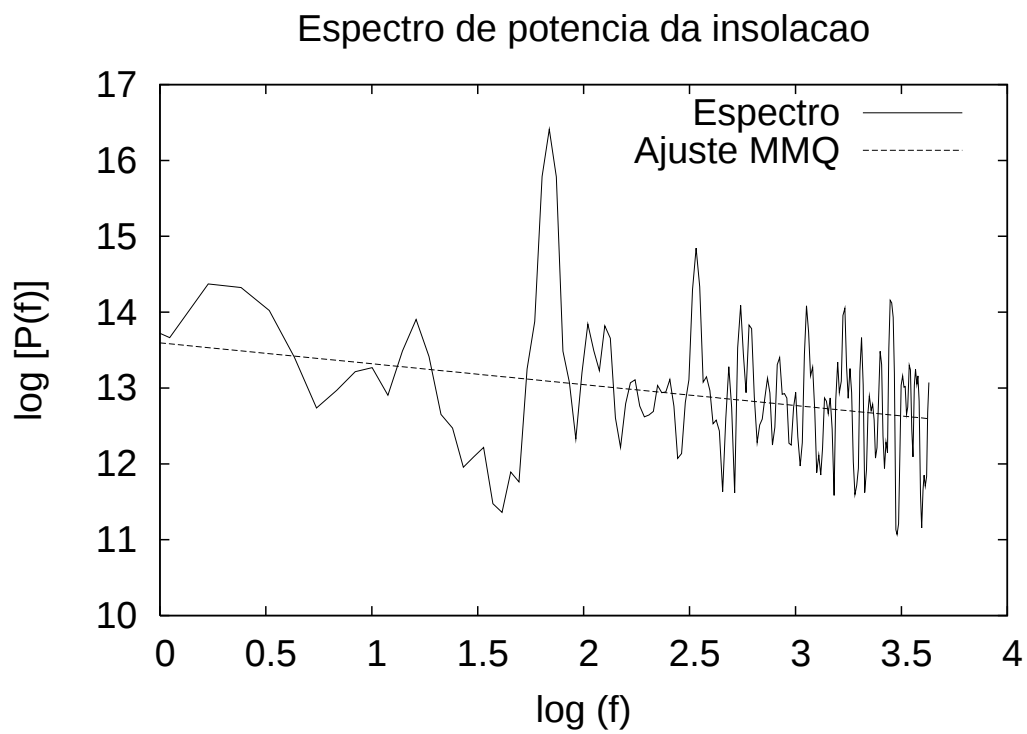


Figura 6.13: Espectro de potência da insolação.

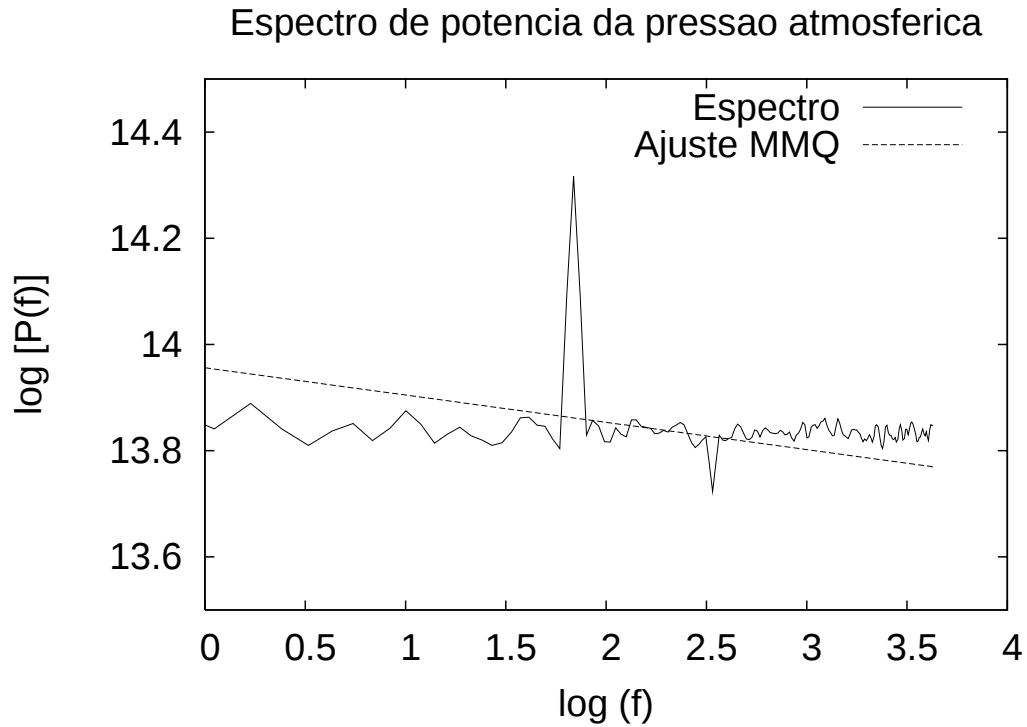


Figura 6.14: Espectro de potência da pressão atmosférica.

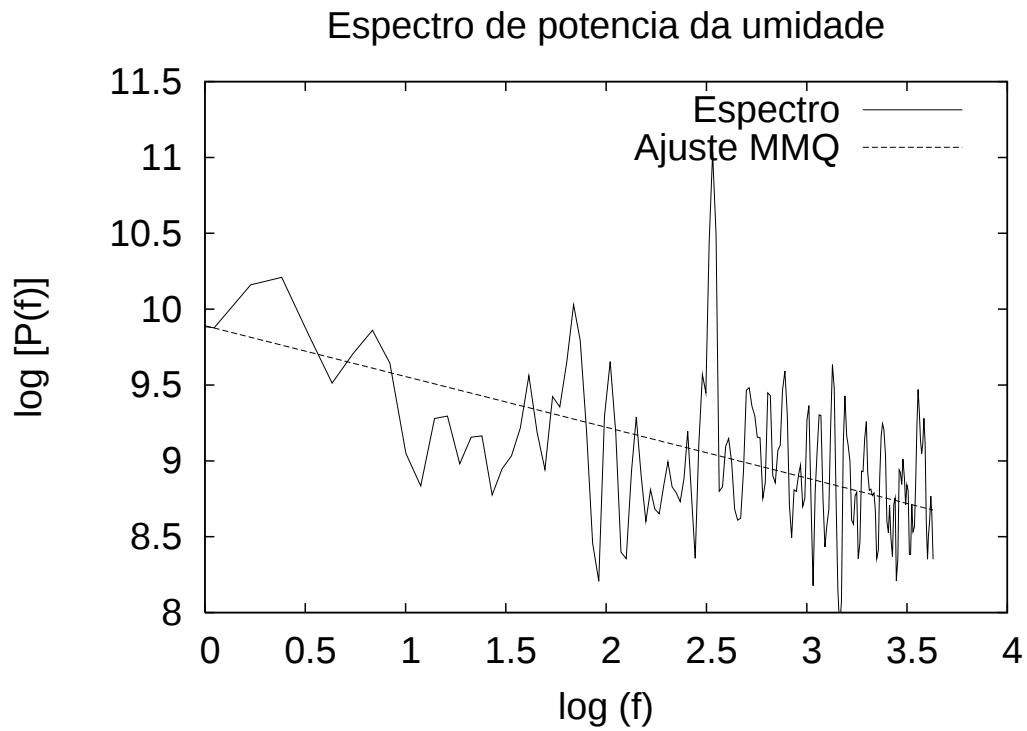


Figura 6.15: Espectro de potência da umidade.

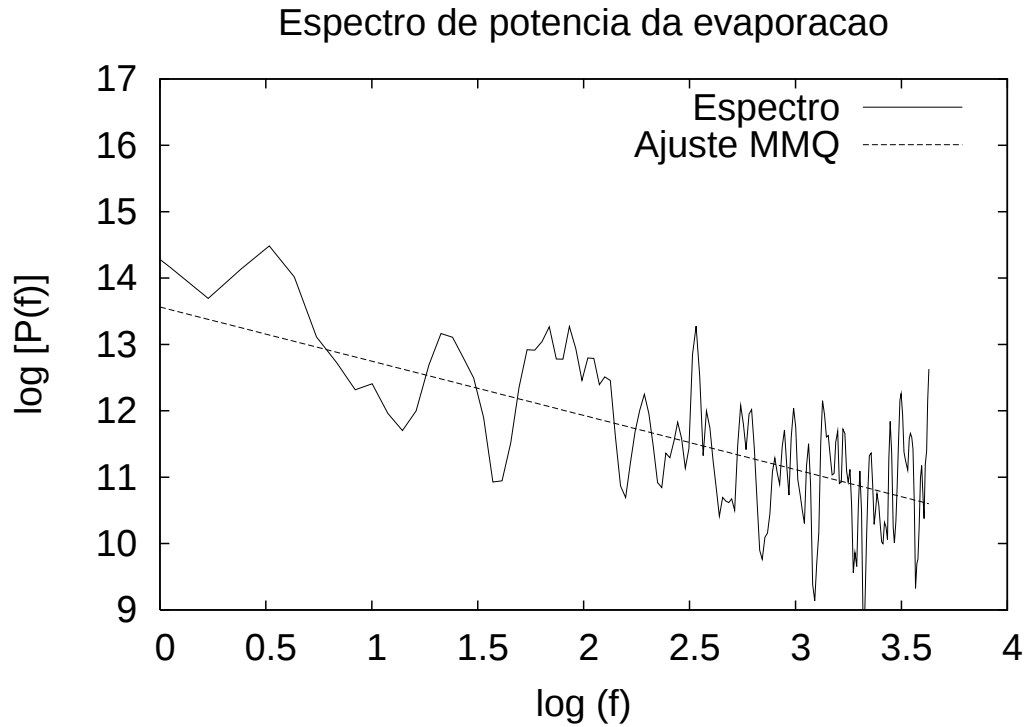


Figura 6.16: Espectro de potência da evaporação.

CAPÍTULO 7

Conclusões

Na maioria das análises de séries temporais, o valor estimado de H está entre 0.5 e 0.8, com o valor médio de 0.7. A aplicação da análise R/S nesse trabalho resultou em valores para o coeficiente de Hurst entre 0.602 e 0.848. O Valor do coeficiente de Hurst entre 0.5 e 1.0 revelam persistência do sinal do registro. Sob esse ponto de vista os fenômenos atmosféricos se mostraram persistentes, isto é, os dados estão positivamente relacionados, eliminando a possibilidade de uma distribuição aleatória dos parâmetros.

Quando o coeficiente de Hurst de uma série é diferente de 1, ela é dita auto-afim. Séries com essa característica, que é o caso da usada nesse trabalho, podem correlacionar a dimensão fractal e análise R/S através da relação $D = 2 - H$. A geometria fractal é uma ferramenta útil para caracterizar fenômenos atmosféricos, e, nesse trabalho, a dimensão fractal variou entre 1.092 e 1.475. Nesse trabalho, trabalhamos com um intervalo de registro dos fenômenos de um mês, porém um aumento ou diminuição desse período não alteraria a dimensão fractal, já que ela possui um caráter auto-similar.

Calculamos o coeficiente de Hurst também através da análise espectral, os melhores resultados foram encontrados quando os dados utilizados eram filtrados e ponderados. Os valores encontrados variaram entre 0.525 e 0.908.

A partir disso, foi possível fazer uma correlação entre os valores de H através de ambos os métodos. A aproximação entre os resultados foi boa sempre com erro de menos de 10%, como mostra a tabela abaixo, com exceção da pressão atmosférica (erro de 13%).

Parâmetro	H (Análise R/S)	H (Análise Espectral)
Temperatura média	0.625	0.670
Temperatura mínima	0.658	0.709
Temperatura máxima	0.617	0.650
Precipitação	0.618	0.576
Insolação	0.655	0.637
Pressão atmosférica	0.602	0.525
Umidade	0.676	0.667
Evaporação	0.869	0.908

A análise da persistência de um sinal pode ser feita tanto para séries temporais, como foi feito nesse trabalho, como em séries espaciais. Nesse último caso, sugere-se para futuros trabalhos a análise de uma série de dados de perfilagem de poço, onde os parâmetros seriam propriedades geofísicas das rochas tais como densidade e porosidade. Uma outra sugestão seria analisar os fenômenos com um intervalo de tempo diferente do trabalhado nessa publicação como forma de comprovar o caráter fractal das séries temporais.

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente na minha vida, me fortalecendo contra todas as adversidades.

A meus pais, pelo apoio e por sempre confiarem na minha capacidade.

Ao orientador, Prof. Amin Bassrei, por toda a atenção dispensada, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões e ensinamentos transmitidos.

Aos professores Alberto Brum e José Garcia Vivas Miranda pela disponibilidade e por aceitarem compor a comissão examinadora.

A Prof^ª. Jacira Freitas, pela atenção e por todas as dúvidas esclarecidas, não só do trabalho, como também durante todo o curso.

Aos amigos, pelo companherismo que tornaram a caminhada mais agradável.

E em especial a Sheila, por todo o apoio, incentivo e amor, que tornaram possível a realização do trabalho.

Referências Bibliográficas

- Bassrei, A., Novaes, A., Queiroz, F., 2003, Spectral analysis of climatological data in Salvador, Bahia, Brazil. Eighth International Congress of the Brazilian Geophysical Society.
- Beer, Rudolf, 1994. Extensão da Análise R/S para Caracterização Geostatística Local e Regional de Reservatórios de Hidrocarbonetos. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- Bracewell, R. N., 1986, The Fourier Transform and its Applications. McGraw-Hill.
- Chierice, Roseli A. F., 2003. O Uso de Wavelets na Determinação do Expoente de Hurst de uma Série Temporal Diária de Chuvas do Município de Araras - SP de 1955-2000. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista.
- Feder, J., 1989, Fractals. Plenum Press, New York.
- Hewett, Thomas A., 1986, Fractal distributions to reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, p. 67-82, SPE 15386.
- Hsu, H. P., 1970, Fourier Analysis. Simon and Schuster, New York.
- Hurst, H. E., 1957. A suggested statistical model of some time series which occur in nature, *Nature*, 180, 494.
- Miranda, J. G. V., Andrade, R. F. S., 1999. Rescaled range analysis of pluviometric records in northeast Brazil. *Theoretical and Applied Climatology*, 63, 79-88.
- Leonardi, S., Kümpel, H., 1998. Variability of geophysical log data and the signature of crustal heterogeneities at the KTB, *Geophysical Journal International*, Vol.135.
- Russ, Jonh C., 1994, Fractal Surfaces. Plenum Press, New York.

ANEXO I

Algoritmo para análise R/S

```
c  Programa para gerar a analise RS em series temporais de
c  dados climatologicos, adaptado de RUDOLF BEER (1998).
c
    program fclimars
    parameter(ntaus=30,nloc1=5,nloc2=3)
    dimension qsi(360),qsig(0:360),time(360),temp(360),x(30),y(30),rs_cal(30)
    real*8 qsi,qsimed,xisum,dif,sdev,rs,amaxof,aminof,ars,rsoma,qsig,var,
1  varsum,x,y,arange,time,temp,vdep,aux
    integer itaus(ntaus),iloc(nloc1),npass,t,s,num1,nuzer,iloc1(nloc1),iloc2(nloc2)

c
c  Valores de Tau para fazer a analise rs
c
    data itaus/2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,32,36,40,42,45,50,55,60,65,72,
1  80,90,120,150,160,180/
    data iloc1/1,10,20,30,40/
    data iloc2/100,200,300/

c
c  Loop para a leitura dos dados
c
    do 10 i = 1, 360
    read(21, *, end = 15 ) time(i),temp(i)
10  continue
15  num1 = i - 1
c
c  Loop para gerar qsi(i) e qsig(i)
c
    qsig(0) = 0.0
    nuzer = 0
    do 19 i = 1, num1
    aux = temp(i)
    nuzer = nuzer + 1
    qsi(nuzer) = aux
    qsig(nuzer) = qsig(nuzer - 1) + aux
19  continue
    print*
    print*, 'o numero total de dados e = ', num1
    print*, 'o numero de dados da variavel', resp, 'e = ', nuzer
    print*

c
c  Loop para fazer as interacoes em tau
c
    do 20 j = 1, ntaus
c
    rsoma = 0
    s = itaus(j)
    npass = 0
```

```

        if(s.gt.20) go to 22
        nloc = nloc1
        do 21 jl = 1, nloc
        iloc(jl) = iloc1(jl)
21      continue
        go to 24
22      nloc = nloc2
        do 23 jl = 1, nloc
        iloc(jl) = iloc2(jl)
23      continue
24      do 25 jj = 1, nloc
        t = iloc(jj)
        k = t + s
        if(k.gt.nuzer) go to 11
c
c  Calculo da media aritmetica local para cada 's'
c
        qsimed = (qsig(k) - qsig(t))/s
c
c  Loop para calcular e somar as diferencas em relacao a media local
c
        amaxof = 0.d0
        aminof = 0.d0
        xissum = 0.d0
        do 40 m = 1, s
        dif = qsi(t + m) - qsimed
        xissum = xissum + dif
        if (xissum.gt.amaxof) amaxof = xissum
        if (xissum.lt.aminof) aminof = xissum
40      continue
c
c  Calculo da variancia maxima de cada Tau
c
        arange = amaxof - aminof
c
c  Calculo do desvio padrao
c
        varsum = 0.d0
        do 60 mn = 1, s
        varsum = varsum + (qsi(t+mn) - qsimed)**2
60      continue
        var = varsum / s
        if(var.le.0) then
        go to 25
        endif
        sdev = sqrt(var)
c
c  Calculo do fator R/S
c
        ars = arange/sdev
        if(ars.eq.0.0) go to 25
        rsoma = rsoma + ars
        npass = npass + 1
        write(2,16) itaus(j), ars, arange, sdev, var
25      continue
11      if(npass.gt.0) then
        rs = rsoma / npass
        else
        go to 20
        endif
c
        x(j) = dlog(dfloating(itaus(j)))

```

```

        y(j) = dlog(rs)
c
c      Escrevendo os resultados nos arquivos de saida
      write(3,17) itaus(j), rs
      write(4,18) x(j), y(j)
c
20      continue

16      format(i10,4f10.3)
17      format(i10,f10.3)
18      format(f10.6,f10.3)
12      format (i10,f10.6,f10.3, f10.6)
c
      call reta (30,x,y,b,a)
      write (*,*) 'reta ajustada'
      write (*,*) 'y = ', A,'X', '+', B
c
      do i=1,30
      rs_cal(i)=A*dlog(dfloating(itaus(i)))+B
      write(18,12)i,x(i),y(i),rs_cal(i)
      enddo
99      stop
      end

SUBROUTINE Reta (m,x,y,a,b)
real*8 x(1), y(1), u(m)
do I=1,m
U(I)= 1
end do
call dot(m,u,x,ux)
call dot(m,u,y,uy)
call dot(m,x,x,xx)
call dot(m,x,y,xy)
det= m*xx-ux**2
A = (uy*xx-xy*ux)/ det
B = (m*xy-ux*uy) / det
return
end

subroutine dot(la,a,b,p)
real*8 a(la), b (la)
p=0.0
do j=1,la
p = p + a(j)*b(j)
enddo
return
end

```