

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA



GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DE VALORES SINGULARES EM TOMOGRAFIA ACÚSTICA DE TEMPOS DE TRÂNSITO

CAIO JEAN MATTO GROSSO DA SILVA

SALVADOR – BAHIA



۲ ۲



Critérios de Seleção de Valores Singulares em Tomografia Acústica de Tempos de Trânsito

por

Caio Jean Matto Grosso da Silva

GEO213 - TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Departamento de Geologia e Geofísica Aplicada

DO

Instituto de Geociências

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora

Amén Barner Dr. Amin Bassrei - Orientador fråe fistue Dielle Dra. Jacira Cristina Batista de Freitas Thirry Lemain Dr. Thierry Jacques Lemaire

Data da aprovação: 18/06/2009

Dedico este trabalho a três pessoas que são os pilares da minha vida: às minhas mães Benedita e Ana Maria pelo amor incondicional e também à minha namorada, Neuma, pelo amor sincero.

RESUMO

Os problemas inversos geofísicos são em geral mal-postos, pois suas soluções podem não ser únicas, não existir, ou então não depender continuamente dos dados de entrada. Um método de inversão que vem sendo utilizado na Geofísica recentemente é a tomografia sísmica que pode ser agrupada em duas classes distintas: tomografia cinemática que utiliza os tempos de trânsito entre fonte e receptor e a tomografia dinâmica que utiliza a forma de onda recebida como dado de entrada.

No contexto deste trabalho a tomografia de tempos de trânsito se encaixa como um problema não-linear, pois, para calcularmos o campo de vagarosidade precisamos conhecer a geometria que o raio descreve em subsuperfície, entretanto, para tal conhecimento seria necessário saber qual o campo de velocidades (parâmetro investigado). Torna-se, então, indispensável uma linearização para que seja possível estimar uma solução satisfatória.

A obtenção da inversa da matriz tomográfica será reduzida pela metodologia da decomposição em valores singulares. Contudo, os pequenos valores da decomposição comprometem a solução do problema. Logo, necessitamos determinar o quão pequenos estes podem ser a ponto de serem utilizados na inversão com o propósito de conduzirem a soluções mais confiáveis e amenizar o mal condicionamento do problema.

Neste trabalho, apresentamos uma metodologia criteriosa para se extrair um número ótimo destes valores. Para tanto, utilizou-se alguns critérios de corte que se baseiam na curva de decaimento da amplitude do valor singular, na derivada do valor singular e também nas curvas de erro RMS entre os parâmetros de dados observado e calculado, erro RMS entre os parâmetros de modelos verdadeiro e estimado, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo em função da quantidade de valores singulares.

A utilização de dados sintéticos foi necessária para se avaliar a metodologia de corte de valores singulares e os critérios de seleção de valores singulares aplicada à tomografia de tempo de trânsito, pois desta forma, pôde-se ponderar o erro entre os modelos verdadeiro e estimado e assim analisar com um maior controle o resultado do experimento.

Realizadas simulações verificamos que o emprego de uma quantidade ótima de valores singulares, como regularização, mostrou-se válida. Entretanto, os dois primeiros critérios de corte (amplitude do valor singular e derivada do valor singular) não se mostraram coerentes com o erro entre os parâmetros de modelo, tornando-se, desta forma, inválidos para a abordagem de extração de valores singulares em problemas linearizados.

ABSTRACT

Inverse problems in Geophysics are in general ill-posed, since their solutions can be nonunique, non-existent, or not depend continuously on the input data. Seismic tomography is an inverse method which has been used in the last decades in Geophysics, and it can be grouped into two distinct classes: kinematic tomography which uses traveltimes between sources and receivers, and, dynamic tomography which uses the waveform as input data.

Traveltime tomography is a non-linear problem, because in order to estimate the slownesses we need to know the ray geometry described at the subsurface. However, we need to know the velocity distribution to perform the ray tracing. Thus, to obtain a satisfactory solution, we need the linearize the problem, employing an iterative procedure.

We employ the well known singular value decomposition in order to invert the tomographic matrix. As usual the small singular values compromise the solution, in such a way that, in order to attenuate the ill-posedness, we have to establish a threshold and avoid the incorporation of these small singular values into the construction of the pseudo-inverse.

In this work we present a detailed methodology for the determination of the optimal number of singular values. Our criteria are based on the following curves as a function of number of singular values: amplitude decay of singular values and its derivative, the RMS error between observed data and the calculated one, the RMS error between the true model parameters and the estimated ones, the estimated model parameters energy and the estimated model parameters entropy.

To validate the proposed methodology we performed simulations with synthetic data in linearized traveltime tomography. In each simulation we established the optimal number of singular values. The results were quantified and the methodology validated, although the first two criteria (singular value amplitude and it derivative) were not coherent in the present linearized approach.

ÍNDICE

RESU	ΜΟ	iii
ABST	RACT	iv
ÍNDIC	${f E}$	v
ÍNDIC	E DE FIGURAS	vii
INTRO	DDUÇÃO	1
CAPÍ	TULO 1 Inversão de Dados	4
1.1	Problemas inversos	4
	1.1.1 Existência \ldots	4
	1.1.2 Unicidade \ldots	4
	1.1.3 Estabilidade \ldots	5
1.2	Problemas não-lineares	6
	1.2.1 Linearização	7
	1.2.2 Formulação matricial do problema inverso	7
1.3	Decomposição em valores singulares	8
1.4	Os Mínimos quadrados e a inversa generalizada	10
	1.4.1 Mínimos quadrados	10
	1.4.2 Mínimos quadrados amortecidos	11
	1.4.3 Propriedades da inversa generalizada	11
CAPÍ	TULO 2 Critérios de Seleção de Valores Singulares	13
2.1	Amplitude do valor singular	14
2.2	Derivada do valor singular	14
2.3	Erro RMS dos parâmetros de dados	15
2.4	Erro RMS dos parâmetros de modelo	16
2.5	Energia do parâmetro de modelo	16
2.6	Entropia do parâmetro de modelo	17
CAPÍ	TULO 3 Traçado de Raios	18
3.1	Traçados de raios retos	18
3.2	Traçados de raios curvos	18
	3.2.1 Equação do raio	19

3.3	Discretização do meio	23
3.4	Ligação entre fonte e receptor	24
	3.4.1 Metodo de canhoneio (shooting method)	24
	3.4.2 Método de ligação $(linking method)$	25
САРІ́Т	TULO 4 Tomografia Sísmica	27
4.1	Tomografia de tempo de trânsito	28
	4.1.1 Tomografia linear de tempo de trânsito	29
	4.1.2 Simulações numéricas para o caso linear	31
САРІ́Т	CULO 5 Simulações Numéricas para o Modelo de Reservatório	37
5.1	Descrição do modelo	37
5.2	Primeira iteração	38
5.3	Segunda iteração	41
5.4	Terceira iteração	45
5.5	Discussões e considerações	47
САРІ́Т	CULO 6 Simulações Numéricas para o Modelo de Falha	49
6.1	Descrição do modelo	49
6.2	Caso determinado	51
	6.2.1 Primeira iteração	51
	6.2.2 Segunda iteração	54
	6.2.3 Terceira iteração	57
6.3	Caso sobredeterminado	61
	6.3.1 Primeira iteração	62
	6.3.2 Segunda iteração	65
	6.3.3 Terceira iteração	66
6.4	Discussões e considerações	70
Conclu	$s ilde{o} e s$	74
Agrade	ecimentos	76
Referê	ncias Bibliográficas	77

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Representação de uma matriz como somatório de suas autoimagens	9
3.1	Interpolação bilinear de um campo discretizado.	22
3.2	Modelo discretizado.	23
3.3	Representação esquemática do método de canhoneio	24
3.4	Representação esquemática do método de ligação.	25
4.1	Fluxograma da inversão tomográfica linearizada	30
4.2	Modelo Sintético A	31
4.3	Decaimento da amplitude do valor singular em escala monologarítmica. $\ . \ .$	32
4.4	Derivada do valor singular em escala monologarítmica	33
4.5	Erro dos parâmetros de modelo em função do número de valores singulares.	33
4.6	Erro dos parâmetros de dado em função do número de valores singulares.	34
4.7	Energia do modelo em função do número de valores singulares	34
4.8	Entropia do modelo em função do número de valores singulares	35
4.9	Modelo A estimado com 373 valores singulares.	36
5.1	Modelo sintético B	38
5.2	Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1 ^{<i>a</i>} iteração	39
5.3	Derivada do valor singular em escala monolog para a 1 ^{<i>a</i>} iteração	39
5.4	Erro entre os parâmetros de dado em função do número de valores singulares	40
- -	para a 1° iteração. \dots	40
0.0	Erro entre os parametros de modelo em função do numero de valores singulares	40
5.6	Energia dos parâmetros de modelo em funcão do número de valores singulares	40
	na 1^a iteração.	41
5.7	Entropia dos parâmetros de modelo em funcão do número de valores singulares	
	na 1^a iteração	41
5.8	Modelo estimado B na 1 ^a iteração com 230 valores singulares.	42
5.9	Erro entre os parâmetros de dado em função do número de valores singulares	
	para a 2^a iteração.	42
5.10	Erro entre os parâmetros de modelo em funcão do número de valores singulares	
·	para a 2^a iteração.	43
5.11	Energia do parâmetro de modelo em funcão do número de valores singulares	-
	na 2^a iteração.	43
	-	

5.12	Entropia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares
۳ 10	
5.13	Modelo estimado B na 2° iteração com 280 valores singulares
5.14	Erro entre os parametros de dado em função do número de valores singulares
F 1 F	
5.15	Erro entre os parametros de modelo em função do numero de valores singulares
F 10	na 3^{α} iteração.
5.10	Energia do parametro de modelo em função do numero de valores singulares
	na 3^{a} iteração.
5.17	Entropia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares
	na 3^a iteração.
5.18	Modelo estimado B na 3^a iteração com 217 valores singulares
6.1	Modelo sintético C.
6.2	Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1^0 iteração do caso
	sobredeterminado
6.3	Derivada valor singular em escala monolog para a 1^0 iteração do caso deter-
	minado
6.4	Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 1^a
	iteração do caso determinado.
6.5	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a
	1^a iteração do caso determinado
6.6	Energia do parâmeto de modelo em função dos valores singulares para a 1^a
	iteração do caso determinado.
6.7	Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 1^a
	iteração do caso determinado.
6.8	Modelo C estimado na primeira iteração do caso determinado com 327 valores
	singulares.
6.9	Erro entre os parâmetros de dados em função dos valores singulares para a 2^a
	iteração para o caso determinado.
6.10	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a
	2^a iteração do caso determinado
6.11	Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a
	iteração do caso determinado.
6.12	Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a
	iteração do caso determinado.
6.13	Modelo C estimado na segunda iteração com 330 valores singulares
6.14	Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 3^a
	iteração do caso determinado.

6.15	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a	
	3^a iteração do caso determinado	59
6.16	Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.	60
6.17	Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.	60
6.18	Modelo C estimado na terceira iteração com 305 valores singulares.	61
6.19	Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1 ^a iteração do caso	GG
6.20	Derivada valor singular em escala monolog para a 1^a iteração do caso sobre-	02
	determinado	63
6.21	Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 1^a	
	iteração do caso sobredeterminado.	63
6.22	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso sobredeterminado	64
6.23	Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 1^a	
	iteração do caso sobredeterminado.	64
6.24	Entropia do modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do	65
6.25	Modelo C estimado na primeira iteração com 645 valores singulares	66
6.26	Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 2^a	00
0.20	iteração do caso sobredeterminado	67
6.27	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a	0.
••	2^a iteração do caso sobredeterminado	67
6.28	Energia do parâmetro de modelo em funcão dos valores singulares para a 2^a	
0.20	iteração do caso sobredeterminado.	68
6.29	Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a	
	iteração do caso sobredeterminado.	68
6.30	Modelo C estimado na segunda iteração com 650 valores singulares	69
6.31	Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 3^a	
	iteração	70
6.32	Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a	
	3^a iteração.	70
6.33	Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a	
	iteração.	71
6.34	Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a	
	iteração.	71
6.35	Modelo C estimado na terceira iteração com 655 valores singulares	72

INTRODUÇÃO

Para problemas particulares na geofísica necessita-se que hajam soluções inversas. Dois exemplos clássicos desse tipo de problema são as equações de Herglotz-Weichart e a de Dix que permitem o cálculo da velocidade em camadas lateralmente homogêneas e em pilhas de camadas horizontais, respectivamente. Nesse caso, o problema de inversão significa que as velocidades podem ser determinadas a partir dos tempos de trânsito observado.

Um desenvolvimento teórico dos métodos e das aplicações deve existir, tal que os dados experimentais possam ser previstos adequadamente. Apesar das equações acima, tidas como exemplo, tratarem de problemas sísmicos, a inversão pode ser aplicada a qualquer outro método da geofísica exploracional.

Uma técnica consagrada na medicina e que desde 1980 vem sendo utilizada na geofísica é a tomografia enquadrada como um método de inversão de dados, onde, a partir dos dados de entrada deseja-se determinar alguma propriedade física do meio. Sendo que a tomografia sísmica tem uma alta recuperação do modelo, portanto, é uma técnica de alta resolução quando comparada à sismologia de exploração.

Neste trabalho, utilizamos a tomografia de tempos de trânsito que utiliza como dados de entrada os tempos de trânsito observados entre as fontes e os receptores, sendo considerada como uma abordagem cinemática do problema. Existe também uma abordagem dinâmica para a tomografia que consiste em utilizar como dados de entrada a forma da onda recebida.

No presente trabalho, a inversão de dados geofísicos recorreu a um processo de inversão matricial que foi realizado utilizando o método de decomposição em valores singulares (SVD) (Noble e Daniel, 1982), sendo a matriz a ser invertida denominada de matriz tomográfica. Contudo, os problemas inversos são mal-postos que é o equivalente a dizer que a solução do problema não existe, não é única e/ou não depende continuamente dos dados de entrada. O problema inverso se deve ao fato desta matriz ser mal-condicionada, pois as soluções obtidas são sensíveis aos dados de entrada, ou seja, uma pequena perturbação nos dados não implica necessariamente numa pequena perturbação do modelo, sendo assim o problema é considerado mal-posto.

Para contornar este problema, utilizamos uma quantidade ótima de valores singulares que elimina os valores de baixa amplitude a fim de se estimar um modelo o mais próximo possível da realidade, pois valores singulares pequenos comprometem a solução do sistema. Logo, foi necessário utilizar critérios para se determinar o ponto de corte dos pequenos valores singulares.

Temos também que os problemas geofísicos não são lineares, ou seja, algum parâmetro necessário para se realizar a inversão do problema é função de algum parâmetro que se deseja determinar, logo, a relação entre os dados de entrada e os parâmetros a serem estimados é não-linear. Torna-se, então, imprescindível linearizar o problema com o propósito de tirar essa condição de não linearidade. O caso linear foi abordado por Silva (2008) e Silva e Bassrei (2007).

Na tomografia de tempos de trânsito a não linearidade se deve ao fato do raio ao percorrer meios homogêneos comportar-se como reto, entretanto, quando houver variação no campo de velocidades, o raio descreverá um caminho curvo. Para que fosse possível saber onde e quanto este se encurvaria seria necessário conhecer a distribuição do campo de velocidades em subsuperfície que neste caso é o parâmetro a se estimar.

O objetivo do trabalho apresentado é o de se validar a metodologia de aplicação de valores singulares selecionados e de se encontrar critérios válidos que possam ser utilizados para filtrar uma quantidade de valores singulares e assim se obter uma melhor aproximação do modelo verdadeiro em problemas inversos linearizados. Os critérios abordados neste trabalho para a extração do ponto de corte que contém o número ótimo de valores singulares são: curva da amplitude dos valores singulares; derivada do valor singular; erro RMS (do inglês root mean square, ou raiz quadrada do valor médio quadrático) entre os parâmetros de dado; erro RMS entre os parâmetros de modelo; energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo.

Realizada simulações com dados sintético sem ruído e também contaminados por diferentes níveis de ruído, observou-se que se poderia encontrar um modelo mais próximo do verdadeiro, ou seja, poderia se obter uma solução com resultados satisfatórios se utilizassemos uma quantidade ótima de valores singulares como proposto pelo trabalho. Entretanto, os dois critérios de seleção de valores singulares (amplitude e derivada do valor singular) não se mostraram adequados à seleção dos mesmos.

A organização do texto se apresenta da seguinte maneira:

No capítulo 1 são apresentados os problema inversos referentes à teoria da inversão. O método de linearização é discutido neste trabalho devido à sua grande importância em tomografia e discute-se ainda a técnica de decomposição em valores singulares. É realizado também uma aplicação deste método e de outros em resoluções de sistemas lineares.

No capítulo 2 apresenta-se os critérios de seleção de valores singulares utilizados no presente trabalho, abordando cada metodologia empregada para a dada seleção.

No capítulo 3 é feito um estudo sobre o método de traçado de raios e sua aplicação em inversão tomográfica. Este representa um método direto, ou seja, que determina as distâncias que os raios percorrem em cada célula sabendo-se a distribuição do campo de vagarosidade. É mostrado também como se dá a discretização de um meio em células e discute-se técnicas de *ligação do raio*, ou seja, resolver o problema que consiste em se determinar o ângulo para o qual um raio que sai de uma determinada fonte atinja um determinado receptor.

No capítulo 4 é realizada uma introdução à tomografia, em especial aborda-se a tomografia sísmica de tempo de trânsito e reproduz-se alguns resultados obtidos por Silva (2008)

No capítulo 5 são realizadas as simulações numéricas para o modelo sintético de reservatório.

No capítulo 6 são realizadas as simulações numéricas para o modelo sintético de falha utilizando dados livres de ruídos e também para dados contaminados por diferentes níveis de ruído e analisa-se ainda o problema de iluminação do meio .

Por fim apresentamos as conclusões do trabalho.

CAPÍTULO 1

Inversão de Dados

1.1 Problemas inversos

O problema inverso é considerado bem-posto se satisfaz as condições de existência, unicidade e estabilidade e considerado mal-posto se alguma destas não seja satisfeita, ou seja, o problema é considerado mal-posto se sua solução não existe, não é única e/ou não depende continuamente dos dados de entrada.

1.1.1 Existência

Os problemas inversos são considerados, matematicamente, mal postos, uma das razões para essa consideração é a inexistência de sua solução.

O problema da existência equivale ao problema matemático de se saber se uma questão que é necessária é também suficiente para aceitação de alguma hipótese, ou seja, como todo modelo contém simplificações e aproximações, uma condição necessária será respeitá-las ou a solução não existirá (Sá, 1996).

Contudo, a condição necessária não é suficiente para a existência da solução, é necessário que haja um certo grau de fidelidade do modelo adotado, recaindo assim na definição de existência.

Esta condição pode ser violada por equações inconsistentes entre si, para contornar isto, podemos fazer uma reconstituição do problema tal como mínimos quadrados ou decomposição em valores singulares.

1.1.2 Unicidade

Toda vez que um modelo geofísico é determinado, é necessário saber se este é único. Se não for o caso, possivelmente representa somente um de muitos modelos que satisfazem os dados, ou seja, os dados não são muito úteis na procura da solução particular. Entretanto, os modelos aceitáveis podem fornecer as propriedades físicas que são dados geológicos úteis.

Os dados de gravidade são exemplos que satisfazem a um modelo não único. A teoria do potencial indica que o potencial gravitacional em qualquer ponto fora de uma superfície que seja devido a um corpo material dentro da superfície é o mesmo que seria produzido por uma camada material, com densidade:

$$\delta = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}},\tag{1.1}$$

onde \mathbf{v} representa o potencial total de atração da matéria e \mathbf{n} o sentido normal da superfície. A forma como a superfície inclui o corpo é arbritária, logo podemos obter uma indicação da distribuição da matéria que pode satisfazer a função do potencial gravitacional.

Os limites da não-unicidade citados para um modelo dependem das suposições incorporadas no procedimento inverso. Uma forma desta condição ser satisfeita é fazer uma reformulação do problema tal como buscar a solução de norma mínima (Santos, 2006).

1.1.3 Estabilidade

Uma forma de se considerar a estabilidade é através do conceito de que um problema é dito estável se sua solução depende continuamente dos dados e instável, caso contrário.

Matematicamente, a classe de problemas instáveis é denominada de mal-condicionada. O condicionamento de uma matriz pode ser determindado a partir de seu número de condição (NC), que corresponde à razão entre o maior e o menor valor singular, ou seja, $NC = \sigma_{max}/\sigma_{min}$, sendo que a instabilidade é tanto maior quanto maior for o valor do número de condição.

A fim de se ponderar a influência do NC de uma matriz na estabilidade de um sistema vamos considerar o seguinte problema:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m},\tag{1.2}$$

onde **d** é o vetor dos parâmetros de dados, **m** é o vetor dos parâmetros de modelo e G é a matriz que associa os parâmetros de dados aos parâmetros de modelo. Considerando o procedimento inverso, temos:

$$\mathbf{m} = G^{-1}\mathbf{d}.\tag{1.3}$$

Se o sistema for perturbado, sua nova solução será dada por:

$$\mathbf{m} + \delta \mathbf{m} = G^{-1}(\mathbf{d} + \delta \mathbf{d}), \tag{1.4}$$

onde $\delta \mathbf{m}$ e $\delta \mathbf{d}$ são as perturbações nos parâmetros do modelo e dos dados respectivamente. A partir da equação (1.2) e sabendo que $\delta \mathbf{d} = G \delta \mathbf{m}$ temos pela desigualdade de Shwartz:

$$||G\mathbf{m}|| \le ||G|| \cdot ||\mathbf{m}||,\tag{1.5}$$

logo

$$||\mathbf{d}|| \le ||G|| \cdot ||\mathbf{m}||,\tag{1.6}$$

е

$$||\delta \mathbf{m}|| \le ||G^{-1}|| \cdot ||\delta \mathbf{d}||.$$

$$(1.7)$$

A partir das equações (1.6) e (1.7), temos:

$$\frac{||\delta \mathbf{m}||}{||\mathbf{m}||} \le ||G|| \cdot ||G^{-1}|| \frac{||\delta \mathbf{d}||}{||\mathbf{d}||}.$$
(1.8)

O produto das normas matriciais da equação anterior trata da definição do número de condição. Além disso, temos que $||\delta \mathbf{d}||/||\mathbf{d}|| \in ||\delta \mathbf{m}||/||\mathbf{m}||$ tratam do erro relativo entre os dados e os modelos respectivamente, logo podemos reescrever a equação (1.8) como:

$$E_{modelo} \le NC \cdot E_{dados},\tag{1.9}$$

onde E_{modelo} e E_{dados} são os erros relativos entre os parâmetros do modelo e dos dados respectivamente. Portanto o erro entre os parâmetros do modelo será controlado pelo valor do NC considerado para o sistema e da qualidade dos dados de entrada.

Uma forma de se contornar este problema é encontrando um novo sistema em que as soluções sejam menos sensíveis às perturbações nos dados, ou seja, um sistema em que o valor do NC seja o menor possível.

1.2 Problemas não-lineares

Nem sempre a relação entre os parâmetros de dados e os parâmetros de modelo é linear, logo, sempre que isto ocorre temos um problema não-linear. Contudo as soluções dos problemas não-lineares podem ser conseguidas através de aproximações lineares, ou seja, é feita uma linearização do problema.

Recorrer ao experimento e ao erro é a maneira mais fácil de se achar os parâmetros do modelo. Um problema com o método da tentativa e do erro é que ele utiliza procedimentos aleatórios para encontrar os parâmetros, sendo assim, o número de aproximações tentados não é totalmente certo. Por exemplo, num modelo com dez parâmetros onde cada parâmetro permite dez valores, então existirão 10¹⁰ modelos potencialmente testados. Uma significativa vantagem deste procedimento é que não há um limite de complexidade do modelo que possa existir. A desvantagem principal é trabalhar com números crescentes dos parâmetros, que aumentará significativamente o custo computacional.

1.2.1 Linearização

A maioria das equações que relaciona as observações geofísicas aos parâmetros do modelo da terra é não-linear. Então, antes que se possa fazer uso dos artifícios da álgebra linear é necessário utilizar algum procedimento que reduza o problema a uma forma linear. Uma técnica de linearização consiste na substituição da função não-linear pela sua expansão em serie de Taylor, e truncarmos a expressão a partir dos termos de ordem dois. Considerando uma função não-linear, temos:

$$\hat{d}_i = f(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_n), \tag{1.10}$$

onde i = 1, 2, ..., M.

A função d é expandida sobre o ponto \hat{d}_i no espaço parâmetro. Logo:

$$d_i(\hat{m}_1 + \delta m_1, \hat{m}_2 + \delta m_2, \dots, \hat{m}_n + \delta m_n) = \hat{d}_i + \frac{\partial f_i}{\partial m_1} \delta m_1 + \frac{\partial f_i}{\partial m_2} \delta m_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial m_n} \delta m_n, \quad (1.11)$$

como δm_i , para todo *i*, são valores pequenos, então:

$$d_i - \hat{d}_i = \Delta d_i = \frac{\partial f_i}{\partial m_1} \delta m_1 + \frac{\partial f_i}{\partial m_2} \delta m_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial m_n} \delta m_n, \qquad (1.12)$$

$$\Delta \mathbf{d} = G \Delta \mathbf{m},\tag{1.13}$$

ou

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m},\tag{1.14}$$

onde **d** é o vetor das diferenças entre os dados observados e os dados calculados; **m** é o vetor das mudanças nos parâmetros e G é a matriz das derivadas parciais que representa o quanto os dados estão modificados. Logo, os problemas inversos, lineares ou linearizados, podem ser formulados como um sistema linear de equações (Menke, 1984).

1.2.2 Formulação matricial do problema inverso

Como dito, os problemas geofísicos podem ser formulados a partir da equação (1.13) onde **d** representa o vetor coluna dos dados observados, **m** representa o vetor coluna dos parâmetros e G é a matriz $M \times N$ dos coeficientes que relaciona os M dados observados com os N parâmetros. O problema inverso consiste em se achar uma solução para **m**. Isto pode ser feito pré-multiplicando um operador H, tal que:

$$HG \approx I,$$
 (1.15)

logo:

$$H\mathbf{d} = HG\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}.\tag{1.16}$$

Se HG não é a matriz identidade, então $\hat{\mathbf{m}}$ não será o vetor \mathbf{m} . Logo, o problema consiste em determinar o operador H.

1.3 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (ou SVD do inglês singular value decomposition) consiste na determinação de duas matrizes ortogonais e também da matriz dos valores singulares, a partir da matriz A, de modo que satisfaz a seguinte condição:

$$A = U\Sigma V^T, \tag{1.17}$$

onde $U \in V$ são matrizes ortonormais e Σ é uma matriz diagonal que possui os valores singulares de A, ou seja, dada uma matriz $A_{M \times N}$, então existem matrizes ortogonais $U_{M \times M}$ e $V_{N \times N}$, que combinadas com a matriz $\Sigma_{M \times N}$ produzem o resultado acima mencionado.

Podemos definir Σ como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$
(1.18)

onde σ_i são os valores singulares de A.

Utilizando a equação (1.17), temos que:

$$A^{T}A = V\Sigma^{T}U^{T}U\Sigma V^{T} = V(\Sigma^{T}\Sigma)V^{T}.$$
(1.19)

Como V é uma matriz ortonormal e portanto unitária, sabemos que os valores σ_i^2 , que representam os valores diagonais de $\Sigma^T \Sigma$, são os autovalores de $A^T A$, enquanto que as colunas de V fornecem os autovetores associados. Analogamente, de:

$$AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T, (1.20)$$

podemos perceber que os valores σ_i^2 representam também os autovalores de AA^T com autovalores associados dados pelas colunas de U.

Podemos definir agora as matrizes V, $U \in \Sigma$ a partir das relações entre autovalores e autovetores, ou seja, devemos encontrar os autovetores da matriz $A^T A \in A A^T$ que corresponderão as colunas de $V \in U$ respectivamente, e as raízes dos autovalores de $A^T A$ ou $A A^T$ corresponderão aos elementos da diagonal principal de Σ , sendo dispostos na matriz em ordem decrescente, ou seja, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$. Como $U \in V$ são matrizes ortonormais, podemos determinar uma matriz inversa generalizada (Penrose, 1955), como:

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T, \tag{1.21}$$

on de Σ^+ é uma matriz diagonal que contém os recíprocos dos valores singular es de A.

A equação (1.17) é a forma mais utilizada para se representar a SVD mas podemos reescrevê-la ainda como um somatório:

$$A = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i u_i v_i^T, \tag{1.22}$$

onde $u_i \in v_i^T$ são as i-ésimas colunas de $U \in V^T$, respectivamente, e σ_i é o i-ésimo valor singular da matriz A. O produto escalar da equação anterior é denominado de autoimagem de A e ponderado pelo valor singular associado (Freire, 1986). Logo, podemos escrever uma matriz através da soma de suas autoimagens como mostrado na Figura 1.1.



Figura 1.1: Representação de uma matriz como somatório de suas autoimagens.

Escrevendo a inversa generalizada em forma de somatório, tem-se:

$$A^{+} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{i}} v_{i} u_{i}^{T}.$$
(1.23)

A matriz inversa generalizada pode ser escrita também como um somatório de suas autoimagens e torna-se perceptível que os valores singulares não-nulos, mas bastante pequenos, terão grande influência na construção da pseudo-inversa.

Portanto, a SVD permite encontrar uma matriz pseudo-inversa, A^+ , de uma matriz A que não possui posto completo e/ou que não é quadrada. Sendo uma ferramenta muito útil na prospecção geofísica, pois um problema inverso com uma matriz que possa ser invertida do modo convencional seria um exemplo muito específico.

1.4 Os Mínimos quadrados e a inversa generalizada

1.4.1 Mínimos quadrados

Num problema geral, em que a entrada é dada por parâmetros \mathbf{m} e a saída por $G\mathbf{m}$ de uma transformação linear sobre \mathbf{m} , seja \mathbf{d} o vetor que descreve o comportamento real, ou seja, mostra o que realmente é observado. Então, podemos reescrever a equação (1.13):

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m} \tag{1.24}$$

Os mínimos quadrados consiste em escolher valores de \mathbf{m} de maneira a minimizar a diferença entre $G\mathbf{m} \in \mathbf{d}$, ou seja:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - G\mathbf{m}.\tag{1.25}$$

Calculando o somatório dos erros quadrado, tem-se:

$$S = \mathbf{e}^{\mathbf{T}} \mathbf{e},\tag{1.26}$$

substituindo a equação (1.25) em (1.26) temos:

$$S = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m})$$
(1.27)

$$S = (\mathbf{d}^T - \mathbf{m}^T G^T) (\mathbf{d} - G\mathbf{m})$$
(1.28)

$$S = \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T G \mathbf{m} - \mathbf{m}^T G^T \mathbf{d} + \mathbf{m}^T G^T G \mathbf{m}.$$
 (1.29)

Derivando S em relação a **m** e igualando a zero, a fim de se encontrar um erro mínimo, temos:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{0} - \mathbf{d}^T G - G^T \mathbf{d} + 2G^T G \mathbf{m} = \mathbf{0}, \qquad (1.30)$$

como, $\mathbf{d}^T G = G^T \mathbf{d}$, então a solução para o problema dos mínimos quadrados é dado por um sistema de equações denominadas de normais, que é representada por:

$$G^T G \mathbf{m} = G^T \mathbf{d},\tag{1.31}$$

logo, a solução do sistema é dada por:

$$\mathbf{m} = (G^T G)^{-1} G^T \mathbf{d} \tag{1.32}$$

Sendo que as equações do sistema acima sempre possui solução sendo esta única se, e somente se, o posto da matriz $G_{M \times N}$ é igual a N.

Assim como o método dos mínimos quadrados a decomposição em valores singulares também se enquadra como uma técnica de minimização de erros. Substituindo a equação (1.17) em (1.32), temos:

$$\mathbf{m} = (V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T)^+ (V\Sigma^T U^T) \mathbf{d}, \qquad (1.33)$$

como U e Vsão ortonormais, tem-se:

$$\mathbf{m} = (V\Sigma^T \Sigma V^T)^+ (V\Sigma^T U^T) \mathbf{d}, \qquad (1.34)$$

$$\mathbf{m} = [(V^T)^+ \Sigma^+ (\Sigma^T)^+ V^+ V \Sigma^T U^T] \mathbf{d}, \qquad (1.35)$$

$$\mathbf{m} = [(V^T)^+ \Sigma^+ (\Sigma^T)^+ \Sigma^T U^T] \mathbf{d}, \qquad (1.36)$$

$$\mathbf{m} = [(V^T)^+ \Sigma^+ U^T] \mathbf{d}, \tag{1.37}$$

considerando a ortonormalidade de V, temos:

$$\mathbf{m} = V\Sigma^+ U^T \mathbf{d},\tag{1.38}$$

logo:

$$\mathbf{m} = G^+ \mathbf{d},\tag{1.39}$$

onde G^+ é a matriz inversa generalizada de Penrose.

1.4.2 Mínimos quadrados amortecidos

Como visto anteriormente a solução para o problema dos mínimos quadrados é dada pela equação (1.32), onde $(G^TG)^{-1}G^T$ é a matriz inversa generalizada de G. No caso em que a matriz G^TG é singular a sua inversão não pode ser feita por técnicas convencionais, neste caso lhe é acrescentada uma pequena perturbação afim de retirá-la desta condição de singularidade. Este processo é conhecido como amortecimento. Como consequência, a solução para o sistema fica:

$$\mathbf{m} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T \mathbf{m}. \tag{1.40}$$

Por vezes, como forma de amortecimento, utiliza-se a chamada regularização por matrizes de derivadas, onde se deseja determinar o parâmetro ótimo de regularização (Santos, 2006 & Santos et al., 2006).

1.4.3 Propriedades da inversa generalizada

A matriz inversa generalizada é única e esta possui quatro propriedades também conhecidas como condições de Penrose (1955). As propriedades são:

$$(i) \quad AA^+A = A, \tag{1.41}$$

(*ii*)
$$A^+AA^+ = A^+$$
, (1.42)

$$(iii) \quad (AA^+)^T = AA^+, \tag{1.43}$$

$$(iv) \quad (A^+A)^T = A^+A. \tag{1.44}$$

Logo, se uma das condições acima não é satisfeita, significa que a pseudo-inversa encontrada não será a matriz inversa generalizada. E, no caso em que a matriz inversa generalizada é a própria inversa convencional de A, podemos perceber que as condições acima também serão satisfeitas.

A maneira mais usual de se determinar a matriz inversa generalizada é utilizando o SVD (Lanczos, 1961).

CAPÍTULO 2

Critérios de Seleção de Valores Singulares

Neste capítulo abordaremos os critérios de corte de pequenos valores singulares utilizados no presente trabalho que são: curva da amplitude do valor singular; derivada do valor singular; erro RMS entre os dados observados e calculados; erro RMS entre os modelos verdadeiros e estimados; energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo.

Para fins de comparação e segurança na escolha do ponto ótimo, utilizamos também o erro RMS entre os modelos verdadeiro e estimado. Entretanto, este não pode ser considerado como um critério pois num caso real o modelo verdadeiro não é conhecido, logo não é possível determinar tal função.

No capítulo 1 foi feita uma abordagem dos problemas inversos mal-postos e foi visto que a estabilidade do problema diminui com o aumento de uma grandeza escalar conhecida como número de condição (NC), esta é definida como a razão entre o maior e o menor valor singular utilizados na composição da matriz referente ao sistema linear. Logo, valores singulares muito pequenos comprometerão a condição de estabilidade do problema. Então, devemos eliminá-los para se obter um sistema estável.

Contudo, se tirarmos todos os valores singulares pequenos a ponto de encontrar um número de condição muito próximo da unidade, com a finalidade de aumentar a estabilidade do problema, não conseguiremos encontrar uma matriz pseudo-inversa muito boa, pois ao diminuirmos a quantidade de valores singulares diminuimos, também, a quantidade de autoimagens que irão compor a matriz inversa generalizada, desta forma, reduzimos a informação contida no sistema. Então, torna-se necessário encontrar uma quantidade ótima de valores singulares que nos forneça uma boa pseudo-inversa e que também amenize o mal-condicionamento do problema, ou seja, encontrar um ponto intermediário que forneça a melhor solução factível.

Temos ainda que a definição do posto de uma matriz pela técnica de decomposição em valores singulares leva a duas situações distintas. A primeira é quando os valores singulares se dividem em duas classes de fácil identificação, com valores singulares nulos ou que podem ser desconsiderados e outra classe com os valores significativos. Para esta situação o posto da matriz corresponderá aos valores significativos. A segunda situação corresponde àquela em que os valores singulares decrescem progressivamente, desta forma, tornando mais difícil a determinação do posto da matriz (Sá, 1996). Para se realizar tal determinação é necessário definir qual será o valor singular mínimo, sendo este o objetivo do trabalho apresentado.

2.1 Amplitude do valor singular

Nesta seção estamos interessados em gerar uma curva da variação da amplitude do valor singular em função do índice destes valores, com o propósito de se analisar o decaimento dos valores singulares e encontrar um ponto de corte ótimo que, quando aplicado à inversão, possa fornecer uma solução satisfatória.

Nesta curva, a variação da amplitude dos valores singulares se dá em uma escala monologarítmica para que desta forma possamos encontrar uma região anômala que poderá sugerir o ponto de corte ótimo. Esta região pode ser determinada por, relativamente, uma alta variação na amplitude dos valores singulares, sugerindo assim uma grande mudança no comportamento destes.

2.2 Derivada do valor singular

Este é um critério que consiste em se determinar a derivada de todos os valores singulares e posteriormente se gerar uma curva desta em função do índice do valor singular. A derivada para cada ponto i pode ser denotada por:

$$f'(x_i) = \lim_{x_i \to x_{i+1}} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$
(2.1)

onde $f(x_i)$ representa a amplitude do valor singular e x_i o índice do valor singular, sendo, portanto, valores inteiros. Além disso, a variação do índice do valor singular é da ordem da unidade, logo, podemos reescrever a equação (2.1), como sendo:

$$f'(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$
(2.2)

Contudo, a amplitude dos valores singulares decresce com a quantidade de valores. Logo, podemos perceber que os valores da derivada serão negativos. No presente trabalho, utilizaremos o módulo dos valores da derivada do valor singular com o propósito de se trabalhar com valores positivos.

O objetivo de se utilizar a derivada do valor singular como critério de seleção é o mesmo da amplitude, de se encontrar um ponto onde a curva tem uma mudança brusca de direção indicando que os valores singulares alteram seu comportamento. Logo, o ponto de inflexão poderá mostrar o número ótimo, pois indica que os valores singulares aumentam consideravelmente a instabilidade.

É importante ressaltar que a utilização dos critérios da amplitude e derivada do valor singular, são influenciados apenas pelo valor singular e não com a quantidade de valores utilizadas na inversão, ou seja, um aumento no erro entre os parâmetros de dados pode modificar a quantidade de valores singulares que deve ser utilizada para se obter um modelo factível e variações no erro não podem ser vista nestes critérios, tornando seu uso um pouco mais limitado. Essa mudança na quantidade de valores singulares a ser utilizada pode ser explicada a partir da relação entre os erros dos parâmetros de dados e de modelo e o valor do número de condição, conforme pode ser visto na equação (1.9).

2.3 Erro RMS dos parâmetros de dados

Este critério e os demais sugerem uma seleção baseada na influência da quantidade de valores singulares incorporados na inversão.

A partir dos dados calculados com o modelo estimado e dos dados observados, podemos determinar o erro absoluto ou erro RMS entre os dados, sendo, para a tomografia sísmica de tempo de trânsito, escrito como:

$$E_d = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} (t_i^{obs} - t_i^{calc})^2}}{M},$$
(2.3)

onde M é o número de raios que percorre o meio, t_i^{obs} e t_i^{calc} são os tempos observados e calculados, respectivamente, que o raio i leva para percorrer a distância fonte receptor.

Um pequeno erro RMS entre os dados não implica num pequeno erro RMS entre os modelos, pois poderíamos estar com um problema inverso não-único, como descrito na seção 1.2, ou seja, com diversos modelos diferentes poderíamos encontrar a mesma resposta geofísica. Contudo, a análise do erro entre os dados conjuntamente com outros critérios conduzirá a escolha do ponto de corte que fonecerá a melhor solução para o problema.

Podemos reescrever o erro absoluto em forma percentual, dada por:

$$E_d^{Rel} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (t_i^{obs} - t_i^{calc})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M (t_i^{obs})^2}}.$$
(2.4)

2.4 Erro RMS dos parâmetros de modelo

A partir dos resultados da inversão tomográfica, é necessário ponderar o erro entre os parâmetros de modelo verdadeiros e os parâmetros de modelo estimados (no caso de um modelo sintético). Contudo, como dito anteriormente, se este fosse considerado como um critério de seleção não teria grande significado, pois o modelo verdadeiro não é conhecido em um caso real. Portanto, esta função é utilizada apenas para fins de validação das metodologias empregadas. Para um modelo discretizado em malhas o erro nos parâmetros de modelo pode ser escrito como:

$$E_m = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (m_i^{ver} - m_i^{est})^2}}{N},$$
(2.5)

onde N é o número de blocos da malha, m_i^{ver} e m_i^{est} são as propriedades físicas, que no presente trabalho representam as vagarosidades verdadeira e estimada, respectivamente, do bloco i.

O erro absoluto não traduz nada se não conhecemos a grandeza do valor medido. Portanto, para uma melhor idéia do grau de influência do erro podemos representa-lo em termos de porcentagem, sendo denominado de erro relativo, representado por:

$$E_m^{Rel} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i^{ver} - m_i^{est})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i^{ver})^2}}.$$
(2.6)

2.5 Energia do parâmetro de modelo

A análise da energia do modelo pode mostrar o quanto a solução do sistema está comprometida, ou seja, quanto mais estável são os valores singulares, menor é a variação da energia em função da quantidade de valores singulares, representando a estabilidade do modelo escolhido. A energia do modelo pode ser escrita em notação vetorial como:

$$E = \mathbf{m}^T \mathbf{m},\tag{2.7}$$

onde ${\bf m}$ é o vetor dos parâmetros estimados. Colocando a equação anterior como somatótio, tem-se:

$$E = \sum_{i=1}^{N} (m_i^{est})^2, \qquad (2.8)$$

onde N é o número de células em que o meio foi discretizado e m_i^{est} é o parâmetro de modelo estimado para o *i*-ésimo bloco.

2.6 Entropia do parâmetro de modelo

A partir da teoria da informação podemos aplicar o conceito de entropia considerando uma fonte m emitindo uma sequência de mensagens cada uma com sua respectiva probabilidade p_i (Shannon and Weaver, 1949).

A informação I_i contida em cada mensagem m_i pode ser obtida por:

$$I_i = \log \frac{1}{m_i^{est}}.$$
(2.9)

A entropia que representa a informação média da fonte é dada por:

$$H = \sum_{i=1}^{N} m_i^{est} I_i, \qquad (2.10)$$

logo,

$$H = \sum_{i=1}^{N} m_i^{est} \log(\frac{1}{m_i^{est}}),$$
(2.11)

onde m_i^{est} representa o parâmetro de modelo estimado no bloco *i*.

A entropia tem um significado físico que traduz o estado de ordem do sistema. A entropia diz que todos os sistemas fechados tendem a passar de um estado de ordem a um de desordem, ou seja, perder a sua nitidez (Bassrei, 1990). Para um modelo geológico podemos imaginar que as formações ocorreram seguindo este princípio de desordem, ou seja, deverá apontar uma entropia crescente. Além disso uma variação no valor da entropia indica um ganho de informação para o sistema.

A análise da entropia se deu a partir da geração de um gráfico desta, em função do número de valores singulares utilizados na inversão. Desta forma, se poderá analisar a estabilidade dos valores singulares na inversão.

Logo, podemos determinar a entropia de um modelo com a finalidade de encontrar o mínimo estado de desordem do sistema, ou seja, encontrar uma solução factível pouco comprometida pelos valores singulares que corresponderão aos valores instáveis.

CAPÍTULO 3

Traçado de Raios

A propagação de sinais sísmicos em um meio pode ser representada de diversas maneiras, tais como modelos analíticos, diferenças finitas e traçados de raios. A modelagem analítica é bastante eficiente computacionalmente porém restringe-se a casos relativamente simples, tornando-a limitada. Através das diferenças finitas podemos modelar meios complexos, contudo seu custo computacional é mais elevado. A modelagem utilizando traçados de raios permite modelar meios com exatidão e eficiência computacional.

Um raio é o caminho seguido pela energia indo de uma fonte a um receptor, ou seja, são traçados raios perpendiculares às frentes de onda (para um meio isotrópico), que representa a geometria ou traçado de raio. Estendendo esta abordagem para meios anisotrópicos, perdese a perpendicularidade entre os raios e as frentes de ondas, formando assim um traçado curvo.

3.1 Traçados de raios retos

Quando os contrastes de velocidade num modelo geológico são relativamente baixos, o ângulo de transmissão do raio, entre as interfaces, pode ser considerado constante. Então, podese aproximar a propagação de ondas no modelo por raios retos entre a fonte e o receptor. Essa modelagem tem alta eficiência computacional mas limita-se a modelos com pequenas variações de velocidade.

3.2 Traçados de raios curvos

Quando o contraste de velocidade tem um valor mais acentuado, a idéia de raios retos não pode ser aplicada, e então utilizamos uma outra idéia de transmissão que se baseia num traçado de raio curvo.

Uma forma de se analisar o traçado de raio curvo é pelo princípio de Fermat, que estabelece que a energia se propaga ao longo de caminhos que tornam o tempo de trânsito mínimo, sendo este caminho modelado por um ente matemático denominado raio.

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(x,z)}{c} dl,$$
(3.1)

onde t é o tempo de trânsito, n(x, z) = c/v(x, z) é a distribuição dos índices de refração em um meio bidimensional, sendo c a velocidade do som em um meio de referência e dl é a diferencial do comprimento do arco ao longo do raio.

Pelo princípio de Fermat o caminho do raio será aquele para o qual a integral acima é um valor estacionário, logo:

$$I = \int_{P_1}^{P_2} n(x, z) dl, \qquad (3.2)$$

onde I é o caminho do raio.

Analisando a equação (3.1) percebe-se que a integral não tem um caráter linear, ou seja, $l \in n(x, z)$ não são independentes mas que uma é função da outra.

Uma forma de se contornar este problema é linearizando a equação, para isto, podemos utilizar a expansão em série de Taylor e desprezar os termos de ordem igual e superior a dois, pois caso contrário continua-se com um problema não-linear. Aplicada a expansão tem-se que:

$$\Delta \mathbf{t} = G \Delta \mathbf{s},\tag{3.3}$$

onde $\Delta \mathbf{t}$ representa a variação do tempo de percurso resultante da perturbação $\Delta \mathbf{s}$ na distribuição da vagarosidade, e G representa a distância percorrida pelo raio.

3.2.1 Equação do raio

A equação de Euler é uma condição necessária para a existência de um valor extremo da integral variacional para o cálculo do comprimento acústico (Terra, 2007). Utilizando-se esta equação podemos obter uma equação diferencial para uma família de raios em um meio homogêneo:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) = \nabla n,\tag{3.4}$$

onde **r** é o vetor posição de um ponto qualquer ao longo de um raio, $\nabla n = dn/dr$ é o gradiente do índice de refração, e $d\mathbf{r}/dl$ é o vetor unitário tangente ao raio em (x, z).

Esta equação diferencial é denominada de equação do raio e para uma certa vizinhança regular sua solução representa os raios de menor comprimento.

Desenvolvendo a equação acima obtemos:

$$\frac{dn}{dl}\frac{d\mathbf{r}}{dl} + n\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \nabla n, \qquad (3.5)$$

contudo, temos que:

$$\frac{dn}{dl} = \frac{dn}{dr} \cdot \frac{dr}{dl} = \nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl}.$$
(3.6)

Substituindo a equação 3.6 em 3.5, temos:

$$\left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl}\right) \frac{d\mathbf{r}}{dl} + n \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = \nabla n.$$
(3.7)

Contudo, na forma apresentada, esta equação não é prática computacionalmente. Para contornarmos este problema, podemos expandir a função vetorial $\mathbf{r}(l)$ em série de Taylor e considerando os três primeiros termos, temos:

$$\mathbf{r}(l+\Delta l) = \mathbf{r}(l) + \frac{d\mathbf{r}}{dl}\Delta l + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\Delta l^2, \qquad (3.8)$$

onde Δl é um incremento no comprimento do raio.

Isolando o vetor curvatura $d^2\mathbf{r}/dl^2$ na equação (3.7) e substituindo na equação (3.8), chegamos a seguinte expressão:

$$\mathbf{r}(l+\Delta l) = \mathbf{r}(l) + \frac{d\mathbf{r}}{dl}\Delta l + \frac{1}{2n} \left[\nabla n - \left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl}\right)\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right]\Delta l^2.$$
(3.9)

Considerando dois pontos distintos do raio $P_1(x_k, z_k) \in P_2(x_{k+1}, z_{k+1})$ separados por uma distância Δl , o vetor unitário na direção de propagação pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = (\cos\alpha_k)\hat{\mathbf{i}} + (\sin\alpha_k)\hat{\mathbf{k}}, \qquad (3.10)$$

onde $\hat{\mathbf{i}} \in \hat{\mathbf{k}}$ são os vetores unitários nas direções $x \in z \in \alpha_k$ é o ângulo entre as direções tangente ao raio e horizontal na iteração k. Os valores do seno e do cosseno podem ser obtidos por:

$$\operatorname{sen} \alpha_k = \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta l},\tag{3.11}$$

$$\cos \alpha_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta l}.$$
(3.12)

O gradiente do índice de refração é dado por:

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial n}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}.$$
(3.13)

Sendo d o produto interno da equação (3.9):

$$d = \nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} = n_x \cos \alpha_k + n_z \sin \alpha_k, \qquad (3.14)$$

onde:

$$n_x = \frac{\partial n}{\partial x}$$
 e $n_z = \frac{\partial n}{\partial z}$. (3.15)

Utilizando diferenças finitas podemos aproximar as derivadas direcionais do meio discretizado por:

$$n_x(i,j) = \frac{n(i+1,j) - n(i-1,j)}{2\Delta x},$$
(3.16)

е

$$n_z(i,j) = \frac{n(i,j+1) - n(i,j-1)}{2\Delta z}.$$
(3.17)

O próximo ponto do raio pode ser estimado como:

$$x_{k+1} = x_k + \cos \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2n_k} (n_{k,x} - d_k \cos \alpha_k) \Delta l^2, \qquad (3.18)$$

е

$$z_{k+1} = z_k + \operatorname{sen} \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2n_k} (n_{k,z} - d_k \operatorname{sen} \alpha_k) \Delta l^2, \qquad (3.19)$$

onde n_k é o índice de refração; $n_{k,x}$ é a derivada de n_k na direção $x \in n_{k,z}$ é a derivada de n_k na direção z; Δl é constante e representa o deslocamento do raio, e d_k é a derivada direcional.

O índice de refração pode ser escrito como:

$$n_k = \frac{c}{V_k} = cs_k,\tag{3.20}$$

onde s_k é a vagarosidade referente a velocidade V_k . Substituindo esta equação nas equações (3.19) e (3.18), tem-se:

$$x_{k+1} = x_k + \cos \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2s_k} (s_{k,x} - d_k \cos \alpha_k) \Delta l^2,$$
(3.21)

е

$$z_{k+1} = z_k + \operatorname{sen} \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2s_k} (s_{k,z} - d_k \operatorname{sen} \alpha_k) \Delta l^2, \qquad (3.22)$$

sendo d_k agora definido por:

$$d_k = cd_k = s_{k,x} \cos \alpha_k + s_{k,z} \sin \alpha_k. \tag{3.23}$$

Então, a partir do conhecimento de sua posição atual (x_k, z_k) e de um ângulo α_k pode-se obter, sucessivamente, os pontos seguintes do raio.

Podemos perceber que a posição do raio é função da vagarosidade do meio. Contudo, se soubermos qual a real vagarosidade não seria necessário e nem teria sentido fazer a inversão. Portanto, o processo inverso é realizado porque a vagarosidade utilizada no traçado de raios não é a verdadeira, apesar de não podermos determinar a vagarosidade real, podemos achar uma melhor aproximação dela.

A vagarosidade utilizada no traçado de raios pode ser obtida utilizando-se informações de log sônico ou de algum conhecimento geológico da área. Para se tornar o meio contínuo é necessário realizar algum tipo de interpolação na distribuição das vagarosidades e de suas derivadas parciais. Considerando a interpolação bilinear descrita por Anderson e Kak (1982), que considera os quatros vértices do retângulo da atual coordenada do raio, temos que a vagarosidade de cada retângulo é assumida para o vértice de menor coordenada, ou seja, num retângulo compreendido entre os índices $i, i + 1, j \in j + 1$ será considerada para o ponto A de coordenadas (i, j). A interpolação para o ponto (x_k, z_k) dentro do retângulo é dada por:

$$s_k = p_A s_A + p_B s_B + p_C s_C + p_D s_D, (3.24)$$

$$s_{k,x} = p_A s_{A,x} + p_B s_{B,x} + p_C s_{C,x} + p_D s_{D,x}, aga{3.25}$$

$$s_{k,z} = p_A s_{A,z} + p_B s_{B,z} + p_C s_{C,z} + p_D s_{D,z}, aga{3.26}$$

onde s_{β} é a vagarosidade no vértice β , $s_{\beta,x}$ e $s_{\beta,z}$ são as derivadas parciais da vagarosidade nos vértices ($\beta = A, B, C \in D$) do retângulo que o raio percorre; p_{β} representa os pesos de cada elemento; s_k representada a vagarosidade interpolada e, $s_{k,x}$ e $s_{k,z}$ representam a interpolação das derivadadas direcionais. A Figura 3.1 ilustra uma interpolação bilinear.



Figura 3.1: Interpolação bilinear de um campo discretizado.

Os pesos de cada elemento da interpolação podem ser calculados por:

$$p_A = 1 - p_x - p_z + p_{xz}, (3.27)$$

$$p_B = p_x - p_{xz}, (3.28)$$

$$p_C = p_z - p_{xz}, (3.29)$$

$$p_D = p_{xz},\tag{3.30}$$

onde:

$$p_x = \frac{x_k - x_A}{\Delta x},\tag{3.31}$$

$$p_z = \frac{z_k - z_A}{\Delta z},\tag{3.32}$$

$$p_{xz} = p_x p_z, \tag{3.33}$$

$$p_A + p_B + p_C + p_D = 1. (3.34)$$

Esta metodologia, traçamento de raios, foi implementada computacionalmente em linguagem Fortran por Schots (1990) baseado no trabalho de Anderson e Kak (1982), tornando possível realizar o traçado de raios em meios geologicamente complexos.

3.3 Discretização do meio

Para uma abordagem tomográfica necessitamos discretizar o meio, ou seja, dividi-lo para que este possa ser tratado computacionalmente. No caso 2D, o procedimento consiste em dividir o meio em blocos retangulares de dimensões Δx e Δz como mostrado na Figura 3.2.

A partir desta divisão podemos determinar com a equação do raio a distância que cada raio percorre em cada bloco e desta forma montar a matriz tomográfica, ou seja, dividiremos o meio em células.



Figura 3.2: Modelo discretizado.

Apesar, da frente de onda percorrer todo o meio, os raios não o farão, visto que este é apenas um ente matemático que indica o caminho que a onda percorre. Logo, torna-se necessário uma boa disposição de fontes e receptores e uma boa discretização do meio a fim de que não ocorra um má iluminação do meio.

3.4 Ligação entre fonte e receptor

Um problema no traçado de raios é o de mirar o receptor corretamente, ou seja, predizer qual deve ser o ângulo de lançamento de um raio que se deseja captar em um determinado receptor. Quando o meio considerado é homogêneo, um raio reto liga o par fonte/receptor mas quando o meio é heterogêneo, os raios percorrem meios complexos, dificultando a previsão do ângulo.

Este problema de se estabelecer a ligação entre fonte e receptor é denominado de *ray linking* podendo ser resolvido por diversos métodos, como exemplo temos:

3.4.1 Metodo de canhoneio (shooting method)

Neste método todos os caminhos dos raios são traçados a partir de dois ângulos iniciais, um máximo (θ_{max}) e outro mínimo (θ_{min}) e de um incremento angular $(\Delta\theta)$ tal que se faz variar o ângulo de emissão entre esses dois extremos com o valor do incremento angular, dado por:

$$\theta_i = \theta_{min} + i\Delta\theta, \tag{3.35}$$

onde i = 0, 1, 2, ... até que o valor máximo seja atingido, como mostrado na Figura 3.3.



Figura 3.3: Representação esquemática do método de canhoneio.

O ângulo de lançamento adotado será aquele para o qual o raio mais se aproxime do receptor. Contudo, apesar deste método se baseiar numa idéia singular seu custo computacional é bastante elevado, sendo seu uso indicado em casos que a vagarosidade do meio sofra fortes variações.

3.4.2 Método de ligação (linking method)

O método baseia-se no traçamento de três raios a partir de um raio inicial com um ângulo inicial de lançamento (θ_1) e de um incremento angular ($\Delta \theta$), tal que os outros dois raios possuirão ângulos de lançamentos dados por:

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta \quad e \quad \theta_3 = \theta_1 - \Delta \theta,$$
(3.36)

sendo o ângulo de partida (θ_1) formado pela linha reta que liga a fonte e o receptor e a horizontal.

Traçando-se os três raios, podemos aplicar o refinamento de Newton-Raphson, então encontra-se uma estimativa para o próximo ângulo de lancamento (θ'_1) que estará mais próximo do receptor, sendo dado por:

$$\theta_1' = \theta_1 \pm \frac{2d_{1r}}{d_{23}} \Delta \theta, \qquad (3.37)$$

onde d_{1r} é a distância entre as coordenadas do ponto final do raio 1 e do receptor, d_{23} é a distância entre as coordenadas dos pontos terminais dos raios 2 e 3 e o sinal escolhido para a equação acima será positivo caso encaminhe o novo ângulo (θ'_1) no sentido do receptor e negativo caso contrário, como mostrado na Figura 3.4.



Figura 3.4: Representação esquemática do método de ligação.

Este processo de refinamento dever-se-á repetir até que a diferença entre as posições finais dos raios e as posições dos receptores possuam um erro aceitável, estipulado inicialmente, levando-se em conta as heterogeneidades do modelo.

No presente trabalho foi utilizada esta metodologia como solução para o problema de ligação fonte-receptor.
CAPÍTULO 4

Tomografia Sísmica

A tomografia é uma técnica utilizada afim de se reconstruir um determinado modelo ou imagem. Inicialmente usada na medicina, hoje mostrando-se adequada aos estudos geofísicos. É um tipo especial de problema inverso que permite estimar uma função utilizando-se integrais de linha da mesma.

Na geofísica a tomografia utiliza como levantamento de aquisição a geometria interpoço (XWP - Crosswell profile) onde são fixados fontes em um poço e receptores em outro, colocando, desta forma, o meio a ser imagiado em destaque.

Dois tipos de tomografia utilizada na geofísica são a tomografia eletromagnética, onde as medidas podem ser invertidas para definição de propriedades do reservatório assim como saturação de água ou porosidade e a tomografia sísmica onde, por exemplo, a velocidade sísmica e a propriedade de atenuação da Terra podem ser relatadas através do tempo de trânsito observado (t_k) e amplitude (a_k) da onda, respectivamente, através das ondas diretas, desta forma sendo conhecida como método sísmico de transmissão.

A tomografia sísmica é a inversão destas integrais de linhas obtendo a velocidade v(x, z)ou atenuação $\alpha(x, z)$.

$$t_k = \int_{R_k} \frac{ds}{v(x,z)} \quad e \quad \ln \frac{a_k}{a_0} = \int_{R_k} -\alpha(x,z)dl, \tag{4.1}$$

onde dl é o elemento do caminho, R_k é o caminho do raio e k = 1, ..., M.

Juntas, imagens sísmicas e eletromagnéticas, conduzem a uma melhor estimativa da continuidade do reservatório e o volume entre poços (Abriel, 2008). Logo, esta técnica tem por interesse gerar um tomograma que contenha a disposição da propriedade do meio desejada, assim, possibilitando uma idealização das caractéristicas geológicas e físicas de subsuperfície.

Para a tomografia sísmica, além da geometria de aquisição XWP tem-se também a VSP (perfil sísmico vertical do inglês vertical seismic profile). Nesta as fontes são dispostas em um poço e os receptores na superfície ou vice versa. Uma vantagem do VSP é de se poder trabalhar, também, com ondas refletidas; uma desvantagem seria uma iluminação parcial da

região de estudos pelas ondas diretas.

A tomografia sísmica pode ser classificada de acordo com os tipos de ondas utilizadas nos levantamentos tomográficos. Podem ser usadas ondas transmitidas, refletidas, refratadas ou difratadas. Também existem tomografias denominadas híbridas devido a utilização de vários tipos de ondas no seu levantamento ou porque se deseja estimar outras propriedades físicas além da velocidade (como atenuação por exemplo).

Existem ainda outras classificações que são: tomografias dinâmica e cinemática que utilizam a forma da onda e o tempo de trânsito, respectivamente, como dados de entrada. No trabalho apresentado, utilizaremos apenas a abordagem cinemática.

4.1 Tomografia de tempo de trânsito

A tomografia de tempo de trânsito utiliza os tempos de percurso entre as fontes e os receptores como vetor dos dados observados na inversão. Esta encontra aplicação em geofísica de reservatório (Abriel, 2008), uma vez que se trata de uma técnica utilizada no monitoramento e caracterização de reservatórios.

A partir da equação (4.1) que relata o tempo de trânsito podemos escrever:

$$\mathbf{t} = \int_{r} \mathbf{s}(x, z) dl, \qquad (4.2)$$

onde t é o vetor do tempo de trânsito, r é o caminho do raio, $\mathbf{s}(x, z)$ é o vetor da vagarosidade e dl é um elemento do caminho do raio.

Temos que a equação para o tempo de trânsito é não linear, ou seja, o raio ao percorrer meios homogêneos comporta-se como sendo reto, porém ao percorrer meios em que existem contrastes de velocidades o novo caminho descrito será curvo. Para que fosse possível saber onde e quanto o raio se encurvaria seria necessário conhecer a distribuição do campo de velocidades em subsuperfície que neste caso é o parâmetro que deseja-se estimar. Logo, há uma não-linearidade do problema e para contorna-lá deve-se realizar uma linearização. Partindo da equação (4.2) e utilizando uma notação vetorial, tem-se:

$$\mathbf{t} = \mathbf{g}[\mathbf{s}(x, z)],\tag{4.3}$$

onde:

$$\mathbf{g}[\mathbf{s}(x,z)] = \int_{r} \mathbf{s}(x,z) dl.$$
(4.4)

Utilizando a expansão em série de Taylor e ignorando os termos de ordem maior ou igual a dois, obtém-se:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0), \tag{4.5}$$

ou

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_0 = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0), \tag{4.6}$$

generalizando, temos:

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_i = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i), \tag{4.7}$$

ou ainda

$$\Delta \mathbf{t}_i = G \Delta \mathbf{s}_i, \tag{4.8}$$

onde o vetor $\Delta \mathbf{t}_i$ é o resíduo temporal que corresponde as diferenças entre os tempos de trânsito calculados e os tempos de trânsito observados em uma determinada iteração i; o vetor $\Delta \mathbf{s}_i$ corresponde as diferenças entre a vagarosidade do *i*-ésimo modelo e (i+1)-ésimo modelo; a matriz G é uma aproximação da matriz das derivadas $\partial g/\partial s$ e contém os elementos g_{ij} que correspondem às distâncias que o j-ésimo raio percorre na *i*-ésima célula.

Logo, partindo-se de um modelo inicial, s_0 , podemos calcular uma atualização para a nova vagarosidade, através de procedimento iterativos, como:

$$\Delta \mathbf{s}_i = G^+ \Delta \mathbf{t}_i, \tag{4.9}$$

onde G^+ é uma aproximação da matriz inversa de G. Então, a nova vagarosidade estimada será definida por:

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{s}_i + \Delta \mathbf{s}_i. \tag{4.10}$$

Logo, a partir do modelo inicial realiza-se o traçado de raios (problema direto) em seguida é feito uma inversão. Com o novo vetor vagarosidade repete-se o traçado de raios e novamente a inversão, este procedimento continua até se chegar a um modelo aceitável de subsuperfície. A Figura 4.1 apresenta os passos da inversão tomográfica linearizada.

4.1.1 Tomografia linear de tempo de trânsito

Caso o contraste de velocidade do meio seja baixo, ou se desconsiderarmos a influência do campo de vagarosidade no traçado de raios, a fim de se tentar validar alguma metodologia e não de tentar obter uma imagem de subsuperfície, teremos que a equação que descreve o tempo de trânsito será dada por uma equação linear do tipo:

$$\mathbf{t} = G\mathbf{s},\tag{4.11}$$

onde \mathbf{t} é o vetor de tempos de trânsito, que corresponde aos dados observados; G é a matriz que descreve a trajetória dos raios, que neste caso serão retos e \mathbf{s} é o vetor de vagarosidade, portanto, o vetor vagarosidade pode ser estimado, como:

$$\mathbf{s} = G^+ \mathbf{t}.\tag{4.12}$$



Figura 4.1: Fluxograma da inversão tomográfica linearizada.

A matriz G em ambos os casos, linear e linearizado, tem tamanho $M \times N$, onde M é o número total de raios; e N é o número total de blocos no qual o modelo foi discretizado. Logo, podemos escrever a matriz G como:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MN} \end{bmatrix}.$$
 (4.13)

Portanto a i-ésima linha de G corresponde a trajetória do i-ésimo raio nas j-ésimas células, sendo a matriz esparsa (possui uma grande quantidade de zeros) devido aos raios

atravessarem uma pequena quantidade de células.

Como dito anteriormente o caso linear não pode ser utilizado como ferramenta de imageamento em subsuperfície a não ser que haja pouco contraste de velocidade, limitando assim a complexidade do modelo, pois existe a dependência do raio com a vagarosidade, mas este, o caso linear, pode ser usado para se tentar validar uma determinada metodologia a ser empregada, como seleção de valores singulares.

4.1.2 Simulações numéricas para o caso linear

A abordagem linear foi tratada por Silva (2008) e Silva e Bassrei (2007) e com o propósito de comparação das abordagens linear e linearizadas reproduzimos os resultados.



MODELO VERDADEIRO

Figura 4.2: Modelo Sintético A

A Figura 4.2 representa um modelo sintético dividido por três campos de velocidades distintos representados pelas cores branca, cinza e preta. Apresentando uma camada planoparalela de baixa velocidade e um possível reservatório alvo com uma maior velocidade sísmica.

O meio (Figura 4.2) foi discretizado em uma malha 20×20 , ou seja, ele foi dividido em 400 células. A geometria de aquisição dos dados é do tipo poço a poço, sendo colocado 20 fontes em um poço e 20 receptores em outro, contabilizando 400 raios. Os elementos da matriz tomgráfica G representa a distância que o *j*-ésimo raio percorre no *i*-ésimo bloco, sendo obtida pela técnica de traçado de raios (descrita no Capítulo 3), sendo de ordem 400×400 , consequentemente a sua matriz pseudo-inversa G^+ também é da mesma ordem.

Foram geradas as curvas da amplitude do valor singular e da derivada do valor singular exibidas na Figura 4.3 e Figura 4.4 respectivamente.



Figura 4.3: Decaimento da amplitude do valor singular em escala monologarítmica.

Para realizar-se a avaliação da influência do número de valores singulares no erro entre os parâmetros de modelo, no erro entre os parâmetros de dados, na energia do parâmetro de modelo e na entropia do parâmetro de modelo, são apresentados os seguintes gráficos mostrados nas Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, respectivamente. Sendo que as várias curvas em cada figura mostram os diferentes valores de ruído "alpha" inserido nos dados de entrada.

A partir da análise gráfica das Figuras 4.5 e 4.6, podemos perceber que um maior ou menor erro entre os parâmetros de dados, não implica necessariamente num maior ou menor erro entre os parâmetros de modelo. Analisando conjuntamente os quatro gráficos



Figura 4.4: Derivada do valor singular em escala monologarítmica.



Figura 4.5: Erro dos parâmetros de modelo em função do número de valores singulares.

percebemos também, que quando os valores singulares se aproximam de zero, as funções têm um comportamento diferente do que até então havia tido, alguns crescem consideravelmente, como o erro dos parâmetros de dado, erro dos parâmetros de modelo e a energia e vemos que a entropia sofre perturbações no seu valor. Isso acontece devido ao fato da instabilidade do problema estar aumentando juntamente com o seu número de condição.



Figura 4.6: Erro dos parâmetros de dado em função do número de valores singulares.



Figura 4.7: Energia do modelo em função do número de valores singulares.

Os gráficos da energia e da entropia em função do número de valores singulares, mostrados nas Figura 4.7 e 4.8, respectivamente, mostram um intervalo em que estas funções permanecem praticamente constante, isto sugere que os valores singulares nesta faixa tem um valor estável.

Então, existe um número de valores singulares ótimo em que os dados são estáveis e o erro é mínimo, ou seja, essa quantidade de valores singulares nos proporcionará estimar um melhor modelo do que o que seria estimado por todos os valores ou por uma quantidade



Figura 4.8: Entropia do modelo em função do número de valores singulares.

qualquer que fosse diferente do número ótimo.

A partir dos critérios utilizados podemos determinar o número ótimo de valores singulares a serem incorporados na matriz tomográfica inversa como sendo de 373. A Figura 4.9 mostra o modelo estimado com a quantidade ótima.



Figura 4.9: Modelo A estimado com 373 valores singulares.

CAPÍTULO 5

Simulações Numéricas para o Modelo de Reservatório

Neste capítulo e no próximo realizaremos inversões com diferentes quantidades de valores singulares, utilizando modelos sintéticos para se obter uma representação da variação do erro dos parâmetros de dados, erro dos parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares utilizado nas inversões.

A utilização de modelos sintéticos é necessária para que possamos determinar a diferença entre os parâmetros de modelo verdadeiro (neste caso o modelo sintético) e os parâmetros do modelo estimado, pois num modelo real não poderíamos fazer tal determinação já que não conhecemos o que realmente há em subsuperfície, ou seja, para um caso real, podemos determinar apenas o modelo estimado.

5.1 Descrição do modelo

A Figura 5.1 mostra um modelo sintético, semelhante ao modelo A, porém, apresenta um pouco mais de complexidade e também uma maior extensão horizontal e vertical. O modelo possui quatro campos distintos de velocidades que se estende de 2200 a 2600 m/s. O meio possui três camadas plano-paralelas que representam arenitos com valores de velocidade acústica iguais a 2200 e 2600 m/s e como principal feição uma lente simulando um reservatório alvo caracterizado por um valor relativamente alto de velocidade acústica (2600 m/s) envolvido por um meio selante (2500 m/s).

A discretização do meio foi em uma malha 30×30 , ou seja, 30 células na direção horizontal e 30 na vertical, contabilizando 900 células quadradas de dimensão igual a 30 m. Foram colocadas 30 fontes em um poço e 30 receptores no outro com equiespaçamento de 30 m, totalizando 900 raios. O sistema é determinado e a matriz tomográfica é da ordem de 900×900 .



Figura 5.1: Modelo sintético B.

5.2 Primeira iteração

Na primeira iteração realizou-se um traçado de raio considerando um campo de velocidades homogêneo de 2000 m/s.

Foram geradas as curvas da amplitude do valor singular e derivada do valor singular mostradas nas Figuras 5.2 e 5.3 para se avaliar o comportamento do valor singular.

Além disso, foram geradas as curvas de erro entre os parâmetros de dado, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo mostrados nas Figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente, para que fosse possível observar a influência da quantidade de valores singulares nos resultados da inversão.

As Figura 5.2 e Figura 5.3 mostram o possível intervalo de interesse para o corte dos valores singulares que é representada pelo ponto de inflexão das curvas, sugerindo um corte dos pequenos valores singulares. Contudo, a Figura 5.5, curva do erro entre os parâmetros de modelo em função da quantidade de valor singular, mostra que não somente os pequenos valores singulares devem ser desconsiderados, ou seja, indica que uma quantidade bem maior de valores singulares devem ser descartados para ser possível estimar um modelo satisfatório. Logo, os critérios da amplitude e derivada do valor singular se mostraram inconsistentes na escolha do ponto de corte.



Figura 5.2: Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1^a iteração.



Figura 5.3: Derivada do valor singular em escala monolog para a 1^a iteração.

A Figura 5.5 mostra um aumento significativo no erro entre os parâmetros de modelo entre 200 e 250 valores singulares. A Figura 5.4 mostra que na mesma região há um decréscimo significativo no erro entre os parâmetros de dados, entretanto, não estamos procurando um erro mínimo entre os dados observados e calculados visto que podemos estar envolvido pela não unicidade. Estamos a procura de um ponto anômalo que possa indicar a região ótima.

Os critérios da energia e entropia do parâmetro de modelo representados nas Figuras 5.6 e 5.7 mostram um decréscimo do seu valor indicando uma região de instabilidade do sistema provocado pelo seu NC.



Figura 5.4: Erro entre os parâmetros de dado em função do número de valores singulares para a 1^a iteração.



Figura 5.5: Erro entre os parâmetros de modelo em função do número de valores singulares para a 1^a iteração.

Logo, os critérios, representados nas Figuras 5.4, 5.6 e 5.7 indicam um mesmo ponto ótimo que o sugerido pelo erro entre os parâmetros de modelo (Figura 5.5). Dessa forma, mostraram-se válidos para a seleção de valores singulares. O ponto de corte, extraído visualmente, foi de 230 valores singulares. A Figura 5.8 mostra o modelo recuperado com a quantidade ótima de valores singulares para a primeira iteração.



Figura 5.6: Energia dos parâmetros de modelo em função do número de valores singulares na 1^a iteração.



Figura 5.7: Entropia dos parâmetros de modelo em função do número de valores singulares na 1^a iteração.

5.3 Segunda iteração

Com os valores de vagarosidade calculados na primeira iteração realizou-se um novo traçado de raios, dessa forma, iniciando a segunda iteração.

Uma vez que os critérios da amplitude e derivada do valor singular mostraram-se incoerentes para a escolha do ponto de corte ótimo, então, não os reproduzimos para a segunda



Figura 5.8: Modelo estimado B na 1^a iteração com 230 valores singulares.

iteração.

As curvas de erro entre os parâmetros de dado, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo, e entropia do parâmetro de modelo são mostrados nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, respectivamente.



Figura 5.9: Erro entre os parâmetros de dado em função do número de valores singulares para a 2^a iteração.

Assim como na primeira iteração o erro entre os parâmetros de dados e erro entre os parâmetros de modelo apresentam uma diminuição e um aumento nos seus valores na região ótima, respectivamente, desta maneira, mostrando o mesmo intervalo de interesse.

A energia do parâmetro de modelo e a entropia do parâmetro de modelo mostram um comportamento inverso ao da iteração anterior, mas ainda assim indicam a região de instabilidade sugerindo a quantidade ótima.



Figura 5.10: Erro entre os parâmetros de modelo em função do número de valores singulares para a 2^a iteração.



Figura 5.11: Energia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares na 2^a iteração.

Os critérios analisados na iteração, novamente, possuiram consistência indicando uma mesma região de corte com 280 valore singulares. A Figura 5.13 representa o modelo B estimado na segunda iteração com o número de valores singulares ótimo.



Figura 5.12: Entropia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares na 2^a iteração.



Figura 5.13: Modelo estimado B na 2^a iteração com 280 valores singulares.

5.4 Terceira iteração

Com os resultados gerados na iteração anterior deu-se início à terceira iteração. Para esta, as Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 apresentam, respectivamente, o erro entre os parâmetros de dados, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo.



Figura 5.14: Erro entre os parâmetros de dado em função do número de valores singulares na 3^a iteração.



Figura 5.15: Erro entre os parâmetros de modelo em função do número de valores singulares na 3^a iteração.



Figura 5.16: Energia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares na 3^a iteração.



Figura 5.17: Entropia do parâmetro de modelo em função do número de valores singulares na 3^a iteração.

O gráfico do erro entre os parâmetros de dados em função da quantidade de valores singulares mostra uma grande diminuição do erro entre os dados na região entre 200 e 250 valores singulares, assim, sugerindo o ponto ótimo. A energia e a entropia do parâmetro de modelo refletem a variação do erro entre os parâmetros de dados numa instabilidade na mesma região considerada.

Os três critérios foram, outra vez, validados pelo erro entre os parâmetros de modelo,

indicando uma região de corte, coerente com o aumento do erro entre o modelo estimado e verdadeiro, com 217 valores singulares. A Figura 5.18 apresenta o modelo recuperado na terceira iteração com a quantidade ótima de valores singulares.



Figura 5.18: Modelo estimado B na 3^a iteração com 217 valores singulares.

5.5 Discussões e considerações

Os resultados obtidos para as inversões mostraram que diferentemente da abordagem linear, para o qual a quantidade ótima de valores singulares era muito próxima da quantidade total, o número de valores singulares descartados para o caso linearizado deveriam ser muito maior para que fosse possível estimar um modelo satisfátorio.

A partir da relação entre o erro dos dados, erro dos modelos e o número de condição, explicitada no primeiro cápitulo, podemos explicar o fato de um maior números de valores singulares descartados, pois, utilizamos um campo inicial homogêneo, dessa forma, além da vagarosidade considerada para o meio, no traçado de raios, ser diferente da verdadeira, também, temos que o raio percorrerá um caminho muito diferente do caminho real aumentando assim o erro entre os dados. Logo, para uma boa representação da subsuperfície, ou seja, um erro mínimo para o modelo, precisamos diminuir o número de condição, portanto, aumentar a amplitude do valor singular mínimo considerado para o sistema. Logo, podemos explicar o melhor resultado para o caso linear pelo menor erro entre os dados de entrada, pois os raios são considerados retos, ou seja, conhecemos perfeitamente o caminho que este percorrerá, precisamos encontrar apenas o campo de vagarosidade. Assim, podemos utilizar uma maior quantidade de valores singulares e por consequência uma maior quantidade de informações para o sistema e obter uma resposta ainda mais satisfatória.

A Tabela 5.1 apresenta o erro RMS entre os parâmetros de modelo, erro RMS percentual para o modelo e a quantidade de valores singulares escolhida como ótima para cada iteração.

Erro entre os parâmetros de modelo			
Iteração	Erro RMS (s/m)	Erro RMS (%)	Valores singulares
1	$2.6886 \ge 10^{-7}$	1.89 %	230
2	$1.9695 \ge 10^{-7}$	1.38~%	280
3	$1.9502 \ge 10^{-7}$	1.37 %	217

Tabela 5.1: Síntese dos resultados numéricos para o modelo B.

É perceptível que o erro diminui com o número de iterações, entretanto, este não varia muito na terceira iteração, tanto numérica como visualmente, indicando assim uma convergência.

CAPÍTULO 6

Simulações Numéricas para o Modelo de Falha

Novamente utilizamos um modelo sintético para analisar a metodologia linearizada empregada. Nesta parte do trabalho analisaremos, também, como a qualidade da informação (parâmetro de dados ou simplesmente dados de entrada) interferem na resposta (modelo estimado) obtida pela inversão baseada na seleção de valores singulares.

6.1 Descrição do modelo

A Figura 6.1 representa o modelo sintético e possui quatro campos de velocidades diferentes com uma variação que vai de 3000 a 4000 m/s. Com duas camadas consideradas como arenito com velocidades acústica de 3000 e 3200 m/s que se repetem pelo modelo. Tem-se ainda a presença de calcário com velocidade de 3600 e 4000 m/s. Os diferentes valores de velocidade para as rochas estão associados às diferenças nas suas propriedades físicas, por exemplo, temos a porosidade ou saturação de óleo.

O modelo sintético C representa uma idealização singular de um meio geológico limitado lateralmete por poços exploratórios, de monitoramento ou de injeção de água.

Como principais feições para o respectivo modelo temos a presença de uma falha normal, com alto rejeito, acentuado por uma descontinuidade lateral de uma camada plano-paralela de calcário. O caráter estrutural da falha é de grande importância no estudo de reservatórios de petróleo devido à geração de trapas (armadilhas) para o hidrocarboneto. Desta forma, é necessário que haja uma boa recuperação das estruturas para que a metodologia se mostre adequada ao estudo de monitoramento e caracterização de reservatórios.

Tem-se ainda uma heterogeneidade de alta velocidade, entre as profundidades de 1000 e 1150 m, podendo representar uma lente de calcário que se enquadra como o reservatório alvo selado por rochas capeadoras em uma armadilha estratigráfica, ou mesmo representar a rocha geradora que é de bastante interesse para a geoquímica do petróleo como também para se poder analisar a existência de reservatórios vizinhos ainda não determinados ou ainda para



Figura 6.1: Modelo sintético C.

se ter um maior controle sobre o sistema petrolífero. Sendo que a idéia da heterogeneidade representar uma rocha geradora se mostra mais adequada devido à sua grande extensão para representar uma lente em uma armadilha estratigráfica como um pinch out. Entretanto, no presente trabalho estamos mais interessados na boa recuperação da estrutura do que no significado geológico das mesmas.

O modelo foi discretizado em 15 blocos na direção horizontal e 60 blocos na direção

vertical totalizando 900 blocos. Os blocos possuem formato quadrado de dimensão 20 m. Simulou-se dois tipos de aquisição, onde ambos foram do tipo poço a poço. O primeiro tipo de aquisição gerou um sistema determinado e o segundo um sistema sobredeterminado.

A utilização de dois tipos de sistemas (determinado e sobredeterminado) foi necessária para se avaliar a influência da iluminação do meio pelos raios na obtenção da imagem em subsuperfície.

6.2 Caso determinado

No primeiro tipo de aquisição montamos um sistema determinado. Para tanto foram utilizadas 30 fontes e 30 receptores em dois poços diferentes gerando 900 raios. As distâncias fonte-fonte e receptor-receptor em cada poço é de 40 metros. A matriz tomográfica obtida possui ordem 900×900 .

Podemos perceber, antecipadamente, que certamente haverá um problema de iluminação, pois a distância fonte-fonte e receptor-receptor é equivalente ao dobro da dimensão lateral das células em que o meio foi discretizado.

6.2.1 Primeira iteração

A primeira iteração partiu de um modelo inicial de velocidade acústica constante igual a 3600 m/s. Logo, o traçado de raios gerou raios retos.



Figura 6.2: Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1^0 iteração do caso sobredeterminado



Figura 6.3: Derivada valor singular em escala monolog para a 1^0 iteração do caso determinado

As Figuras 6.2 e 6.3 mostram a variação da amplitude do valor singular e da derivada do valor singular em função do próprio valor singular.

Outra vez os critérios da amplitude e derivada do valor singular se mostraram inadequados à seleção de valores singulares no caso linearizado, pois não há coincidência destes com o erro entre os parâmetros de modelo, apresentado na Figura 6.5, ou seja, estes critérios indicam uma região de corte dos valores singulares diferente da região que contém o ponto



Figura 6.4: Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso determinado.



Figura 6.5: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso determinado.



Figura 6.6: Energia do parâmeto de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso determinado.

de erro mínimo do modelo.

Foram gerados ainda os gráficos das funções do erro entre os parâmetros de dado, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo apresentados nas Figuras 6.4, 6.6 e 6.7 respectivamente.

Os demais critérios utilizados apontaram para a mesma região indicada pelo erro entre os parâmetros de modelo, ou seja, o erro entre os parâmetros de dados, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo apresentou mudanças nos seus comportamentos indicando um aumento da instabilidade do sistema e assim sugerindo o ponto de corte.

O ponto ótimo considerado foi de 327 valores singulares. A figura 6.8 mostra o modelo recuperado na primeira iteração para o caso determinado com 326 valores singulares.



Figura 6.7: Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso determinado.

6.2.2 Segunda iteração

Com o valores de vagarosidade obtidos na iteração anterior deu-se início à segunda iteração. Os critérios da amplitude e derivada do valor singular não serão apresentados devido às suas incoerências com o erro do parâmetro de modelo na primeira interação do caso determinado.

As Figuras 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 mostram as curvas de erro entre os parâmetros de dados, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo, respectivamente, em função da quantidade de valores singulares utilizada em cada inversão.

Podemos perceber na Figura 6.10 que a quantidade de valores singulares que fornece o erro do parâmetro de modelo mínimo está próximo à região de 200 valores singulares. Contudo, esta função não aumenta rapidamente, a partir do ponto de erro mínimo, mas sim gradualmente, mostrando um aumento repentino após 300 valores singulares. O reflexo



Figura 6.8: Modelo C estimado na primeira iteração do caso determinado com 327 valores singulares.

deste comportamento pode ser observado na maneira como variam as demais funções que apresentam um ponto de corte diferente do ponto de erro mínimo.

Nesta iteração podemos perceber que apesar dos critérios apresentarem um ponto de corte diferente do erro mínimo, ainda assim é um erro pequeno e aceitável sendo, desta maneira, validados pelo erro entre os parâmetros de modelo.

A partir dos critérios selecionamos o ponto ótimo como sendo de 330. A Figura 6.13



Figura 6.9: Erro entre os parâmetros de dados em função dos valores singulares para a 2^a iteração para o caso determinado.



Figura 6.10: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso determinado.

apresenta o modelo estimado com a quantidade de 330 valores singulares para o caso determinado na segunda iteração.



Figura 6.11: Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso determinado.



Figura 6.12: Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso determinado.

6.2.3 Terceira iteração

A partir dos resultados da última iteração realizamos a terceira iteração. Outra vez, os critérios de seleção de valores singulares inconsistentes para o caso linearizado não foram reproduzidos.

As Figuras 6.14, 6.15, 6.16 e 6,17 mostram as curvas do erro entre os parâmetros de



Figura 6.13: Modelo C estimado na segunda iteração com 330 valores singulares.

dado, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo em função da quantidade de valores singulares, respectivamente.

O erro entre os parâmetros de modelo, nesta iteração, apresentou uma variação suave do seu valor sendo este comportamento refletido nos demais critérios e assim dificultando a escolha do ponto ótimo.

Logo, temos uma região ótima ao invés de um único ponto de corte, pois o ponto com erro mínimo entre os parâmetros de modelo, que equivale à 295 valores singulares, não se



Figura 6.14: Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.



Figura 6.15: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.

mostra evidente nas demais curvas das respectivas funções analisadas, mas a partir da análise conjunta dos critérios podemos escolher um ponto que mais se aproxima do ponto ótimo.

Devido à forte variação dos valores da energia e entropia do pârametro de modelo com os valores dos diferentes níveis de ruído inserido existe uma sútil indicação da região ótima nos respectivos gráficos, ao contrário do que se observa no erro entre os parâmetros de dados, isso se deve às escalas gráficas utilizadas para as funções.

A partir da coerência entre os critérios podemos validá-los e determinar a região ótima como sendo entre 290 e 320 valores. Escolhemos a quantidade ótima como sendo a média entre as extremidades da região que equivale à 305 valores singulares que é diferente do ponto de erro mínimo entre os parâmetros de modelo. A Figura 6.18 mostra o modelo recuperado na terceira iteração do caso determinado com a quantidade escolhida como ótima.



Figura 6.16: Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.



Figura 6.17: Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração do caso determinado.



Figura 6.18: Modelo C estimado na terceira iteração com 305 valores singulares.

6.3 Caso sobredeterminado

Para este caso utilizamos uma quantidade maior de fontes e receptores para que desta forma pudessemos realizar uma melhor iluminação do meio. A aquisição foi do tipo poço a poço, onde foram postos 40 fontes e 40 receptores em cada um dos poço. A distância fonte-fonte e receptor-receptor foi de 30 m. Com este tipo de aquisição foram gerados 1600 raios.

A matriz tomográfica considerada para o sistema possui ordem 1600×900 . A matriz Σ obtida pela SVD para este caso possuirá ordem de 1600×900 e 900 valores singulares, logo, serão realizadas, também, 900 inversões para este caso.

Temos ainda que o meio não será perfeitamente iluminado, pois a distância fonte-fonte e receptor-receptor continua maior que a dimensão lateral dos blocos do meio discretizado. Entretanto, possuirá uma maior iluminação que o caso anterior e desta forma, trazendo uma maior quantidade de informações ao sistema.

6.3.1 Primeira iteração

A partir de um modelo inicial homogêneo de velocidade 3600 m/s realizou-se o traçado de raios dando início à primeira iteração.



Figura 6.19: Amplitude do valor singular em escala monolog para a 1^a iteração do caso sobredeterminado

As Figuras 6.19 e 6.20 mostram a curva da amplitude do valor singular e derivada do valor singular. Novamente podemos perceber que os critérios da amplitude do valor singular e derivada do valor singular não se mostraram coerentes com o erro entre os parâmetros de modelo, mostrando-se inaptos à seleção de valores singulares.

As Figuras 6.21, 6.22, 6.23 e 6.24 mostram o erro entre os parâmetros de dados, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo, respectivamente, em função da quantidade de valores singulares utilizados nas inversões para diferentes valores de ruído gaussiano inserido nos dados de entrada.

O erro entre os parâmetros de dados apresenta uma queda no seu valor na região de


Figura 6.20: Derivada valor singular em escala monolog para a 1^a iteração do caso sobredeterminado



Figura 6.21: Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso sobredeterminado.

670 valores singulares que coincide com a região indicada pelo erro entre os parâmetros de modelo mostrando-se desta forma coerênte com o erro mínimo do modelo.

As curvas da energia e entropia do parâmetro de modelo possuem comportamentos similares, possuindo pequenas perturbações e tendem a alcançar sua estabilidade, fato que não se concretiza, pois quando estão se estabilizando voltam a sofrer grandes perturbações sugerindo que o ponto de corte é coincidente com o erro entre os parâmetros de modelo,



Figura 6.22: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso sobredeterminado.



Figura 6.23: Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso sobredeterminado.

desta forma, mostrando validade para a seleção dos valores singulares. Entretanto, devido a estarmos apresentando nas mesmas figuras os diferentes valores da funções que estão contaminados por diferentes níveis de ruído, a anomalia mostra-se sutilmente, pois foi-se necessário aumentar a escala do gráfico para ser possível visualizar todos os diferentes valores das funções contaminados por ruído.

A partir dos critérios coerentes podemos concluir que o ponto de corte é de 645 valores singulares. A Figura 6.25 mostra o modelo estimado com a quantidade de valores singulares



Figura 6.24: Entropia do modelo em função dos valores singulares para a 1^a iteração do caso sobredeterminado.

considerada ótima para o caso sobredeterminado na primeira iteração.

6.3.2 Segunda iteração

A partir dos resultados da primeira iteração deu-se início à segunda iteração com o traçado de raios. Devido à incoerência dos critérios de seleção baseados na amplitude e derivada do valor singular não houveram reproduções dos mesmos na presente iteração.

A Figura 6.26 apresenta o erro entre os parâmetros de dados que mostra uma região de anomalia entre 650 e 700 valores singulares, sendo que a mesma região também é indicada pelo erro entre os parâmetros de modelo apresentado na Figura 6.27, portanto, o erro entre os parâmetros de dados, outra vez, foi validada pelo erro entre os parâmetros de modelo.

As Figuras 6.28 e 6.29 mostram a energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo, onde, ambas apresentam uma região de aumento de instabilidade entre 650 e 700 valores singulares, região esta coerente com o erro entre os parâmetros de modelo, assim, indicando o ponto de corte de valores singulares.

Com os critérios utilizados e com uma análise maior da região ótima, podemos determinar o ponto de corte como sendo de 650 valores singulares. A Figura 6.30 mostra o modelo sintético C calculado na segunda iteração para o caso sobredeterminado com a quantidade ótima.



Figura 6.25: Modelo C estimado na primeira iteração com 645 valores singulares.

6.3.3 Terceira iteração

Os valores de vagarosidade obtidos na iteração anterior permitiram dar início à terceira iteração do caso sobredeterminado. Novamente, não iremos reproduzir os critérios de amplitude e derivada do valor singular, pois, sempre se mostraram inadequados à seleção de valores singulares numa abordagem linearizada.

O erro entre os parâmetros de dados, erro entre os parâmetros de modelo, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo são mostrados, respectivamente,



Figura 6.26: Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso sobredeterminado.



Figura 6.27: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso sobredeterminado.

nas Figuras 6.31, 6.32, 6.33 e 6.34.

A Figura 6.31, erro entre os parâmetros de dados, apresenta uma diminuição do seu valor na região próxima a 700 valores singulares, indicando uma variação no modelo estimado. Esta região coincide com o ponto de erro mínimo dos parâmetros de modelo, assim sendo, temos que o erro entre os parâmetros de dados possuiu coerência em todas as simulações realizadas.



Figura 6.28: Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso sobredeterminado.



Figura 6.29: Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 2^a iteração do caso sobredeterminado.

As Figuras 6.33 e 6.34 mostram que há um aumento da instabilidade das funções na mesma região considerada ótima. Logo, todos os critérios utilizados na presente iteração se mostraram adequados à seleção de valores singulares.

Para uma terceira iteração, a Figura 6.35 mostra o modelo recuperado para o caso sobredeterminado, onde, a quantidade de valores singulares utilizada na inversão foi de 655 valores singulares.



Figura 6.30: Modelo C estimado na segunda iteração com 650 valores singulares.

É notável que as estruturas geológicas apresentadas neste tomograma assemelham-se bastante do modelo estimado na iteração anterior, entretanto, o novo modelo apresenta um campo de velocidades mais próximo do verdadeiro.

Temos ainda que a base do modelo possui uma baixa resolução, fato que acontece devido à pouco iluminação na base do modelo



Figura 6.31: Erro entre os parâmetros de dado em função dos valores singulares para a 3^a iteração.



Figura 6.32: Erro entre os parâmetros de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração.

6.4 Discussões e considerações

Novamente, os resultados mostraram que a quantidade de valores singulares máxima necessária que permite estimar um modelo satisfátorio para o caso linearizado é bastante diferente da necessária em uma abordagem linear.



Figura 6.33: Energia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração.



Figura 6.34: Entropia do parâmetro de modelo em função dos valores singulares para a 3^a iteração.

Para este modelo podemos perceber a importância de uma análise conjunta dos critérios para reduzir ao máximo efeitos de ambiguidade. Pois, foi visto nas últimas iterações do caso determinado que o erro entre os parâmetros de modelo sofria uma lenta variação devido a uma lenta mudança no vetor de vagarosidade estimado e isto se reflete nos demais critérios de maneira que estes apresentam sutilmente a região ótima. Logo, se utilizassemos apenas um critério para determinar a seleção poderíamos ser levados a acreditar numa região diferente como ótima.



Figura 6.35: Modelo C estimado na terceira iteração com 655 valores singulares.

Comparando os resultados dos dois sistemas usados (determinado e sobredeterminado), pode-se, nitidamente, perceber que o modelo foi melhor estimado para o caso sobredeterminado devido a uma melhor iluminação do meio pelo traçado de raios.

Logo, a má configuração dos raios para o caso determinado pode ter implicado em falta de iluminação de algumas células, ou seja, nem todas as incógnitas (velocidade sísmica das células) podem ter participado do sistema de equações. Isto implica dizer que a matriz tomográfica possuia linhas linearmente dependentes, ou ainda, que este representa um sistema subdeterminado, mascarado de determinado, de ordem $M \times 900$; M < 900, onde M representa o número de equações linearmete independentes necessária para uma possível solução

e 900 representa o número de células.

Temos ainda que as quantidades de valores singulares utilizadas para os dois sistemas são diferentes. O caso sobredeterminado utiliza praticamente o dobro da quantidade de valores singulares da matriz tomográfica do determinado. Isto acontece por causa do aumento de informação que é levado com a maior quantidade de raios no caso sobredeterminado.

A Tabela 6.1 apresenta o erro RMS do modelo, erro RMS percentual do modelo e a quantidade de valores singulares utilizados nas iterações em ambos os casos.

Erro entre os parâmetros de modelo do caso determinado			
Iteração	Erro RMS (s/m)	Erro RMS (%)	Valores singulares
1	$8.2368 \ge 10^{-7}$	8.07~%	327
2	$7.0483 \ge 10^{-7}$	6.91 %	330
3	$5.0481 \ge 10^{-7}$	4.98 %	305
Erro ent	re os parâmetros	de modelo do d	caso sobredeterminado
Erro ent Iteração	$\begin{array}{c} \text{ re os parâmetros} \\ \text{ Erro RMS } (s/m) \end{array}$	de modelo do d Erro RMS (%)	caso sobredeterminado Valores singulares
Erro ent Iteração 1	The os parâmetros Erro RMS (s/m) $3.7004 \ge 10^{-7}$	de modelo do d Erro RMS (%) 3.63 %	caso sobredeterminado Valores singulares 645
Erro ent Iteração 1 2	Tre os parâmetros Erro RMS (s/m) $3.7004 \ge 10^{-7}$ $3.2883 \ge 10^{-7}$	de modelo do d Erro RMS (%) 3.63 % 3.22 %	caso sobredeterminado Valores singulares 645 650

Tabela 6.1: Síntese dos resultados para o modelo C. Casos determinado e sobredeterminado.

Os resultados mostraram que com o aumento da quantidade de iterações e com a escolha certa da quantidade ótima, o erro do modelo tende a diminuir convergindo para um determinado modelo.

Conclusões

A tomografia de tempos de trânsito é um problema inverso considerado mal-posto para amenizar este mal-condicionamento e obter uma solução satisfatória utilizamos uma metodologia criteriosa de corte de pequenos valores singulares.

As simulações numéricas esfetuadas para o caso linear sobre o modelo A, com diferentes níveis de ruído, realizadas com fins de comparação, permitiram validar as metodologias empregadas neste trabalho que se baseiam em uma extração visual do ponto de corte dos valores singulares, ou seja, todos os critérios de seleção utilizados para se encontrar o ponto de corte sugeriram um mesmo ponto ótimo ou pontos muito próximos deste em uma abordagem linear.

Os resultados das simulações numéricas para o caso linearizado realizadas sobre os modelos B e C , obtidos nas primeiras iterações, permitiram validar a metodologia de aplicação de valores singulares selecionados. Devido a não utilização de um tipo especial de regularização, não somente os pequenos valores singulares, como valores considerados relativamente altos tiveram que ser descartados na inversão para que fosse possível uma boa recuperação do modelo.

Entretanto, nem todos os critérios puderam ser validados para a seleção dos valores singulares. As curvas da amplitude e da derivada do valor singular não se mostraram adequadas à metodologia de extração de valores singulares para o caso linearizado, uma vez que as deflexões de suas curvas indicaram uma região de corte com apenas pequenos valores singulares, mas foi verificado que valores maiores deveriam, também, ser descartados para uma representação satisfatória dos modelos.

Contudo, nas simulações numéricas sobre o modelo A (caso linear), estes critérios foram válidos. Logo, apesar de não podermos utilizá-los diretamente como critérios de seleção em uma abordagem linearizada, podemos utilizar indiretamente combinados com outro tipo de regularização. Por exemplo, em uma regularização por matrizes de derivadas onde todos os valores singulares são utilizados, podemos aplicar estes dois critérios e assim limitar a quantidade de valores singulares a serem empregados na regularização para se obter uma melhor solução.

A função de erro entre os parâmetros de modelo não pode ser considerada como critério devido à falta de conhecimento do campo verdadeiro de velocidades. Contudo, mostrou ser importante para que pudéssemos validar as metodologias empregadas. Os demais critérios de seleção: erro entre os parâmetros de dados, energia do parâmetro de modelo e entropia do parâmetro de modelo mostraram-se válidos pois apontaram uma mesma região de corte que fora indicada pelo erro entre os parâmetros de modelo, permitindo estimar um modelo com um erro mínimo.

Para o modelo C, considerou-se também a influência da iluminação do meio pelo traçado de raio na inversão. Percebemos que o caso em que o meio foi melhor iluminado (caso sobredeterminado) permitiu uma melhor recuperação do modelo. Logo, uma boa disposição entre fontes e receptores aliado a uma boa discretização do meio mostram-se indispensáveis para uma boa representação do modelo estimado.

Enfim, pôde-se concluir que os resultados foram satisfatórios, obtendo modelos bem próximos aos verdadeiros a partir de um modelo homogêneo inicial e assim validando a metodologia de aplicação de valores singulares em tomografia linearizada de tempos de trânsito. Além disso, pôde-se determinar os critérios de seleção válidos para o caso linearizado como inicialmente proposto.

Agradecimentos

À Deus por tudo.

À minha mãe e ao meu pai pelo amor, incentivo e confiança.

A toda minha família, em especial à minha "irmãe", Ana, ao meu irmão, Deraldo, e ao meu amigo, irmão e sobrinho, Felipe, por sempre me apoiarem.

À minha namorada, Neuma, pelo amor, carinho e dedicação.

Aos meus amigos e em especial aos meus amigos do curso Dian (Djulia), Luiz (Lula), Felipe Cavalcanti (Mag), Nei Davi (Nena Molenga), Enock, Fernanda (Nanda), Adson (Aminoadson), Leonardo (Leozinho), Juliana, Naiane, Válter, Tatiane, Marcy, João, Vitor (Cajazeiras), Martonni, Gilson, Felipe Terra, Eduardo (Satinho), Alan (tio) e a todos os meus outros colegas meus sinceros agradecimentos.

Ao professor Amin Bassrei pela ótima orientação e também por ter sido um ótimo coordenador.

À professora Jacira, nossa queridinha, por ser uma ótima professora, uma excelente coordenadora e principalmente por ser nossa mãe emprestada.

Ao professor Thierry por ter se disponibilizado à participar da banca examinadora.

A todos os professores do curso de geofísica pelo conhecimento transmitido.

Aos funcionários Zenilda, Joaquim Lago e Marcelinho.

Ao convênio UFBA/ANP-PRH 08 e à FAPESB pela bolsa de iniciação científica.

Referências Bibliográficas

Abriel, W. (2008) Reservoir Geophysics: Applications. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.

Anderson, A. H. and Kak, A. C. (1982) Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields. Journal of Acoustical Society of America, 72, 1953-1606.

Bassrei, A. (1990) Inversão de dados geofísicos unidimensionais através da entropia relativa mínima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Freire, S. L. M. (1986) Aplicações do método de decomposição em valores singulares no processamento de dados sísmicos, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Lanczos, C. (1961) Linear Differential Operators. Van Nostrand, London.

Menke, W. (1984) Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, Academic Press, Orlando, FL.

Noble, B. and Daniel J. W. (1982) Algebra Linear Aplicada, University of Wisconsin and University of Texas.

Penrose, R. (1955) A generalized inverse for matrices, proceedings of the Cambridge Phylosophical Society, 51:406-413

Sá, T. J. M. (1996) Inversão e seleção de imagens na tomografia de transmissão utilizando regularização de ordem arbitrária, decomposição em valores singulares, conjugado gradiente modeificado e entropia, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Santos, E. T. F. (2006) Inversão tomográfica sísmica anisotrópica com regularização ótima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Santos, E. T. F., Bassrei, A. and Costa, J. (2006) Evaluation of L-curve and θ -curve approaches for the selection of regularization parameter in anisotropic traveltime tomography, Journal of Seismic Exploration, vol. 15, 245-272.

Schots, H. A. (1990) Tomografia sísmica poço a poço e poço a superfície utilizando ondas diretas, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Shannon, C. E. and Weaver, W. (1949) The Mathematical Theory of Communication,

The University of Illinois Press, Urbana.

Silva, J. N. P. (2008) Critérios de seleção de valores singulares na inversão de dados geofísicos: aplicação em tomografia de tempos de trânsito, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Silva, J. N. P. e Bassrei, A. (2007) Critérios de seleção de valores singulares em problemas inversos lineares: uma aplicação em tomografia de tempos de trânsito, Stientibus Série Ciências Físicas, vol. 3.

Terra, F. A. (2007) Aplicação da curva L em problemas inversos: metodologias de extração do parâmetro ótimo de regularização, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.