



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

MODELAGEM E MIGRAÇÃO SÍSMICA
USANDO MÉTODO DE EXPANSÃO
RÁPIDA (REM) ATRAVÉS DOS
POLINÔMIOS DE HERMITE E
LAGUERRE

EDUARDA CONTREIRAS GUARANY S REGO

SALVADOR – BAHIA
DEZEMBRO – 2014

Modelagem e migração sísmica usando método de expansão rápida (REM)
através dos polinômios de Hermite e Laguerre

por

EDUARDA CONTREIRAS GUARANY S REGO

Orientador: Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

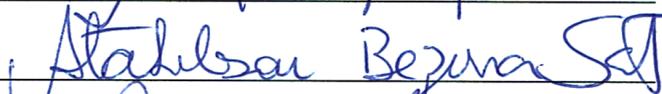
GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA
DO
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

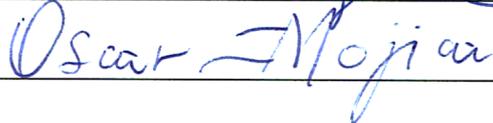
Comissão Examinadora



Dr. Reynam da Cruz Pestana - Orientador



Atahebson Bezerra Santos



Oscar Mojica Ladino

Data da aprovação: 21/12/2014

Resumo

Neste trabalho mostramos a solução da equação de onda através do método de expansão rápida (REM), usando os polinômios de Hermite e Laguerre para expansão do operador cosseno. Essa nova solução se reduz, quando o passo no tempo é relativamente pequeno, aos esquemas de diferenças-finitas de segunda e quarta ordem. Além disso, demonstramos que uma das vantagens dessa nova versão do REM é que o método permite usar um intervalo de amostragem temporal maior do que usado nos esquemas convencionais de diferenças finitas, produzindo resultados estáveis e livres de dispersão numérica. Por outro lado, o método de diferenças finitas impõe limites mais restritivos quanto ao intervalo de amostragem temporal usado, devido à condição de estabilidade e à dispersão numérica.

O novo método para solução da equação de onda aplicado na modelagem e migração utiliza a expansão polinomial de Hermite e de Laguerre que são polinômios ortogonais. O mesmo se apresenta como uma forma alternativa ao método REM original, o qual extrapola o campo de onda utilizando a expansão polinomial de Chebyshev. Entretanto, o polinômio de Chebyshev possui uma limitação no seu argumento, o qual assume valores no intervalo $[-1,+1]$, característica que não se faz presente no caso dos polinômios de Hermite e Laguerre. E assim, tentamos explorar as características desse novo método a fim de obter uma metodologia mais eficiente para modelagem e migração de dados sísmicos.

Para testar a eficiência do método proposto, aplicamos este método de expansão rápida para a modelagem e migração reversa no tempo (RTM) de dados sintéticos de estruturas complexas como corpos de tectônica salífera. Os resultados obtidos foram bem satisfatórios, com pouca dispersão e bom imageamento de estruturas complexas, demonstrando assim a eficácia e aplicabilidade do método.

Abstract

In this work we show the wave equation of the solution through the rapid expansion method (REM), using the Hermite polynomials and Laguerre expansion of the cosine operator. This new solution reduces itself when the time step is relatively small, to the finite-difference schemes of second and fourth order. In addition, we show that one of the advantages of this new version of REM is that the method allows you to use a larger range of temporal sampling than used in conventional finite difference schemes, producing stable and free of numerical dispersion results. Moreover, the method of finite differences impose more stringent limits on the temporal sampling interval used, due to the condition of stability and numerical dispersion.

The new method for the solution of the wave equation applied to model and migration uses the polynomial expansion of Hermite and Laguerre, both orthogonal polynomials. The same is presented as an alternative way to the original REM method, which extrapolates the wave field using the polynomial expansion of Chebyshev. However, the Chebyshev polynomial has a limitation in its argument, which assumes values in the range $[-1, +1]$, a feature that is not present in the case of Hermite polynomials and Laguerre. So, we tried to explore the characteristics of this new method to obtain a more efficient methodology for modeling and migration of seismic data.

To test the efficiency of the proposed method, we apply this rapid expansion method for modeling and reverse time migration (RTM) of synthetic data structures such as bodies of complex salt tectonics. The results were satisfactory and with few dispersion and good imaging complex structures, thus demonstrating the effectiveness and applicability of the method.

ÍNDICE

Resumo	ii
Abstract	iii
ÍNDICE	iv
ÍNDICE DE FIGURAS	v
ÍNDICE DE TABELAS	viii
CAPÍTULO 1 Introdução	1
CAPÍTULO 2 Parte teórica	4
2.1 Propagação da onda sísmica	4
2.2 Modelagem Sísmica	6
2.3 Migração Sísmica	7
2.3.1 Migração geométrica - caso zero-offset	7
2.3.2 Migração Reversa no tempo	15
CAPÍTULO 3 Método de expansão rápida	27
3.1 Solução da equação de onda usando expansão polinomial de Hermite	29
3.2 Expansão utilizando os polinômios de Laguerre	31
CAPÍTULO 4 Resultados Numéricos	34
4.1 Modelagem Numérica	34
4.1.1 Modelo de duas camadas	34
4.1.2 Modelo do domo de sal- SEG-EAGE	40
4.1.3 Modelo do diápiro de sal	42
4.2 Resultados da migração	46
4.2.1 Modelo do domo de sal - SEG-EAGE	46
CAPÍTULO 5 Conclusão	50

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Propagação das ondas volumétricas longitudinais (V_p) e transversais (V_s) no meio, indicando o sentido e a direção da onda. Adaptado de Rosa (2010). . .	5
2.2	O avanço de uma onda no espaço, de acordo com o princípio de Huygens, sendo ΔT o tempo de trajeto entre uma frente de onda e a seguinte, e V a velocidade de propagação da onda. Adaptado de Rosa (2010).	6
2.3	A relação geométrica entre a propagação da onda gerada por um difrator (embaixo) e a correspondente difração, registrada na superfície. Os tempos t_1 e t_2 representam os tempos de propagação iguais a $0.6s$ e $1s$. A velocidade do meio é $2000m/s$, $v_H = 1000m/s$. Adaptado de Rosa (2010).	7
2.4	Localização de um difrator com base nos tempos de registro de sua difração. Adaptado de Rosa (2010).	8
2.5	Geometrias de frente de onda (FO) e da difração (D) que relacionam um difrator ao correspondente ponto na reflexão registrada. As letras M e R representam a interface geológica e a correspondente reflexão. Adaptado de Rosa (2010).	9
2.6	Representação geométrica da migração por frentes de onda em um meio homogêneo e isotrópico, no qual a velocidade é igual a 2000 m/s ($v_H = 1000\text{ m/s}$). As letras M e R representam a interface geológica e a correspondente reflexão. O símbolo α é o ângulo de migração. Adaptado de Rosa (2010).	9
2.7	Relação entre o mergulho aparente e o real. Adaptado de Rosa (2010). . . .	10
2.8	Relação entre a migração no domínio do tempo (x, t) e no domínio da profundidade (x, z). Mostra um ponto difrator que se propaga no espaço e como seria sua projeção no domínio do tempo. Adaptada de Hatton et al., (1994) .	11
2.9	Relação entre o círculo (frente de onda) e a hipérbole de difração quando plotadas no mesmo eixo. XA é a posição aparente e XB , a posição verdadeira. Adaptada de Hatton et al.(1994)	12
2.10	Geometria da forma inversa do princípio de Huygens. Adaptado de Rosa (2010).	14
2.11	Esquema de pontos com campo de pressão conhecido requeridos para os operadores de segunda (a) e quarta (b) ordens. Adaptado de Figueiredo (2009).	18
2.12	Velocidade de fase normalizada versus $k_x \Delta x$ para o caso 1-D. Adaptado de Figueiredo (2009).	22
2.13	Velocidade de fase normalizada versus $k \Delta S$. Adaptado de Araújo (2009). . .	25

4.1	Campo de velocidade do modelo de duas camadas com velocidade de 2000 m/s e 3500 m/s.	35
4.2	Snapshots do dado modelado de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Chebyshev nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.	36
4.3	Snapshots do dado modelado de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Hermite nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.	37
4.4	Snapshots gerados a partir do modelo de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Laguerre nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms	38
4.5	Sismogramas gerados na modelagem para o modelo de duas camadas, sendo (a) utilizando polinômios de Chebyshev, (b) com os polinômios de Hermite e (c) polinômios de Laguerre, registrados na profundidade de 250 m ao longo de todo modelo. Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.	39
4.6	Campo de velocidade do modelo sintético do domo de sal.	40
4.7	Snapshots gerados a partir do modelo sintético do domo de sal nos tempos 0.4 s (a), 0.6 s (b), 0.8 s (c) e 1 s (d) com fonte do tipo wavelet localizada em $x_s = 3000m$ e $z_s = 20m$, com o passo no tempo de 2 ms e frequência máxima de 25 Hz.	41
4.8	Sismograma gerados na modelagem do dado sintético do domo de sal com passo no tempo de 2 ms, frequência máxima de 25 Hz e registrado na profundidade de 20 m.	42
4.9	Campo de velocidades do modelo sintético do diápiro.	43
4.10	Snapshots gerados a partir do modelo sintético do diápiro nos tempos 1.6 s (a), 1.8 s (b), 2 s (c) 2.2 s (d) com intervalo de amostragem de 2ms, frequência máxima de 25 Hz e posição da fonte $x_s = 7500m$ e $z_s = 125m$	44
4.11	Sismograma gerados na modelagem do dado sintético do diápiro com passo no tempo de 2ms, com fonte localizada em $x_s = 2500m$ (a), $x_s = 5000m$ (b) e $x_s = 7500m$ (c) e $z_s = 125m$, frequência máxima de 25 Hz e registrado na profundidade de 125 m	45

4.12	Campo de velocidade do dado sintético do domo de sal.	47
4.13	Seção de afastamento nulo do dado sintético do domo de sal.	47
4.14	Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 5 recursões.	47
4.15	Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 10 recursões.	48
4.16	Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 15 recursões.	48

ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Parâmetros na modelagem do modelo de duas camadas.	35
4.2	Parâmetros da modelagem do dado sintético do domo de sal.	40
4.3	Parâmetros da modelagem do dado sintético do diápiro.	43
4.4	Parâmetros da migração do dado sintético SEG-EAGE.	46

CAPÍTULO 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é propor uma nova solução da equação acústica da onda, com aplicação na modelagem e migração de dados sísmicos, e comparar com os esquemas tradicionais como diferenças-finitas e pseudo-espectral. A modelagem é um processo direto, que pode ser usado para simular a resposta do modelo geológico em subsuperfície. Além disso, tem vasta aplicabilidade no processo de inversão de dados sísmicos. Para melhor entendimento do processo de migração, que consiste, principalmente, no posicionamento correto das reflexões, optamos por apresentá-lo, inicialmente, de uma forma geométrica. Para meios complexos, esta visão geométrica já não convém, sendo necessário utilizar métodos como RTM, migração reversa no tempo, que são baseados na solução da equação de onda.

A migração reversa no tempo, método mais usado em meios complexos, se baseia no modelo do refletor explosivo, no qual cada ponto do refletor age como uma nova fonte de energia. A RTM utiliza métodos, por exemplo, de diferenças-finitas para a solução numérica da equação de onda. O método de diferenças finitas tem como base aproximações das derivadas por truncamento da série de Taylor, contudo normalmente funciona para intervalos temporais pequenos e é limitado em relação à estabilidade e dispersão. Outro método é o pseudo-espectral, que utiliza das transformadas de Fourier para obter a solução da equação de onda, mas da mesma forma que o método anterior, o passo no tempo tem que satisfazer os critérios de dispersão e estabilidade. O método utilizado por este trabalho foi o REM, método de expansão rápida, o qual utiliza expansões polinomiais para solucionar a equação de onda. Este pode admitir um intervalo de amostragem maior, porém o número de termos da expansão deve ser calculado corretamente para evitar problemas de instabilidade.

O processo de modelagem e migração reversa no tempo são baseadas na evolução do tempo dos campos de onda. Para o caso de variação espacial da velocidade, existem duas aproximações para avaliar a evolução no tempo dos campos de onda sísmicos. O método de expansão rápida (REM) foi apresentado por Kosloff et al. (1989) e tem origem na modificação feita no método de Tal-Ezer (1986) visando reduzir pela metade o número de termos somados na série de Chebyshev. Também pode-se mostrar que para intervalos de tempo suficientemente pequenos, o método se reduz à solução da equação da onda que utiliza aproximações de

diferenças finitas.

Como o polinômio de Chebyshev é o polinômio ortogonal mais utilizado na maioria das teorias de aproximações numéricas, outros tipos de polinômios ortogonais podem ser utilizados de forma análoga. O argumento do polinômio de Chebyshev é limitado no intervalo de $[-1, +1]$, o que é conveniente para sistemas Hamiltonianos delimitados, e para sistemas delimitados apenas por baixo. Um corte no espectro de energia é inevitável no caso de se utilizar esse método (Jun Jing, H. R. Ma, 2007). Contudo, alguns polinômios ortogonais, como o polinômio de Hermite e Laguerre, não limitam seus argumentos em intervalos finitos. Expansões em termos desses polinômios ortogonais podem ser aplicadas em sistemas não delimitados.

Os métodos usando a expansão de Hermite e Laguerre possuem uma clara vantagem no que diz respeito aos sistemas Hamiltonianos. Porém, a relação recursiva tanto para o polinômio de Hermite quanto para o de Laguerre não é numericamente estável se comparado com a relação de recursão do polinômio de Chebyshev. Isto deve-se ao fato que o número de termos da expansão se limita para algum valor k_{max} , mas o efeito da instabilidade é pouco perceptível para $k < k_{max}$, ele só passa a interferir acima deste valor. Os custos computacionais das três expansões polinomiais são bem próximos, sendo a expansão utilizando Laguerre um pouco mais rápida (Jun Jing, H. R. Ma, 2007).

A migração reversa no tempo (reverse time migration - RTM) baseada na equação da onda acústica é uma poderosa ferramenta para imagear estruturas geológicas complexas. O método admite fortes variações de velocidade na vertical e na horizontal. Além disso, o método não possui restrições quanto aos mergulhos que os refletores possam ter. Na RTM pós-empilhamento, o campo de onda registrado no receptor é propagado até o tempo $t = 0$. A especificação deste tempo é denominado de condição de imagem, o tempo em que ocorrem os eventos de reflexão. Já na RTM pré-empilhamento, a condição de imagem é definida pela correlação cruzada do campo de onda extrapolado da fonte e do receptor para cada passo no tempo. No presente trabalho apenas realizaremos a RTM pós-empilhamento.

Aplicamos então o novo método utilizando a expansão polinomial de Hermite e Laguerre para modelagem e migração sísmica. Iniciamos realizando uma comparação entre os três métodos, usando os polinômios de Chebyshev, Hermite e Laguerre, para um modelo de duas camadas, gerando snapshots e sismogramas, mostrando uma boa concordância entre os resultados. Em seguida aplicamos o método baseado nos polinômios de Laguerre para modelagem de estruturas mais complexas, com presença de corpos salíferos. No processo de migração utilizamos a RTM, migração reversa no tempo apenas para o método de expansão com Laguerre. O problema de limitação no número de recursões não impediu a obtenção de

um bom resultado de imageamento, modelando e migrando estruturas complexas.

CAPÍTULO 2

Parte teórica

Nesta parte do trabalho faremos uma breve descrição do princípio da propagação das ondas sísmicas, dos métodos de modelagem e da migração de dados sísmicos. Também apresentaremos a modelagem e a migração reversa no tempo, a partir da solução da equação da onda pelos métodos de diferenças finitas e pseudo-espectral. Para então no próximo capítulo introduzirmos a solução pelo método de expansão rápida utilizando os polinômios de Chebyshev, e em seguida apresentar uma nova abordagem que emprega os polinômios de Hermite e Laguerre.

2.1 Propagação da onda sísmica

Duas famílias de ondas destacam-se no método sísmico: ondas superficiais, ou seja, ondas que viajam junto à superfície da terra, e as ondas de corpo, que viajam pelo corpo das rochas independente da sua posição. O modo como se propagam as ondas de corpo são mostrados pela Figura 2.1. Já as ondas superficiais são interpretadas pelos geofísicos de exploração como ruídos, principalmente as ondas do tipo Rayleigh. Todavia, as ondas de corpo despertam interesse econômico, já que são responsáveis pelo sinal útil presente nos dados sísmicos.

As ondas de corpo são de dois tipos: Ondas P (primárias, ou compressionais, ou longitudinais), neste caso as partículas de rocha vibram paralelamente à propagação, e as ondas S (secundárias, ou cisalhantes, ou transversais), sendo neste caso a vibração perpendicular à direção de propagação (como indicado na Figura 2.1). Em termos práticos, as ondas compressionais se mostram mais importantes, visto que na aquisição marinha típica, não é possível gerar diretamente ondas cisalhantes, por não se propagarem em fluídos. Além de que as ondas primárias apresentam maior velocidade de propagação que a das ondas S, favorecendo a qualidade do registro correspondente. Outro fator importante é o econômico, os equipamentos de geração de ondas P são mais simples que os de onda S, por isso, as ondas P representam a grande maioria dos dados sísmicos adquiridos.

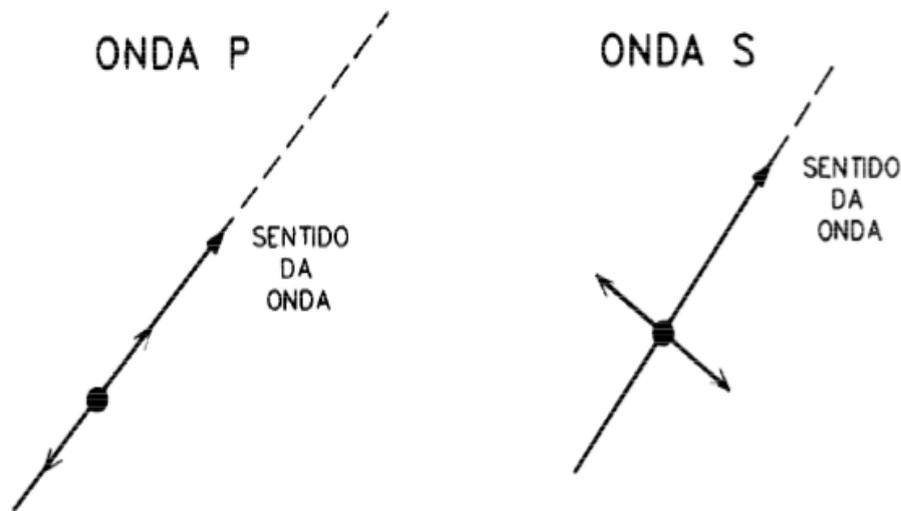


Figura 2.1: Propagação das ondas volumétricas longitudinais (V_p) e transversais (V_s) no meio, indicando o sentido e a direção da onda. Adaptado de Rosa (2010).

A geração e a propagação de uma onda sísmica, seja ela do tipo P ou S, depende basicamente da relação entre o esforço introduzido pela onda e a sua consequente deformação. Na teoria da elasticidade, deformação corresponde a uma variação relativa de volume ou comprimento, ou seja, trata-se de uma grandeza adimensional. Já o esforço tem dimensão de força por unidade de área e é equivalente, no caso de um fluido, a pressão. De acordo com a lei de Hooke, o esforço é diretamente proporcional à deformação gerada por ele. No que diz respeito à propagação de ondas, o aspecto mais importante da lei de Hooke é a premissa de que o meio é perfeitamente elástico, o que implica considerar temporárias as deformações, passado o efeito, a partícula retornará às condições originais. A velocidade de propagação da onda sísmica é uma descrição de quão rapidamente a deformação de uma partícula é transmitida para outra e não uma medida de velocidade com que cada partícula se move.

O movimento das partículas e a geometria das ondas sísmicas depende fundamentalmente do princípio de Huygens. Este princípio pode ser resumido da seguinte forma: “Em um tempo arbitrário, t , todos os pontos em uma frente de onda são considerados fontes pontuais secundárias para a geração de novas ondas. Após um acréscimo de tempo Δt , a nova frente de onda é definida pelo envelope tangente às ondas geradas no tempo t .” Define-se frente de onda como a linha que conecta, na posição frontal da onda, todos os pontos que estão na mesma fase, ou seja, ocupando a mesma posição relativa no sinal sísmico, e o raio é a linha ao longo da qual a fase da onda se altera de forma mais rápida. Em um meio isotrópico, o raio é perpendicular à frente de onda e indica a direção da propagação da onda. O princípio de Huygens baseia-se no conceito de interferência entre ondas.

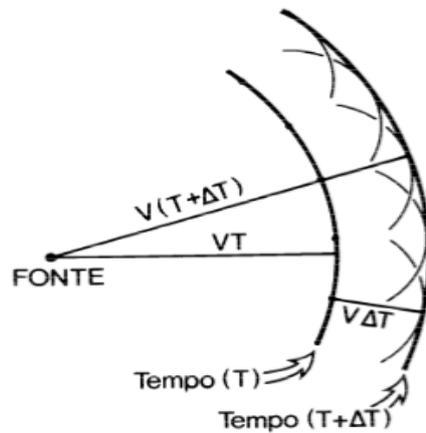


Figura 2.2: O avanço de uma onda no espaço, de acordo com o princípio de Huygens, sendo ΔT o tempo de trajeto entre uma frente de onda e a seguinte, e V a velocidade de propagação da onda. Adaptado de Rosa (2010).

A Figura 2.2 ilustra um dos elementos fundamentais da propagação de ondas baseada em uma extensão do princípio de Huygens, introduzida por Fresnel: a difração, ou seja, o evento produzido quando uma onda atinge uma descontinuidade pontual. Com este conceito, pode-se ver a propagação de ondas como um processo de produção recursiva de difrações. Esta contribuição foi tão importante, para o subsequente desenvolvimento da física, que muitos autores preferem a denominação “princípio de Huygens-Fresnel”.

2.2 Modelagem Sísmica

A modelagem sísmica é essencialmente uma simulação do campo de ondas sísmicas, onde são determinadas as amplitudes sísmicas e o tempo de percurso. No processo de modelagem ocorre a extrapolação do campo de onda podendo ser descrito em tempo ou em profundidade, e registro da seção sísmica em superfície, $z = 0$. A modelagem tem inúmeros objetivos, dentre os principais, a geração de dados sintéticos para testar algoritmos e a compreensão de fenômenos estruturais ou estratigráficos de interesse em exploração. Existem diversas técnicas de modelagem, vale enfatizar que os algoritmos baseados na equação acústica da onda são mais aplicados em modelagens estruturais (Yilmaz, 1987).

Na modelagem sísmica procura-se sintetizar o registro de uma seção (ou um volume sísmico) na superfície, a partir de um modelo geológico definido por uma matriz (ou um volume), de constantes elásticas, em função da profundidade e das coordenadas horizontais. O modelo

sísmico desejado é uma matriz (ou um volume) com valores de amplitude, teoricamente medidos na superfície, em função do tempo e das coordenadas horizontais.

2.3 Migração Sísmica

2.3.1 Migração geométrica - caso zero-offset

A migração dos dados sísmicos é um processo que tem como tarefas básicas localizar exatamente os pontos responsáveis pela geração das reflexões ou difrações e estimar os valores de amplitude correspondentes aos mesmos pontos, supondo-se que cada um deles “explodiu” no mesmo instante de tempo $t = 0$, como demonstrado pelo modelo do refletor explosivo (Loewenthal et al.,1976).

Os métodos convencionais de migração de dados empilhados se baseiam na premissa que a seção sísmica em tempo se adequa ao modelo dos refletores explosivos (Claerbout, 1976). Este modelo parte do pressuposto que toda energia presente em um tempo t na seção empilhada se origina por reflexões no tempo $1/2t$, e assim o valor do coeficiente de reflexão pode ser determinado se propagarmos esta energia do tempo t ao tempo zero utilizando a metade das velocidades de propagação da subsuperfície, v_H , como mostra a Figura 2.3 (Levin, 1984).

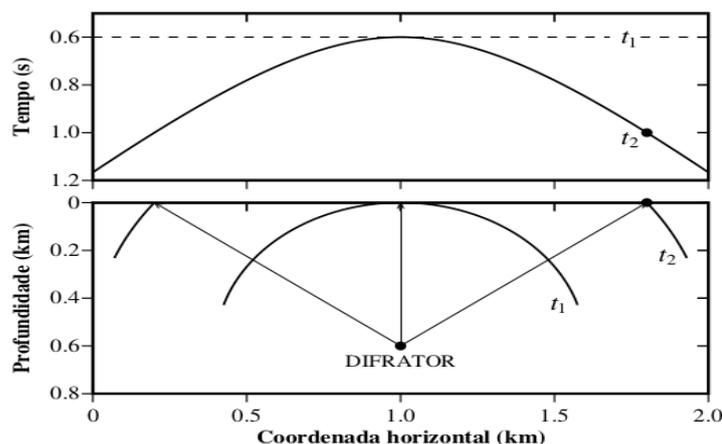


Figura 2.3: A relação geométrica entre a propagação da onda gerada por um difrator (embaixo) e a correspondente difração, registrada na superfície. Os tempos t_1 e t_2 representam os tempos de propagação iguais a 0.6s e 1s. A velocidade do meio é $2000m/s$, $v_H = 1000m/s$. Adaptado de Rosa (2010).

Na concepção geométrica, a migração de dados sísmicos pode ser definida como o processo que permite a localização de difratores. Aplica-se ao caso o seguinte princípio, descrito

nas condições de um meio homogêneo e isotrópico, mas facilmente generalizável: o sinal sísmico correspondente a uma amostra de uma seção de afastamento fonte-receptor nulo pode ter sido gerado em qualquer ponto de um semicírculo com centro na posição de registro. Considerando um impulso unitário registrado no tempo arbitrário t_0 e na coordenada horizontal x_0 , a correspondente equação é:

$$z^2 = v^2 t_0^2 - (x - x_0)^2 \quad (2.1)$$

ou, em termos do tempo vertical,

$$\tau^2 = t_0^2 - \left(\frac{x - x_0}{v} \right)^2 \quad (2.2)$$

onde z corresponde à profundidade, τ é o seu tempo equivalente, x é a coordenada horizontal e v é a metade da velocidade de propagação no meio (ou seja, $v = v_H$). É importante destacar a diferença entre os produtos vt_0 e $v\tau$, onde o primeiro é uma profundidade aparente, avaliada nos dados sísmicos registrados, enquanto o segundo é a profundidade real, referente aos dados migrados. Após a migração o ângulo do refletor do modelo em profundidade é maior ou igual que na seção em tempo. Assim a migração torna o refletor mais íngreme; e o comprimento do refletor no modelo em profundidade é menor ou igual que na seção em tempo, ou seja, a migração encurta o refletor.

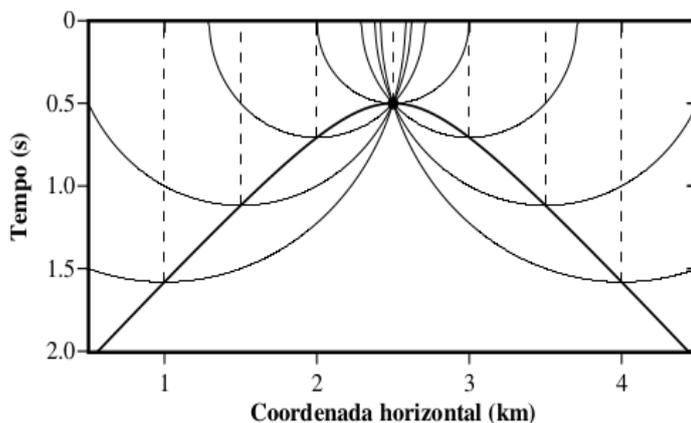


Figura 2.4: Localização de um difrator com base nos tempos de registro de sua difração. Adaptado de Rosa (2010).

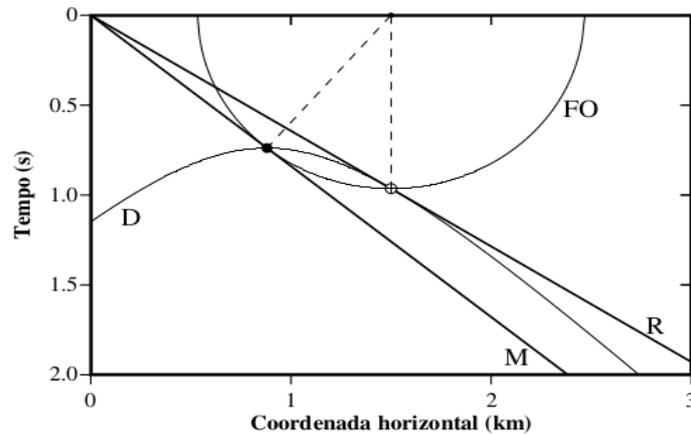


Figura 2.5: Geometrias de frente de onda (FO) e da difração (D) que relacionam um difrator ao correspondente ponto na reflexão registrada. As letras M e R representam a interface geológica e a correspondente reflexão. Adaptado de Rosa (2010).

Com base nos conceitos ilustrados nas Figuras 2.4 e 2.5, como da geometria de difração e da frente de onda, a migração geométrica de uma reflexão pode ser conduzida como no exemplo da Figura 2.6. Ou seja, traçam-se semicírculos, centrados nas posições de registro, tomando-se como raio a profundidade do refletor aparente. Através de uma inspeção de círculos traçados, confirma-se a expectativa: o envelope tangente às frentes de ondas circulares corresponde à interface usada para geração da reflexão, corrigindo o falseamento de mergulho, existente na seção não-migrada. A técnica descrita é a versão geométrica da chamada migração por frentes de onda.

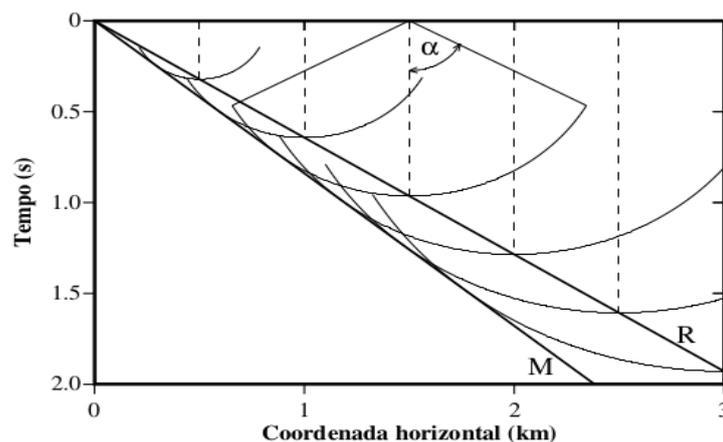


Figura 2.6: Representação geométrica da migração por frentes de onda em um meio homogêneo e isotrópico, no qual a velocidade é igual a 2000 m/s ($v_H = 1000 \text{ m/s}$). As letras M e R representam a interface geológica e a correspondente reflexão. O símbolo α é o ângulo de migração. Adaptado de Rosa (2010).

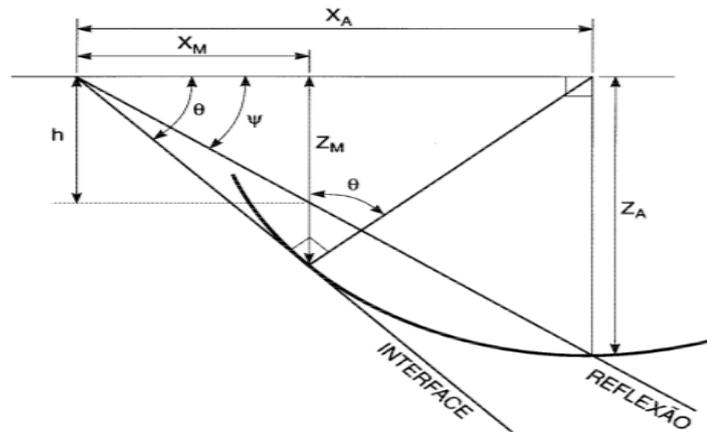


Figura 2.7: Relação entre o mergulho aparente e o real. Adaptado de Rosa (2010).

Em meios homogêneos e isotrópicos, a versão geométrica da migração de dados sísmicos pode ser reproduzida algebricamente por um conceito simples representado pela seguinte relação:

$$\text{sen}\theta = \tan\psi \quad (2.3)$$

onde θ é o mergulho real da interface e ψ é o mergulho aparente da mesma interface, medido na seção não migrada. Ou seja, a tangente do ângulo de mergulho aparente é igual ao seno do ângulo de mergulho real. Este conceito pode ser visualizado na Figura 2.7, onde está ilustrado a relação entre os ângulos de mergulho e simplifica o conceito básico da migração que é o reposicionamento do refletor.

Migração no tempo - soma de difração

Por muito tempo e ainda hoje, a migração em tempo vem sendo mais utilizada no processamento sísmico do que a migração em profundidade, visto que a segunda se mostra mais sensível às variações de velocidade.

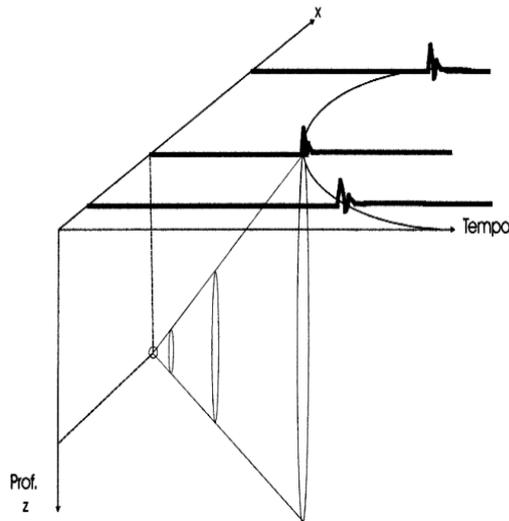


Figura 2.8: Relação entre a migração no domínio do tempo (x, t) e no domínio da profundidade (x, z) . Mostra um ponto difrator que se propaga no espaço e como seria sua projeção no domínio do tempo. Adaptada de Hatton et al., (1994)

Partindo de um modelo mais simples de refletor, ou seja, um ponto difrator, podemos mostrar a relação entre a migração no domínio do tempo e da profundidade e, consequentemente, a relação entre a curva de difração e a curva de frente de onda. Na Figura 2.8 se considera um ponto difrator dentro de um meio homogêneo (Hatton et al., 1994). Desta maneira tem-se no plano (x, z) a frente de onda projetada como um círculo, sua projeção no espaço (x, z, t) é um cone e no plano (x, t) , ou seja, quando o plano $z = 0$ intercepta o cone, tem-se uma hipérbole, que neste ponto corresponderia a uma seção de afastamento nulo, isto é, uma seção no domínio do tempo.

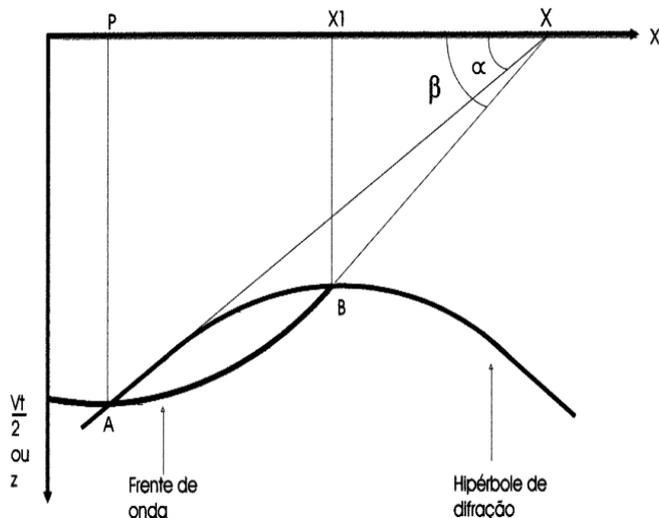


Figura 2.9: Relação entre o círculo (frente de onda) e a hipérbole de difração quando plotadas no mesmo eixo. XA é a posição aparente e XB , a posição verdadeira. Adaptada de Hatton et al.(1994)

Hatton et al.(1994) também demonstraram a relação existente entre a hipérbole e círculo, representada na Figura 2.9, onde o tempo t e a profundidade $z = vt/2$ são plotados no mesmo eixo. O semi-círculo (frente de onda) corta a curva de difração em dois pontos; no ponto A , cuja projeção na superfície (P) corresponde as posições da fonte e do receptor, quando estes são coincidentes, e no ponto B , que corresponde ao ápice da hipérbole de difração. A superfície aparente do refletor é tangente à hipérbole de difração e intercepta a frente de onda no seu ápice. A superfície que originou as reflexões possui mergulho maior que a superfície refletora aparente. As curvas citadas são dadas pelas seguintes equações:

$$(X_1 - P)^2 + (X_1^- B)^2 = \left(\frac{vt}{2}\right)^2 ; \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{vt}{2}\right)^2 - (X_1 - P)^2 = (X_1^- B)^2. \quad (2.5)$$

A equação 2.4 corresponde a equação de um semicírculo, com a velocidade (v) e o tempo (t) constantes, e a equação 2.5 a de uma hipérbole, com a profundidade (z) constante.

Desta forma, como foi visto, a migração é o processo através do qual se procura obter o posicionamento correto dos refletores sísmicos a partir de observações das reflexões primárias. Ela é dada pela soma do campo de ondas observado em diferentes traços do sismograma, ao longo de uma superfície geométrica definida pelos tempos de trânsito a partir de um ponto de difração (Hagedoorn, 1954). A migração no tempo utiliza a mesma superfície de difração ao longo da qual o campo de ondas deve ser somado, sendo o resultado colocado na posição

do ponto de mínimo tempo de trânsito da difração.

Migração recursiva no tempo

De acordo com o princípio de Huygens, a migração pode ser vista como um processo de localização de difratores, além disso sua aplicação é considerada recursiva, pois cada ponto de frente de onda em um dado tempo t é considerado uma fonte pontual para a geração de uma nova frente de onda no tempo $t + \Delta t$, onde Δt é o deslocamento infinitesimal no tempo. Logo, podemos interpretar a migração, para seções de afastamento nulo, como um processo recursivo, através do qual localiza-se a frente de onda no tempo $t - \Delta t$, a partir da frente de onda estimada no tempo t , como ilustrado na Figura 2.10. A continuidade desse processo leva a um encolhimento progressivo da frente de onda, no sentido do ponto que efetivamente gerou o evento, onde o tempo é igual a zero.

A primeira etapa do processo consiste em traçar pequenos semicírculos de raio igual a $v\Delta t$, centrados em cada ponto de frente de onda e voltamos para o interior do círculo observado. De acordo com o princípio de Huygens, a tangente a esses semicírculos dá origem à frente de onda no tempo $t_0 - \Delta t$, a qual é usada para se estimar, da mesma forma, a frente de onda no tempo $t_0 - 2\Delta t$. A repetição deste processo, até que o tempo da frente de onda obtida equivalha a zero (ou até que $n\Delta t = t_0$, sendo n o número de etapas), reduz a frente de onda a um ponto isolado, que corresponde a posição da fonte. Cada etapa da recursão, corresponde a uma versão geométrica da extrapolação inversa, ou seja, depropagação do sinal obtido. Por fim, a determinação da posição em que a onda depropagada encontra a correspondente fonte, é a versão geométrica da aplicação da condição de imagem (migração de afastamento nulo). O processo descrito, que envolve a extrapolação inversa e aplicação da condição de imagem, é a versão geométrica da migração recursiva.

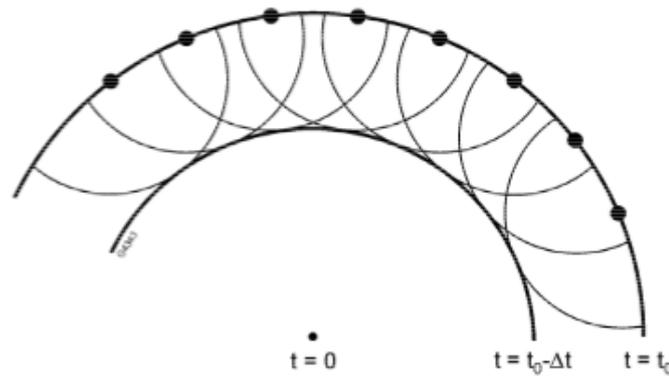


Figura 2.10: Geometria da forma inversa do princípio de Huygens. Adaptado de Rosa (2010).

Na aquisição de uma seção sísmica, a qual implica amostragem em uma profundidade constante (ou aproximadamente constante), durante um determinado intervalo de tempo, em meio homogêneo e isotrópico, a eventual frente de onda circular, seria vista como uma hipérbole, em vez de um círculo. Essas condições sugerem o estabelecimento de um processo de extrapolação inversa correspondente da continuação sucessiva em profundidade do registro sísmico. Ou seja, parte-se da profundidade de registro real, são geradas superfícies virtuais, sendo elas obtidas a partir da anterior com base no princípio de Huygens, as duas separadas entre si de acordo com o intervalo Δz . Na migração recursiva, a extrapolação inversa é aplicada em cascatas, de acordo com um intervalo pequeno de profundidade.

Extrapolação do campo de ondas

Na modelagem e na migração de dados sísmicos, um conceito é fundamental: o da extrapolação de campos de onda. Esse é o processo que, na forma inversa, permite estimar como seriam os dados sísmicos obtidos em diferentes profundidades de registro, a partir de medidas feitas na superfície. Na forma direta, permite sintetizar dados sísmicos, hipoteticamente registrados na superfície, a partir de um modelo geológico fornecido. Trata-se de uma técnica matemática que permite avançar ou atrasar o campo de ondas através do espaço ou tempo, podem ser efetuada através das metodologias recursivas ou não-recursivas.

Nos métodos não-recursivos, a extrapolação para qualquer ponto em profundidade é obtida sempre a partir do campo originalmente registrado na superfície, não havendo necessidade de determinar campos de ondas em etapas intermediárias (Costa, 1997). No caso de meios heterogêneos, extrapolar para grandes profundidades em um único passo implica na utilização de operados de migração mais complexos.

2.3.2 Migração Reversa no tempo

Para meios complexos, a migração em sua concepção geométrica não se aplica, sendo necessário utilizar métodos com base na solução da equação de onda. A migração reversa no tempo, também conhecida como RTM, baseia-se na solução da equação da onda acústica, sendo utilizada normalmente para meios com fortes variações laterais de velocidade. Esta é realizada mediante a extrapolação temporal e a correlação cruzada dos campos de onda de fonte e de receptor, no caso de seções não-empilhadas (pré-stack). Nesse processo, o campo de fonte é armazenado para todos os instantes de tempo. Como resultado têm-se grandes volumes de dados para serem correlacionados o que limitava a eficiência do método até suger computadores mais rápidos.

A migração por extrapolação inversa em tempo de seções empilhadas, considera a seção em tempo como condição de contorno na superfície e o campo é calculado iterativamente, do tempo final ao inicial, quando os valores de amplitudes calculados representam a seção migrada. Segundo Baysal et al. (1983) o processo inicia-se com o campo zerado para $t < t_f$, onde t_f é o tempo final na seção empilhada. Tomando-se a seção empilhada $P(x, z = 0, t)$ como condição de contorno e aplicando a marcha reversa no tempo, podemos calcular os valores do campo de ondas para cada tempo até recuperarmos a imagem em profundidade em tempo nulo, $P(x, z, t = 0)$. Na RTM pós-empilhamento, o campo de onda registrado no receptor é propagado até o tempo $t = 0$. A especificação deste tempo é denominado de condição de imagem, ou seja, o tempo em que ocorrem os eventos de reflexão.

Equação acústica da onda

A propagação do sinal sísmico pode ser entendida considerando-se um meio puramente acústico, no qual não se propagam ondas transversais. Neste caso a equação da onda é uma equação escalar, apenas admitindo a propagação de ondas P.

Entre uma das deduções da equação da onda temos a de Nussenzveig (2002a) que utiliza as leis de Newton e de Hooke para chegar a equação da onda para o campo de pressão. Considerando um meio com densidade constante e pequenas deformações, a equação tridimensional da onda para o campo de pressão é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Reescrevendo a equação acima temos que:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

onde $P = P(x, y, z, t)$, que corresponde ao campo de pressão, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, conhecido como operador Laplaciano em coordenadas cartesianas, e $c = c(x, y, z)$ é a velocidade de propagação da onda no meio. Assumindo que o campo de pressão é invariável na direção y , a equação é reduzida para equação bidimensional da onda.

A equação da onda é a lei que estabelece a relação de dependência entre as variações espacial e temporal do campo de pressões gerado pela onda. Entretanto, como a equação da onda é baseada em diferenciais, a correspondente solução deve ser vista como uma forma de explicitar o avanço do campo de pressões, a partir de medidas feitas em uma dada posição.

Método das diferenças finitas

Cada operação diferencial presente na equação (2.6) pode ser substituída por uma aproximação em diferenças finitas mediante truncamento da série de Taylor, como vamos demonstrar a seguir.

A derivada parcial da função $P = P(x, y, z, t)$ em relação a x , considerando que as variáveis x, y, z e t são independentes, é definida como (Piskounov,1990):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, y, z, t) - P(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

Utilizando a notação de derivada temos,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, y, z, t) - P(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

De maneira análoga, pode ser feito para y, z e t . Como as variáveis são independentes, como vimos na equação acima, y, z e t se mantiveram constantes quando derivamos em função de x . O mesmo ocorre quando fomos derivar em função de y, z e t .

A série de Taylor para $P(x + \Delta x, y, z, t)$ é dada por:

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 P(x)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (2.10)$$

Usando a mesma série para $P(x - \Delta x, y, z, t)$ tem-se:

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \frac{\partial P(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 P(x)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (2.11)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos, temos que:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \approx \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \approx \frac{P(x) - P(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.13)$$

Subtraindo as duas séries de Taylor, podemos obter ainda outra expressão para primeira derivada:

$$P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x) = 2\frac{\partial P(x)}{\partial x}\Delta x + 2\frac{\partial^3 P(x)}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + 2\frac{\partial^5 P(x)}{\partial x^5}\frac{(\Delta x)^5}{5!} + \dots \quad (2.14)$$

desprezando os termos de ordens superiores a um, temos:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \approx \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (2.15)$$

Agora somando as duas séries de Taylor, temos:

$$P(x + \Delta x) + P(x - \Delta x) = 2P(x) + 2\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + 2\frac{\partial^4 P(x)}{\partial x^4}\frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots \quad (2.16)$$

Os operadores de segunda ordem para o cálculo das derivadas espaciais e temporais podem ser obtidos desprezando os termos de ordem superior a dois, e fazendo de maneira análoga para y, z e t , obtivemos então:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} \approx \frac{P(x + \Delta x, z, t) - 2P(x, z, t) + P(x - \Delta x, z, t)}{(\Delta x)^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{P(x, z + \Delta z, t) - 2P(x, z, t) + P(x, z - \Delta z, t)}{(\Delta z)^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} \approx \frac{P(x, z, t + \Delta t) - 2P(x, z, t) + P(x, z, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (2.19)$$

A derivada quarta pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^4 P(x)}{\partial x^4} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} \right) \quad (2.20)$$

Quanto maior a ordem do operador utilizado, maior será a precisão das aproximações das derivadas. O operador de quarta ordem pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} \approx \frac{-1}{12(\Delta x)^2} [P(x + 2\Delta x, z, t) - 16[P(x + \Delta x, z, t) + P(x - \Delta x, z, t)] + \quad (2.21)$$

$$30P(x, z, t) + P(x - 2\Delta x, z, t)]$$

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{-1}{12(\Delta z)^2} [P(x, z + 2\Delta z, t) - 16[P(x, z + \Delta z, t) + P(x, z - \Delta z, t)] + \quad (2.22)$$

$$30P(x, z, t) + P(x, z - 2\Delta z, t)]$$

Para que os operadores de diferenças-finitas acima expostos possam ser aplicados para solução da equação de onda é necessário que o meio físico seja discretizado, ou seja, é definido uma malha de pontos posicionados de maneira a representar adequadamente a distribuição das propriedades físicas em subsuperfície. Para cada ponto temos um valor de determinada propriedade física (velocidade, densidade, etc) e quanto mais refinada a malha maior a quantidade de pontos sobre o modelo, e a derivada do campo de pressão calculado para cada ponto fornecerá uma melhor representação da propagação em subsuperfície e reconstituirá de forma satisfatória as estrutura de interesse exploratório. O cálculo do campo de pressão é feito ponto a ponto da malha, como na Figura 2.11.

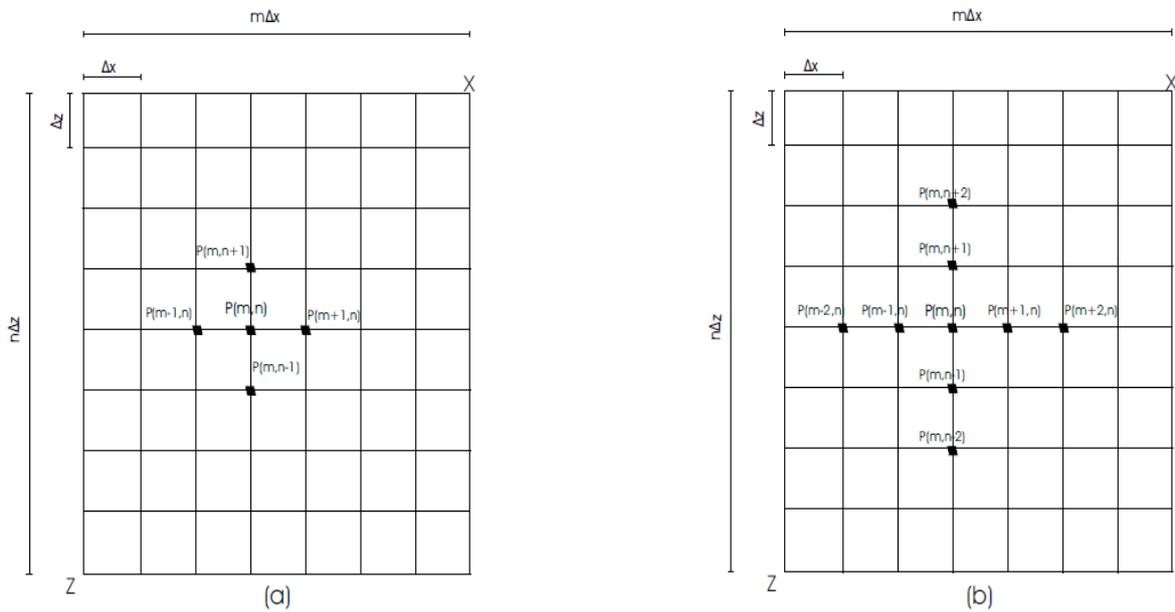


Figura 2.11: Esquema de pontos com campo de pressão conhecido requeridos para os operadores de segunda (a) e quarta (b) ordens. Adaptado de Figueiredo (2009).

Assim para que esse cálculo seja efetuado, as variáveis contínuas presentes na equação (2.6) devem ser substituídas por variáveis discretas:

$$P(x, z, t) = P(m\Delta x, n\Delta z, l\Delta t) = P_{m,n}^l \quad (2.23)$$

Substituindo na equação os operadores de segunda ordem de diferenças-finitas, podemos obter a seguinte aproximação de segunda ordem para a equação de onda, equação 2.6, (Figura

2.11-a para o operador de segunda ordem):

$$\frac{1}{(c\Delta t)^2}(P_{m,n}^{l-1} - 2P_{m,n}^l + P_{m,n}^{l+1}) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(P_{m-1,n}^l - 2P_{m,n}^l + P_{m+1,n}^l) + \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{(\Delta z)^2}(P_{m,n-1}^l - 2P_{m,n}^l + P_{m,n+1}^l)$$

A partir da equação acima, podemos calcular o campo em determinado instante a partir de valores do campo em instantes anteriores (Fernandes, 1998):

$$P_{m,n}^{l+1} = 2P_{m,n}^l - P_{m,n}^{l-1} + A_x[P_{m-1,n}^l - 2P_{m,n}^l + P_{m+1,n}^l] + \quad (2.25)$$

$$A_z[P_{m,n-1}^l - 2P_{m,n}^l + P_{m,n+1}^l]$$

onde $A_x = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ e $A_z = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2$. Da mesma forma, podemos reescrever a equação da onda utilizando operadores de diferenças finitas de quarta ordem para as derivadas espaciais e segunda ordem para as temporais, chegando a seguinte equação:

$$\frac{1}{(c\Delta t)^2}(P_{m,n}^{l-1} - 2P_{m,n}^l + P_{m,n}^{l+1}) = -\frac{1}{12(\Delta x)^2}[P_{m-2,n}^l - 16(P_{m-1,n}^l + P_{m+1,n}^l) + \quad (2.26)$$

$$30P_{m,n}^l + P_{m+2,n}^l] -$$

$$\frac{1}{12(\Delta z)^2}[P_{m,n-2}^l - 16(P_{m,n-1}^l + P_{m,n+1}^l) +$$

$$30P_{m,n}^l + P_{m,n+2}^l]$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma (Farias, 1986):

$$P_{m,n}^{l+1} = \frac{A_x}{12}[16(P_{m-1,n}^l + P_{m+1,n}^l) - (P_{m-2,n}^l + P_{m+2,n}^l)] + \quad (2.27)$$

$$\frac{A_z}{12}[16(P_{m,n-1}^l + P_{m,n+1}^l) - (P_{m,n-2}^l + P_{m,n+2}^l)] +$$

$$\left[2 - \frac{5}{2}(A_x + A_z)\right] P_{m,n}^l - P_{m,n}^{l-1}$$

Portanto, assim como para a segunda ordem, podemos calcular o campo de onda em qualquer instante conhecendo-o em instantes anteriores, como na Figura 2.11-a.

Estabilidade numérica

Os operadores de diferenças-finitas, utilizados para solucionar a equação da onda, não podem ser aplicados de forma indiscriminada, há um limite de estabilidade para o processo. Para precisão de segunda ordem das derivadas espaciais e temporais, utilizando a malha quadrada ($\Delta x = \Delta z = h$), a condição de estabilidade é dada por (Alford et al., 1974):

$$\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

No caso de precisão de quarta ordem para derivadas espaciais e segunda para temporais, ainda para malha quadrada, a condição de estabilidade é dada por:

$$\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 \leq \frac{3}{8} \quad (2.29)$$

Para malhas retangulares ($\Delta x \neq \Delta z$) para precisão de segunda e quarta ordens das derivadas temporais e espaciais, respectivamente, a condição de estabilidade é dada por (Faria, 1986):

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \leq \frac{3}{4} \quad (2.30)$$

Com base nas equações aqui descritas, podemos afirmar que a estabilidade tem relação direta com a malha de discretização utilizada no processo e com o intervalo de amostragem temporal. Segundo Fernandes (1998), o intervalo de tempo entre dois passos consecutivos deve ser tal que a frente de onda mais rápida não se propague por uma distância superior ao espaçamento de células vizinhas da malha de discretização. Logo, podemos afirmar que um esquema de diferenças-finitas é dito estável se a diferença entre as soluções teórica e numérica da equação de diferenças permanece inalterada com o incremento temporal, com Δt fixo, para todos os pontos da malha (Mitchell, 1969).

Dispersão numérica

A dispersão numérica ocorre quando a velocidade de fase da onda numérica é diferente da velocidade de propagação da onda no meio, modificando resultados obtidos na modelagem numérica. Isso ocorre devido a discretização espacial da equação da onda, de forma que as velocidades de fase e de grupo passam a ser função do espaçamento entre os pontos da malha, da frequência e do ângulo de propagação.

Em um meio homogêneo as velocidades de fase (V_f) e de grupo (V_g) coincidem, e o grupo se propaga com a velocidade da onda. As relações dessas velocidades são definidas a partir das relações:

$$V_f = \frac{\omega}{k} \quad (2.31)$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.32)$$

onde ω é a frequência angular e k o número de onda. Em meio dispersivo, a velocidade de fase varia com o comprimento de onda, ou seja, com o número de onda (Nussenzweig, 2002a):

$$\omega = kV_f(k) \quad (2.33)$$

logo,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = V_f + k\frac{dV_f}{dk}, \quad (2.34)$$

ou seja, nesse caso a velocidade de grupo é diferente da de fase. Por isso, dizemos que ocorreu dispersão.

Como estamos obtendo a solução numérica da equação da onda por operadores de diferenças-finitas, as velocidades de fase e de grupo são funções do espaçamento entre os pontos da malha, podendo gerar, assim, dispersão nos resultados. Para verificarmos isso representamos o campo de pressão presente na equação da onda por uma onda plana harmônica para o caso de uma dimensão na forma:

$$P_m^l = e^{i(km dx - w l dt)} \quad (2.35)$$

Utilizando essa solução na aproximação de diferenças-finitas de segunda ordem, equação 2.17, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= e^{-i w l dt} \frac{e^{ik(m+1)dx} - 2e^{ikm dx} + e^{ik(m-1)dx}}{dx^2} \\ &= -\frac{4}{dx^2} e^{i(km dx - w l dt)} \left[\sin^2 \frac{k dx}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{4}{dt^2} e^{i(km dx - w l dt)} \left[\sin^2 \frac{w dt}{2} \right] \quad (2.37)$$

Substituindo essas derivadas parciais na equação da onda de segunda ordem, equação 2.6, considerando apenas uma dimensão, temos:

$$w = \frac{2}{dt} \sin^{-1} \left[\frac{c dt}{dx} \sin \frac{k dx}{2} \right] \quad (2.38)$$

Agora reescrevendo a equação da velocidade de fase, podemos avaliar o comportamento dispersivo das simulações numéricas através da expressão:

$$\frac{V_f}{c} = \frac{2}{\alpha k dx} \sin^{-1} \left[\alpha \sin \frac{k \Delta x}{2} \right] \quad (2.39)$$

onde $\alpha = c \Delta t / \Delta x$.

Essa equação mostra que para o caso 1-D, α deve ser menor ou igual a um, já que velocidade de fase normalizada é um número real (Kosloff e Kessler, 1990). A partir disso, podemos concluir também que quando $\alpha = 1$ não existe dispersão numérica, sendo a velocidade de fase igual a propagação no meio. A Figura 2.12 representa o comportamento da velocidade de fase normalizada, quando variamos o valor do parâmetro α em função de $k_x \Delta x$, sendo que a dispersão se acentua a medida que $k_x \Delta x$ aumenta.

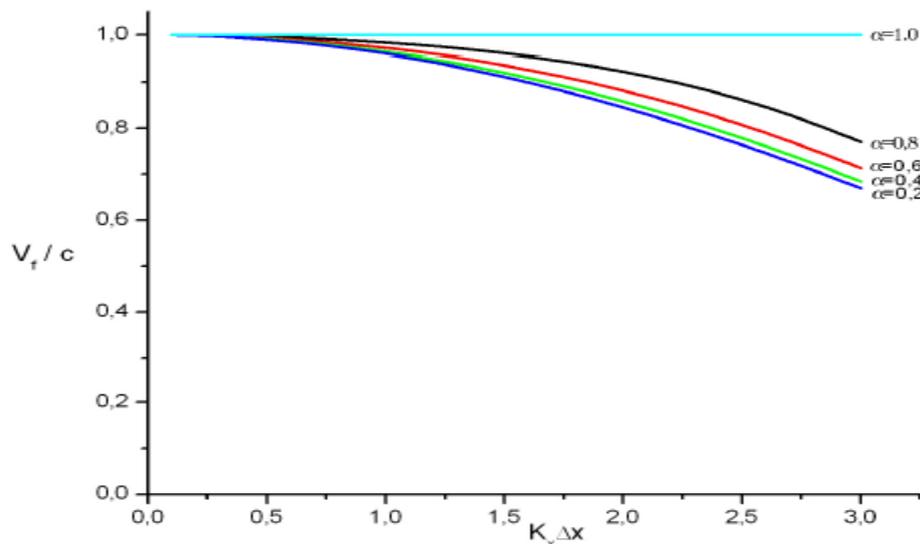


Figura 2.12: Velocidade de fase normalizada versus $k_x \Delta x$ para o caso 1-D. Adaptado de Figueiredo (2009).

Podemos visualizar na Figura 2.12 que para $k \Delta x < \pi/5$ a dispersão é praticamente inexistente. Este valor corresponde a um comprimento de onda de 10 pontos ($\lambda = 10 \Delta x$) já que $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x < \frac{\pi}{5}$, sendo assim $\lambda = 10 \Delta x$.

Também o método pseudo-espectral é um outra opção para solucionar a equação de onda. Este utiliza uma aproximação por diferenças finitas de segunda ordem para derivadas segunda no tempo e transformada de Fourier para o cálculo das derivadas espaciais. A seguir vamos mostrar algumas propriedades da transformada de Fourier que serão empregadas nesse método.

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier (TF) é uma ferramenta matemática de extrema importancia no processamento de dados sísmicos. Sua aplicação na migração sísmica possibilita obter soluções para a equação de onda. Esta operação matemática para uma função $p(x, y, z, t)$ é dada por:

$$P(k_x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z, t) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} dx dy dz dt \quad (2.40)$$

sendo k_x, k_y e k_z números de onda (frequência espacial) nas direções x, y e z , respectivamente. A transformada inversa (TF^{-1}) é definida como:

$$p(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} dk_x dk_y dk_z d\omega \quad (2.41)$$

onde $p(x, y, z, t)$ e $P(k_x, k_y, k_z, \omega)$ satisfazem os requisitos matemáticos para que as integrais existam. A transformada de Fourier possui algumas propriedades como: derivada, multiplicação, soma e convolução, discriminadas abaixo (Butkov, 1998).

Propriedade da derivada:

$$\frac{dp}{dt} \leftrightarrow -i\omega P(\omega) \quad (2.42)$$

De acordo com essa propriedade, derivar uma função em relação ao tempo equivale, no domínio da frequência, a multiplicar seu espectro de amplitude por ω e subtrair de 90 graus de seu espectro de fase.

Propriedade da multiplicação por uma constante:

$$ap(t) \leftrightarrow aP(\omega) \quad (2.43)$$

Multiplicar uma função de tempo por uma constante e calcular a TF do resultado, é o mesmo que calcular a TF e depois multiplicar o resultado pela constante.

Propriedade da soma:

$$r(t) + s(t) \leftrightarrow R(\omega) + S(\omega) \quad (2.44)$$

A TF da soma de duas funções é igual a soma das TF das duas funções.

Propriedade da convolução:

$$r(t) * f(t) \leftrightarrow R(\omega)F(\omega), \quad (2.45)$$

onde,

$$r(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)f(t - \tau)d\tau. \quad (2.46)$$

A convolução no domínio do tempo, corresponde, no domínio da frequência, ao produto dos espectros de amplitude e a soma dos espectros de fase.

A partir das relações vistas acima, podemos obter a relação de dispersão analítica em três dimensões para uma onda plana se propagando em um meio homogêneo. Aplicando a transformada de Fourier na equação (2.6) e considerando a velocidade (c) constante, temos:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (2.47)$$

Método Pseudo-espectral

O método pseudo-espectral, também conhecido como método de Fourier, foi desenvolvido por Kosloff e Baysal (1982), possui alta precisão e utiliza operadores de diferenças-finitas de segunda ordem para derivadas temporais e aplica a propriedade da derivada de Fourier para as derivadas espaciais (Kosloff e Kessler, 1990). É aplicado neste método, a transformada rápida de Fourier (FFT) para as derivadas espaciais, seu algoritmo para o cálculo da segunda derivada pode ser descrito pelo esquema:

$$P_{m,n}^l \rightarrow FFT \rightarrow \hat{P} \rightarrow -k_x^2 \hat{P} \rightarrow FFT^{-1} \rightarrow \frac{\partial^2 P^l}{\partial x_{m,n}^2}, \quad (2.48)$$

Explicitando, primeiro é aplicado a transformada direta de Fourier no campo de pressão $P(x, z, t)$, depois multiplicamos no domínio transformado por $-k_x^2$, por último aplicamos a inversa de Fourier à $-k_x^2 \hat{P}$ e obtemos a segunda derivada no domínio (x, z, t) . De maneira análoga para o eixo z .

Representando as segundas derivadas calculadas pelo método de Fourier por $Fx_{m,n}^l$ e $Fz_{m,n}^l$, em x e z , respectivamente, a equação explícita da onda, equação 2.25, é dada por:

$$P_{m,n}^{l+1} = 2P_{m,n}^l - P_{m,n}^{l-1} + c_{m,n}^2 \Delta t^2 (Fx_{m,n}^l + Fz_{m,n}^l) \quad (2.49)$$

Sendo assim, pelo método de Fourier podemos calcular o campo de pressão em qualquer instante de tempo, conhecendo os campos anteriores.

Estabilidade numérica

Considerando a velocidade c constante e aplicando a transformada de Fourier nas derivadas espaciais na equação da onda (2.6), obtemos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(k_x, k_y, k_z, t)}{\partial t^2} = -[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] P(k_x, k_y, k_z, t). \quad (2.50)$$

Para análise da estabilidade, considera-se uma onda senoidal se propagando em um espaço tridimensional, da seguinte forma (Araujo, 2009):

$$P_{m,n}^l = P_0 \exp[i(n\omega \Delta t - lk_x \Delta x - jk_y \Delta y - mk_z \Delta z)] \quad (2.51)$$

Usando as expressões (2.22) e a expressão acima (2.50), na equação (2.51), resulta em (Araujo, 2009):

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{2} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]^{1/2} \right). \quad (2.52)$$

A equação acima define a relação de dispersão numérica para o modelamento de ondas acústicas em duas dimensões pelo método de Fourier. O limite da estabilidade é para $k_x^{max} =$

$\frac{\pi}{\Delta x}, k_y^{max} = \frac{\pi}{\Delta y}, k_z^{max} = \frac{\pi}{\Delta z}$, sendo assim:

$$c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{1/2} \leq \frac{2}{\pi} \quad (2.53)$$

Considerando o caso para $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, tem-se:

$$\sqrt{3} \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{\pi} \quad (2.54)$$

Por definição, $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$, logo a estabilidade é para:

$$\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}. \quad (2.55)$$

Ainda considerando espaçamentos iguais, temos que no caso 2-D $\alpha \leq (\sqrt{2}/\pi)$ e para o caso 1-D, $\alpha \leq 2/\pi$

Dispersão numérica

Para análise da dispersão, dividimos a equação (2.39) por ck , resultando em:

$$\frac{V_f}{c} = \frac{2}{ck\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{2} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]^{1/2} \right). \quad (2.56)$$

Sendo $\alpha\Delta S = \alpha\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = c\Delta t$ e que $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, então a expansão acima fica:

$$\frac{V_f}{c} = \frac{2}{\alpha\Delta Sk} \arcsin \left(\frac{\alpha\Delta Sk}{2} \right). \quad (2.57)$$

Considerando que $(\alpha\Delta Sk/2) \ll 1$, $\arcsin(\alpha\Delta Sk/2)$ e $V_f = c$. Assim podemos dizer que praticamente não existe dispersão numérica nesta situação.

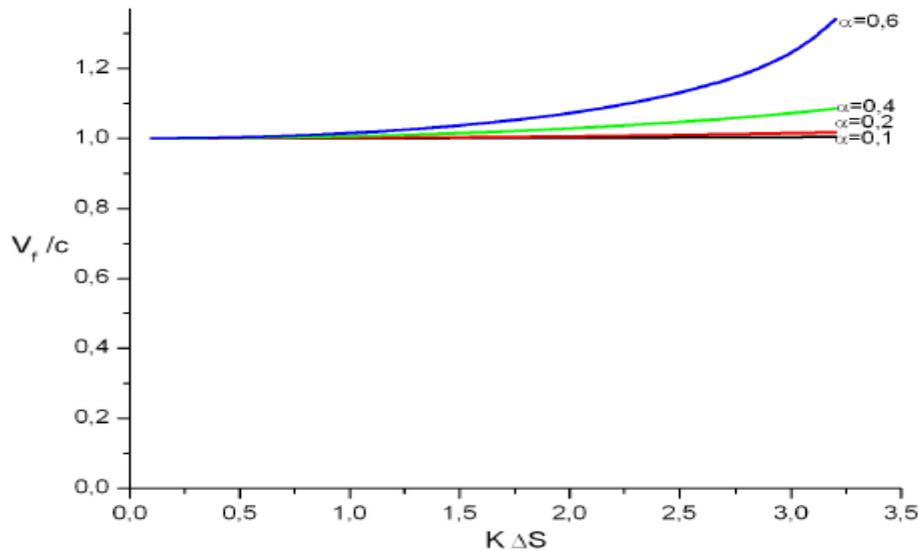


Figura 2.13: Velocidade de fase normalizada versus $k\Delta S$. Adaptado de Araújo (2009).

De acordo com a Figura 2.13, $\alpha < 0,2$ é frequentemente usado para garantir a estabilidade e uma pequena dispersão numérica (Araujo, 2009). Como $f_{max} = \frac{C}{2\Delta x}$, sendo assim $\lambda = 2\Delta x$. Este método pode modelar e migrar dados usando apenas dois pontos por comprimento de onda.

CAPÍTULO 3

Método de expansão rápida

Como foi mostrado anteriormente, o método de diferenças finitas e o pseudo-espectral devem satisfazer as relações de estabilidade e dispersão numérica de forma a gerar resultados estáveis e livres de ruídos numéricos. O método de expansão rápida, também conhecido como REM (Rapid Expansion Method), podendo ser mais abrangente funcionando para intervalos amostrais maiores no tempo. A partir da frequência máxima do espectro, podemos calcular o maior Δt para fazer a extrapolação do campo, sendo $\Delta t = 1/2f_{max}$, também conhecido como Δt de Nyquist, dessa forma a expansão fornecerá resultados numéricos de forma estável e livre de dispersão.

O método de expansão rápida foi apresentado por Kosloff et al. (1989) e tem origem na modificação feita no método Tal-Ezer (1987) visando reduzir pela metade o número de termos somados na série de Chebyshev. O movimento de uma onda acústica no espaço e tempo pode ser descrita de acordo com a equação diferencial de segunda ordem,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 u(x, t) = s(x, t) \quad (3.1)$$

onde $u(x, t)$ é o campo de onda no tempo t , \vec{x} é a posição do vetor, $c = c(x)$ é a velocidade de propagação acústica, $s(x, t)$ é o termo fonte, e ∇^2 é o operador Laplaciano em coordenadas cartesianas.

O operador Laplaciano em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

Reescrevemos a equação (3.1), sem o termo fonte, passa a ter a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -L^2 u(x, t) \quad (3.3)$$

sendo $-L^2 = c^2(x)\nabla^2$.

A solução formal para essa equação, considerando as condições iniciais: $\partial u(x, t)/\partial t(t = 0) = \dot{u}_0$ e $u(x, t = 0) = u_0$, é dada pela equação:

$$u(x, t) = \cos(Lt)u_0 + L^{-1} \sin(Lt)\dot{u}_0. \quad (3.4)$$

Os campos de onda $u(x, t + \Delta t)$ e $u(x, t - \Delta t)$ podem ser calculados a partir da equação (3.4). Adicionando esses dois campos, removemos a parte ímpar da solução e deixamos a parte par, resultando então

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) = 2\cos(L\Delta t)u(x, t). \quad (3.5)$$

De acordo com Kosloff et al.(1989) baseado no método de expansão apresentado por Tal-Ezer et al.(1987), a função cosseno, pode ser expandida da seguinte forma:

$$\cos(L\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right), \quad (3.6)$$

onde $C_{2k} = 1$ para $k = 0$ e $C_{2k} = 2$ para $k > 0$, J_{2k} representa a função de Bessel de ordem $2k$ e $Q_{2k}(w)$ são polinômios de Chebyshev modificados. O termo R é um escalar o qual é o maior autovalor associado à equação de onda acústica, ou seja, o maior valor assumido por $-L^2$ (Tal-Ezer et al.,1987). Como essa expressão só possui polinômios pares, é mais conveniente usar a seguinte relação,

$$Q_{k+2}(w) = 2(1 + 2w^2)Q_k(w) - Q_{k-2}(w). \quad (3.7)$$

Inicia-se a recorrência por

$$Q_0(w) = 1 \text{ e } Q_2(w) = 1 + 2w^2, \quad (3.8)$$

onde $w = iL/R$.

Para o caso de propagação da onda em 2D e considerando o caso de velocidade constante, o valor de R é dado por $R = \pi c \sqrt{(1/\Delta x^2) + (1/\Delta z^2)}$. Em geral, c pode ser substituído por c_{max} , a maior velocidade da malha e Δx e Δz os espaçamentos da malha em x e z , respectivamente (Tal-Ezer et al., 1987).

A solução da equação de onda, incluindo o termo fonte, considerando o procedimento de recursão no tempo (Pestana e Stoffa, 2010) é dada por

$$P(x, z, t + \Delta t) + P(x, z, t - \Delta t) = 2\cos(L\Delta t)P(x, z, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, z, t + \Delta t) + f(x, z, t - \Delta t)]. \quad (3.9)$$

Assim sendo, o operador $\cos(L\Delta t)$, presente na equação 3.9, pode ser avaliado usando o REM, explicitado na equação 3.6.

O novo método de expansão, que vamos apresentar a seguir é baseado nos polinômios de Hermite e polinômios de Laguerre. E estamos propondo neste trabalho uma solução alternativa para a expansão do cosseno, presente na equação 3.9, podendo ser usado na modelagem e migração de dados sísmicos.

3.1 Solução da equação de onda usando expansão polinomial de Hermite

Os polinômios de Hermite, $H_k(x)$, são polinômios ortogonais cujo principal campo de aplicação encontra-se na mecânica quântica, especialmente no estudo do oscilador harmônico unidimensional. Eles são ortogonais em relação à função peso e^{-x^2} . Para se obter a expansão em termos do polinômio de Hermite, iniciamos pela sua função geradora,

$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} H_k(x), \quad (3.10)$$

onde $H_k(x)$ é o polinômio de Hermite de ordem k . O operador exponencial pode ser escrito como,

$$e^{iL\Delta t} = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} e^{-(-i\Delta t/2\lambda)^2+2\lambda L(-i\Delta t/2\lambda)}, \quad (3.11)$$

no qual um parâmetro arbitrário λ foi utilizado por conveniência. Comparando as equações 3.10 e 3.11, temos que $s = -i\Delta t/2\lambda$ e $x = \lambda L$. Assim a expansão de Hermite para o operador exponencial ($e^{i\lambda\Delta t}$) tem a seguinte representação:

$$e^{iL\Delta t} = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^k H_k(\lambda L). \quad (3.12)$$

Sobre a convergência dessa série, pode-se demonstrar que para $k > (e\Delta t/2\lambda)$ o termo $(1/k!)(\Delta t/2\lambda)^k$ se comporta como $e^{-k \ln[k/e(2\lambda/t)]}$. Usando-se a fórmula de Stirling para o termo fatorial, onde:

$$k! \approx \exp[k(\ln k - 1)], \quad k \gg 1, \quad (3.13)$$

demonstra que este tipo de expansão converge exponencialmente.

Para o operador exponencial $e^{-iL\Delta t}$, de forma análoga, em termos dos polinômios de Hermite, temos que,

$$e^{-iL\Delta t} = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^k H_k(-\lambda L). \quad (3.14)$$

Sabendo-se que $\cos(L\Delta t) = e^{-iL\Delta t} + e^{iL\Delta t}/2$, a expansão do operador $\cos(L\Delta t)$, considerando as equações 3.12 e 3.14, pode ser escrita como:

$$\cos(L\Delta t) = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^k (H_k(\lambda L) + H_k(-\lambda L)) \right]. \quad (3.15)$$

Quando k é um número ímpar, $H_k(-x) = -H_k(x)$. Sendo assim, todos os termos ímpares serão cancelados, e teremos a expansão seguinte:

$$\cos(L\Delta t) = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^{2k} H_{2k}(\lambda L). \quad (3.16)$$

Os polinômios de Hermite podem ser calculados pela seguinte recursão,

$$H_{k+1}(\lambda L) = 2\lambda L H_k(\lambda L) - 2k H_{k-1}(\lambda L), \quad (3.17)$$

com os valores iniciais $H_0(\lambda L) = 1$ e $H_1(\lambda L) = 2\lambda L$.

Usando a solução dada pela equação 3.9, e expansão com os polinômios de Hermite para o $\cos(L\Delta t)$, equação 3.16, temos:

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2 \left[e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^{2k} H_{2k}(\lambda L) \right] P(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t)] \quad (3.18)$$

Agora precisamos de uma recursão para H_k apenas para os termos pares. Considerando recursão dada em 3.17, chegamos a seguinte recursão:

$$H_{k+2}(x) = (4x^2 - 4k - 2)H_k(x) - 4k(k-1)H_{k-2}(x), \quad (3.19)$$

a qual é válida para valores de $k > 2$ e onde $x = \lambda L$. Para iniciarmos a recursão se faz necessário conhecermos os termos H_0 e H_2 , sendo $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

Para um dado Δt , temos que o número de termos da série (3.16), a fim de garantir a convergência, é dado por $k > (e\Delta t/2\lambda)$, onde e é o número neperiano ($e = 2,7182\dots$) e λ , um parâmetro arbitrário.

Se considerarmos apenas os primeiros dois termos da expansão dada em 3.16, usando-se (H_0 e H_2), temos o seguinte resultado:

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \left[H_0(\lambda L) - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 H_2(\lambda L) \right] P(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t)]. \quad (3.20)$$

Logo,

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2Z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 (4(\lambda L)^2 - 2) \right] P(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t)], \quad (3.21)$$

onde $Z = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2}$ ou $Z = 1 - (\Delta t/2\lambda)^2 + \frac{(\Delta t/2\lambda)^4}{2!} + \dots$ (aproximação por série de Taylor). Podemos escrever a equação 3.21 da seguinte forma,

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2Z \left[1 + \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 \right] P(x, t) - Z[\Delta t^2 L^2] P(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t)]. \quad (3.22)$$

Em seguida, considerando-se um Δt suficientemente pequeno, temos que $(\Delta t/2\lambda)^2 \approx 0$ e $Z = 1$, resultando em:

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2P(x, t) - \Delta t^2 L^2 P(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} [f(x, t + \Delta t) + f(x, t - \Delta t)], \quad (3.23)$$

Assim, o resultado obtido em 3.23 fornece a solução da a equação de onda quando aproximada pelo método pseudo-espectral (segunda ordem no tempo e método de Fourier para derivadas espaciais), como já foi exposto anteriormente.

De forma análoga, para a quarta ordem no tempo temos:

$$\begin{aligned} P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2Z \left[1 + \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 \right) \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 \right] P(x, t) \\ - Z \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 \right] \Delta t^2 L^2 P(x, t) \\ + Z \frac{1}{12} \Delta t^4 L^4 P(x, t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Considerando um Δt suficientemente pequeno, temos que $(\Delta t/2\lambda)^2 \approx 0$ e $Z = 1$, desconsiderando o termo fonte resulta-se em:

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2P(x, t) - \Delta t^2 L^2 P(x, t) + \frac{1}{12} \Delta t^4 L^4 P(x, t). \quad (3.25)$$

Da mesma forma, o resultado obtido em 3.25 fornece a solução da a equação de onda quando aproximada pelo método pseudo-espectral (quarta ordem no tempo e método de Fourier para derivadas espaciais).

3.2 Expansão utilizando os polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são ortogonais, assim como os de Hermite, em relação à função peso $x^m e^{-x}$. Usando as relações existentes entre o polinômio de Laguerre e o de Hermite, temos as seguintes equações:

$$H_{2k}(x) = (-1)^k 2^{2k} k! L_k^{-1/2}(x^2), \quad (3.26)$$

$$H_{2k+1}(x) = (-1)^k 2^{2k+1} k! x L_k^{-1/2}(x^2). \quad (3.27)$$

Usando as relações em 3.26 e 3.27 e substituindo em 3.16, obtemos o seguinte resultado para $\cos(L\Delta t)P(t)$:

$$\begin{aligned} \cos(L\Delta t)P(t) &= e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^{2k} H_{2k}(\lambda L) P(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\Delta t) \phi_k(t); \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde,

$$C_k(\Delta t) = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^{2k} (-1)^k k! 2^{2k}, \quad (3.29)$$

ou simplificando,

$$C_k(\Delta t) = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \frac{k! 2^{2k}}{2k!} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^{2k}. \quad (3.30)$$

Também nota-se que o coeficiente $C_k(\Delta t)$ pode ser calculado a partir da seguinte forma recursiva:

$$C_k(\Delta t) = \left[\frac{2}{2k-1} \right] \left(\frac{\Delta t}{2\lambda}\right)^2 C_{k-1}(\Delta t) \quad (3.31)$$

e

$$\phi_k(t) = L_k^{-1/2} (\lambda^2 L^2) P(t) \quad (3.32)$$

que também satisfaz a relação de recursividade:

$$\phi_{k+1}(t) = \frac{(2k-1/2-\lambda^2 L^2)}{(k+1)} \phi_k(t) - \frac{(k-1/2)}{(k+1)} \phi_{k-1}(t) \quad (3.33)$$

ou,

$$\phi_k(t) = \frac{(2k-5/2-\lambda^2 L^2)}{k} \phi_{k-1}(t) - \frac{(k-3/2)}{k} \phi_{k-2}(t) \quad (3.34)$$

com os termos iniciais, $\phi_0(t) = P(t)$ e $\phi_1 = (1/2 - \lambda^2 L^2) P(t)$.

Agora, usando a solução da equação de onda e substituindo $\cos(L\Delta t)$ pela nova aproximação em 3.21, produzimos a seguinte solução:

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\Delta t) \phi_k(t). \quad (3.35)$$

Usando apenas dois termos do somatório (equivalente a uma solução de segunda ordem no tempo), obtemos:

$$\begin{aligned} P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) &= 2[C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t)] \\ &= 2C_0 P(x, t) + C_1 [1 - 2\lambda^2 L^2] P(x, t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Após algumas simplificações matemáticas

$$P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = 2\alpha P(x, t) - \beta \Delta t^2 L^2 P(x, t), \quad (3.37)$$

onde $\alpha = C_0 [1 + (\Delta t/2\lambda)^2]$ e $\beta = C_0 = e^{-(\Delta t/2\lambda)^2}$.

Adicionando mais um termo, temos uma aproximação de quarta ordem no tempo, dada por:

$$\begin{aligned} P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) &= 2[C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t)] \\ &= 2C_0 P(x, t) \\ &\quad + C_1 (1 - 2\lambda^2 L^2) P(x, t) \\ &\quad + 2C_2 \left(\frac{1}{8} - \lambda^2 L^2 + \frac{\lambda^4 L^4}{2} \right) P(x, t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x, t + \Delta t) + P(x, t - \Delta t) = & [2C_0 + C_1 + 1/4C_2]P(x, t) \\
 & - 2[C_1 + C_2]\lambda^2 L^2 P(x, t) \\
 & + C_2\lambda^4 L^4 P(x, t),
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 C_0 &= e^{-(\Delta t/2\lambda)^2} \\
 C_1 &= 2 \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 C_0 \\
 C_2 &= \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^2 \quad C_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta t}{2\lambda} \right)^4 C_0.
 \end{aligned}$$

O parâmetro λ é arbitrário e utilizado para reduzir o erro de operação entre pequenos e grandes números no computador e ajustar a taxa de convergência (Xu-Guang Hu, 1998). O melhor valor que encontramos para este parâmetro foi $\lambda = 8/R$ que corresponde ao maior autovalor associado à equação da onda, sendo R o mesmo valor determinado na expansão do REM com Chebyshev.

CAPÍTULO 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos com o método de expansão rápida para resolver a equação da onda acústica (2-D), calculados pelo programa computacional adaptado para a utilização dos polinômios de Hermite e Laguerre. Os resultados são apresentados de forma ilustrativa através de instantâneos (snapshots) dos campos de propagação e também na forma de gráficos destes campos ao longo do tempo em posições fixas do meio (traços do sismograma), no caso da modelagem. Posteriormente, iremos apresentar os resultados numéricos para a migração reversa no tempo, para apenas dados de afastamento nulo.

4.1 Modelagem Numérica

4.1.1 Modelo de duas camadas

A fim de testar os métodos implementados computacionalmente, utilizamos inicialmente os três métodos, o REM com os polinômios de Chebyshev, com Hermite e Laguerre no modelo de duas camadas. Para efeito de comparação geramos snapshots para diferentes tempos e seções em tempo para esse modelo, o qual possui apenas as velocidades de 2500 m/s e 3000 m/s e os parâmetros usados na modelagem estão apresentados na Tabela 4.1. Foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição 1500 m na horizontal e 300 m na vertical.

Os snapshots nos tempos 0.1 s, 0.2 s, 0.3 s e 0.4 s são mostrados na Figura 4.2 para o REM com Chebyshev, Figura 4.3 para o REM com Hermite e Figura 4.4 para o REM com Laguerre, respectivamente.

Número de amostras na horizontal(nx)	300
Número de amostras na vertical(nz)	160
Espaçamento horizontal	10 m
Espaçamento vertical	10 m
Intervalo de amostragem	0,002 s
Número de amostras no tempo	250
Frequência máxima	80 Hz

Tabela 4.1: Parâmetros na modelagem do modelo de duas camadas.

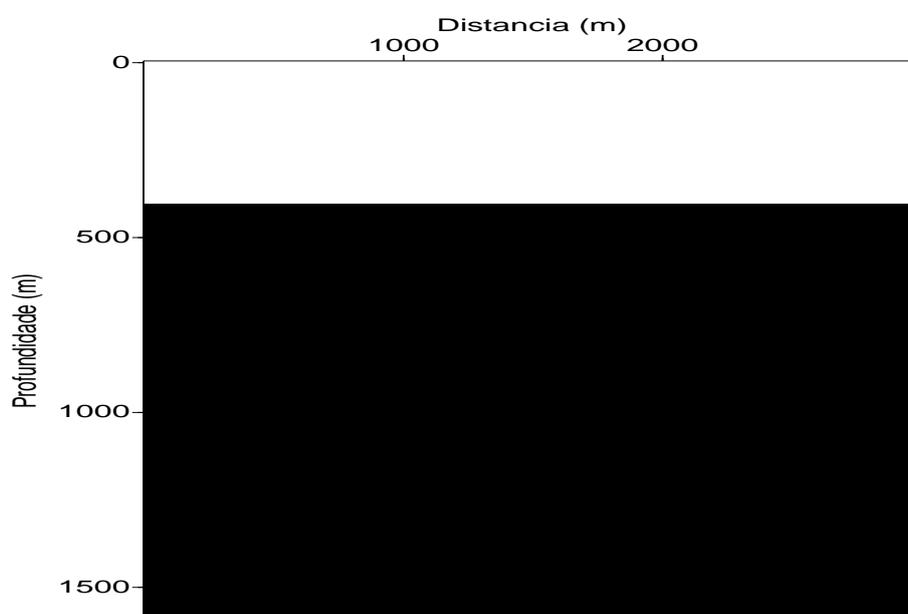


Figura 4.1: Campo de velocidade do modelo de duas camadas com velocidade de 2000 m/s e 3500 m/s.

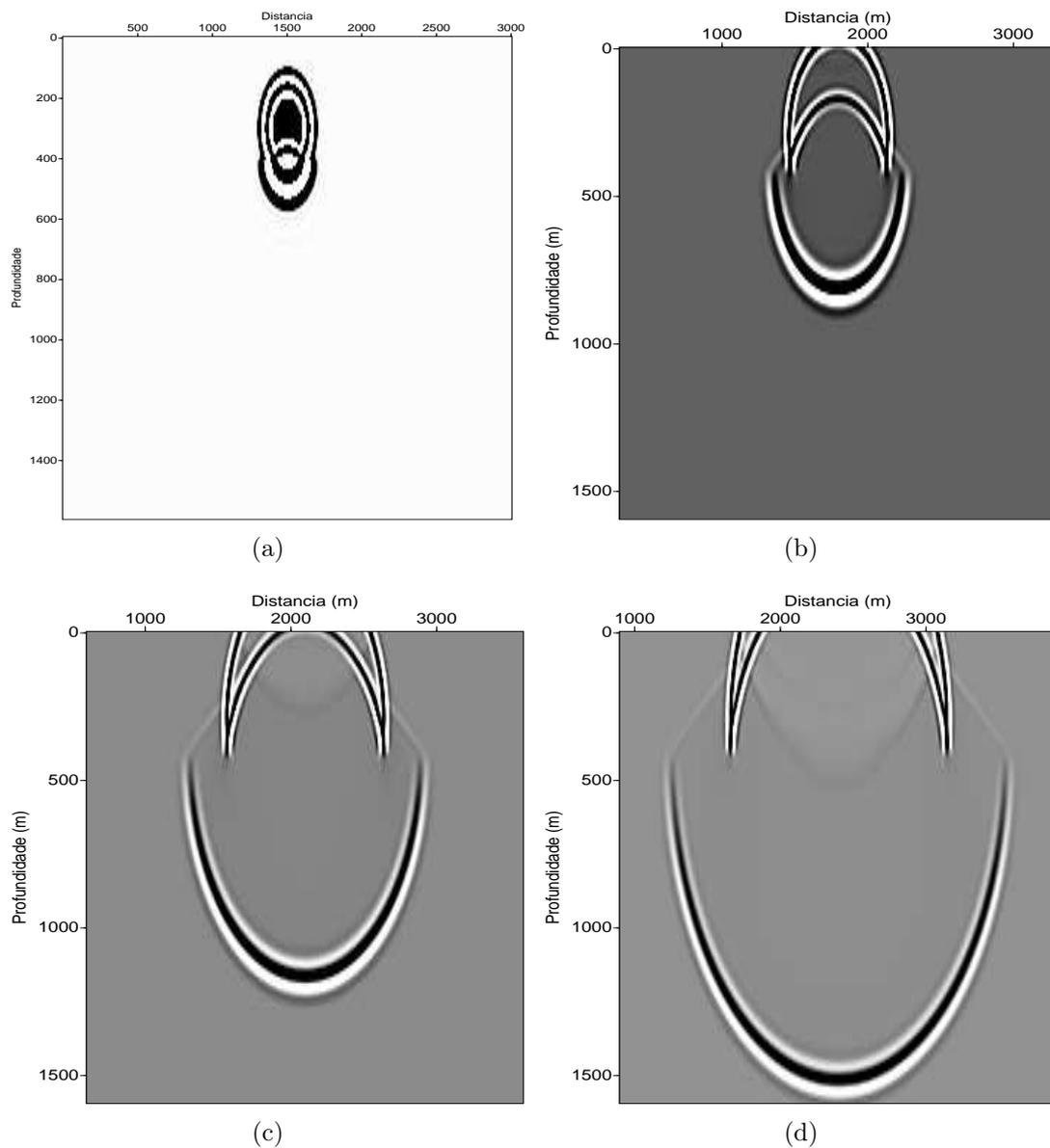


Figura 4.2: Snapshots do dado modelado de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Chebyshev nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.

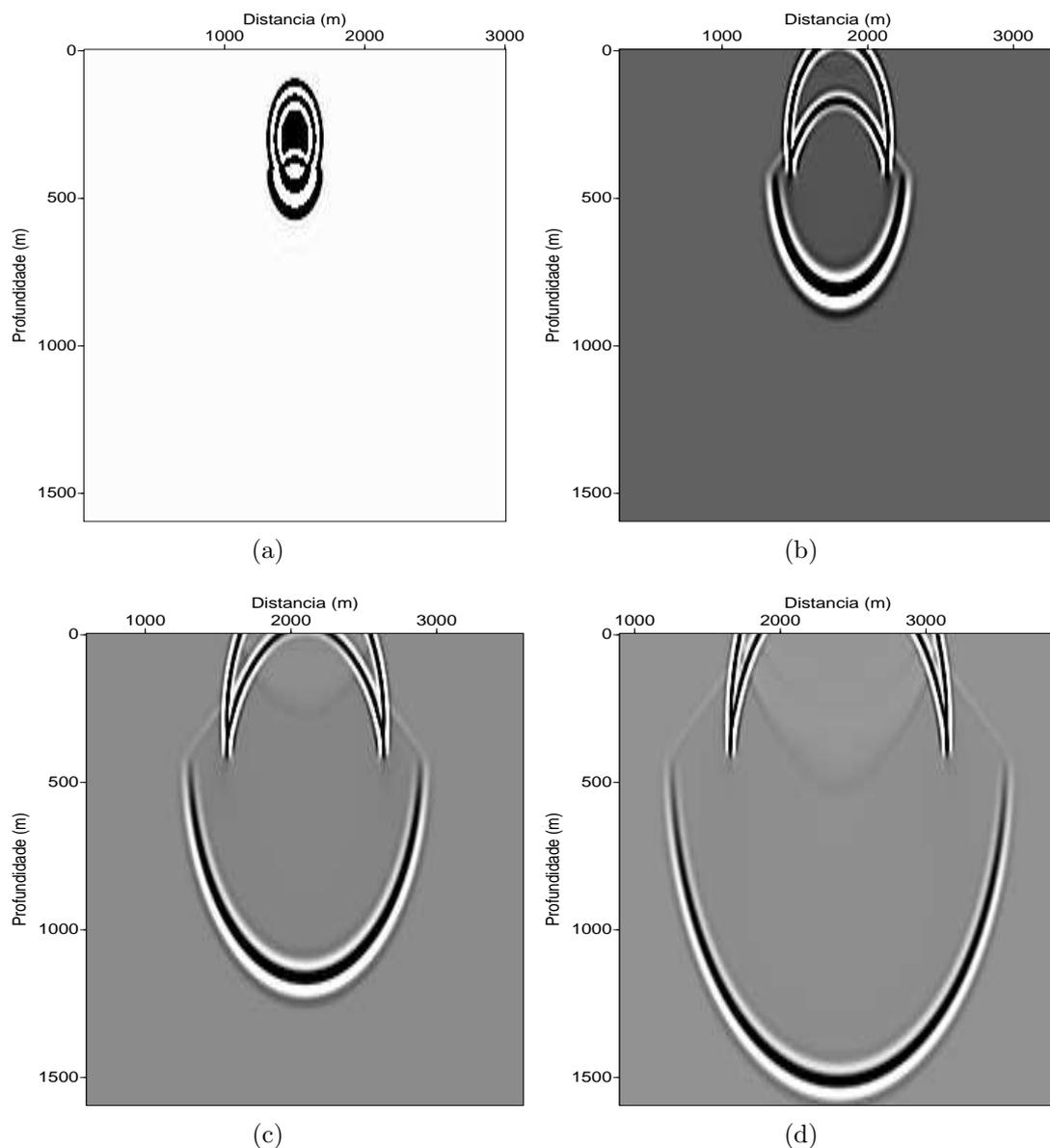


Figura 4.3: Snapshots do dado modelado de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Hermite nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.

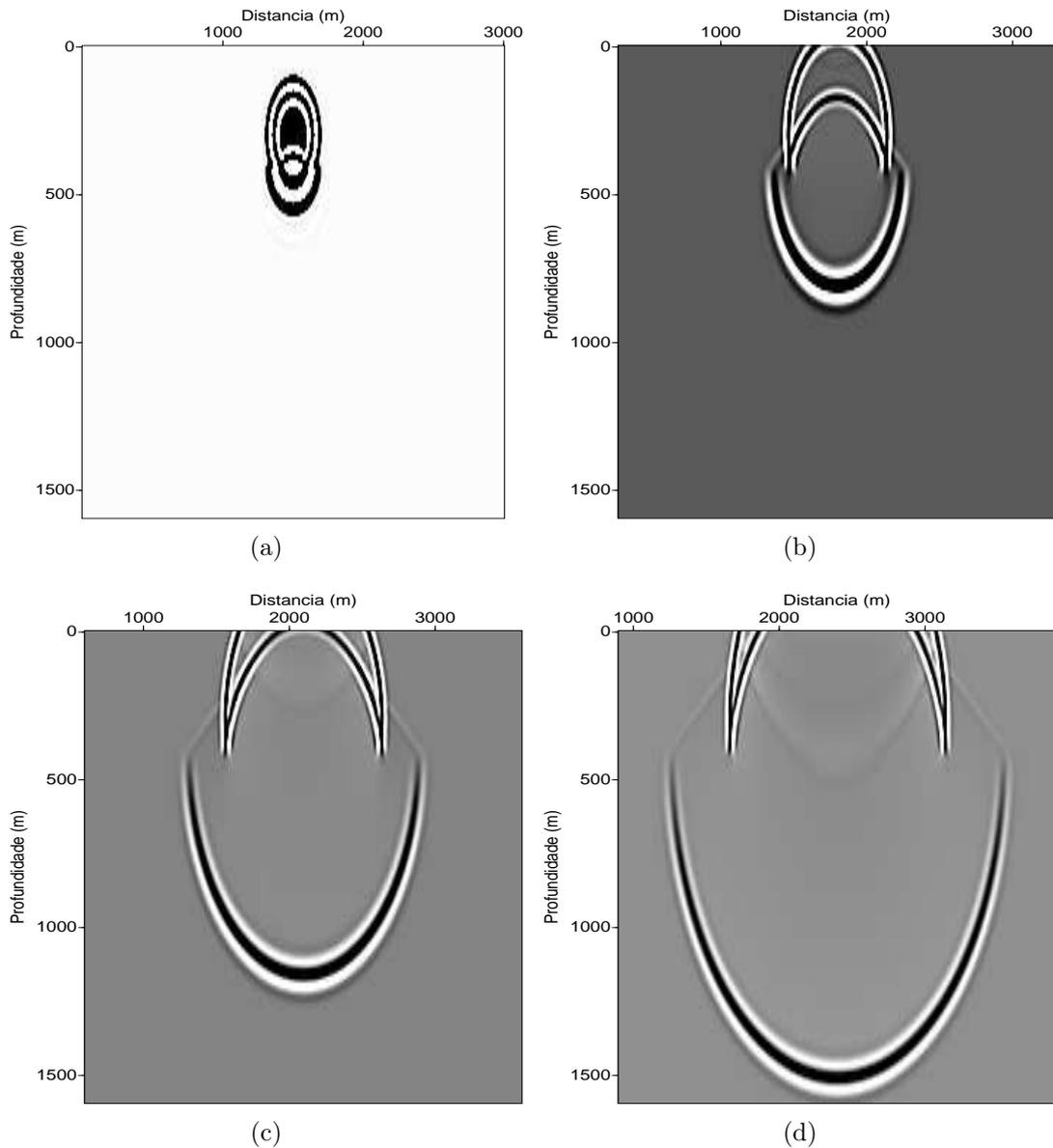


Figura 4.4: Snapshots gerados a partir do modelo de duas camadas utilizando a expansão com os polinômios de Laguerre nos tempos 0.1 s (a), 0.2 s (b), 0.3 s (c) e 0.4 s (d). Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms

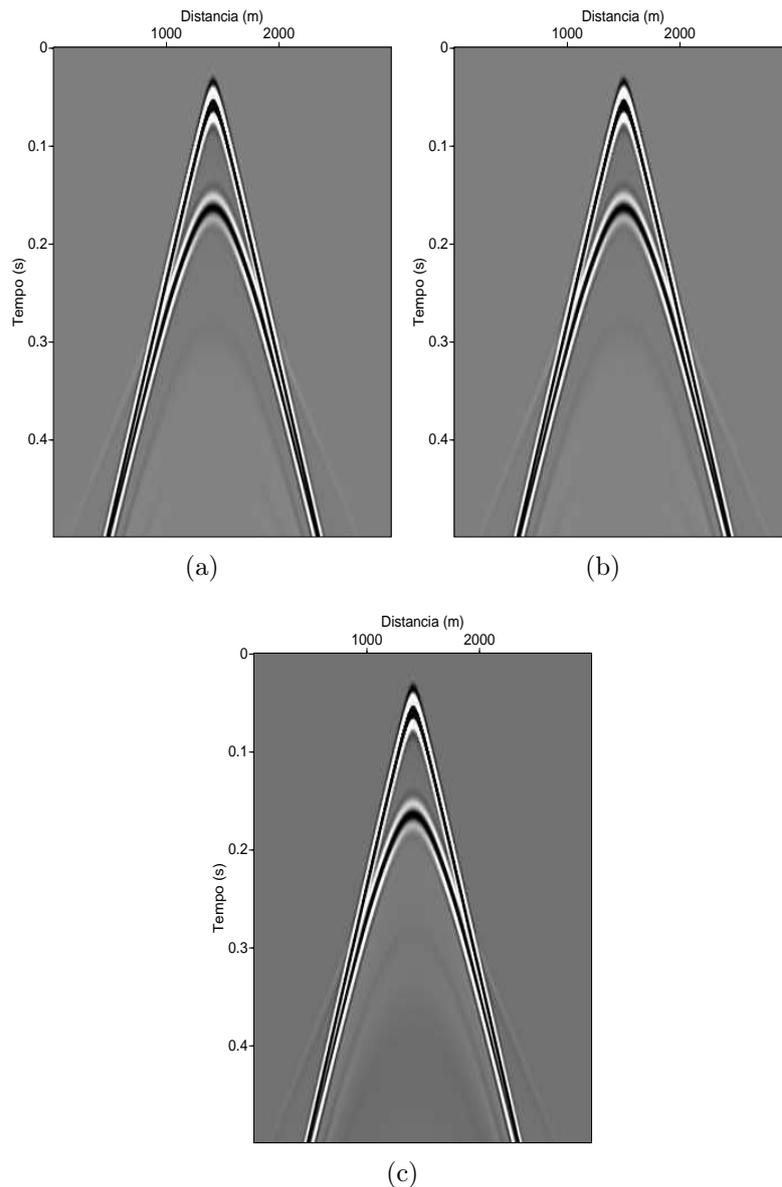


Figura 4.5: Sismogramas gerados na modelagem para o modelo de duas camadas, sendo (a) utilizando polinômios de Chebyshev, (b) com os polinômios de Hermite e (c) polinômios de Laguerre, registrados na profundidade de 250 m ao longo de todo modelo. Para modelagem foi utilizado uma fonte do tipo Ricker na posição $x_s = 1500m$ e $z_s = 300m$ com frequência máxima de 80 Hz. A amostragem no tempo foi de 2ms.

Nas figuras 4.5(a), 4.5(b) e 4.5(c), apresentamos as seções em tempo com os polinômios de Chebyshev, Hermite e Laguerre, respectivamente. Os resultados foram semelhantes mostrando que tanto a expansão com Hermite quanto com Laguerre são alternativas para o método do REM com expansão de Chebyshev, resultados estáveis e sem dispersão numérica. Os dados modelados utilizando a expansão de Hermite só constam seis recursões para estes parâmetros, a partir disso o método se dispersa, sem conseguirmos imagear, sendo este o

k_{max} .

4.1.2 Modelo do domo de sal- SEG-EAGE

Utilizamos o modelo da SEG-EAGE, o qual representa um campo complexo com um forte contraste de velocidade com a presença de um corpo salino, a fim de testarmos a eficiência do método REM com os polinômios de Laguerre para meios complexos. Para efeito de modelagem, usamos os parâmetros indicados na Tabela 4.2. Para efeito de modelagem utilizamos uma fonte do tipo Ricker posicionada nas coordenadas 3000 m na horizontal e 20 m na vertical. Os snapshots foram gerados nos tempos 0.4 s, 0.6 s, 0.8 s e 1 s, como mostrado na Figura 4.7. O sismograma correspondente está na Figura 4.8 com geofones ao longo da superfície do modelo na profundidade de 20 m.

Número de amostras na horizontal(nx)	338
Número de amostras na vertical(nz)	210
Espaçamento na horizontal	20 m
Espaçamento na vertical	20 m
Intervalo de amostragem	0,002 s
Número de amostras no tempo	1000
Frequência máxima	25 Hz

Tabela 4.2: Parâmetros da modelagem do dado sintético do domo de sal.

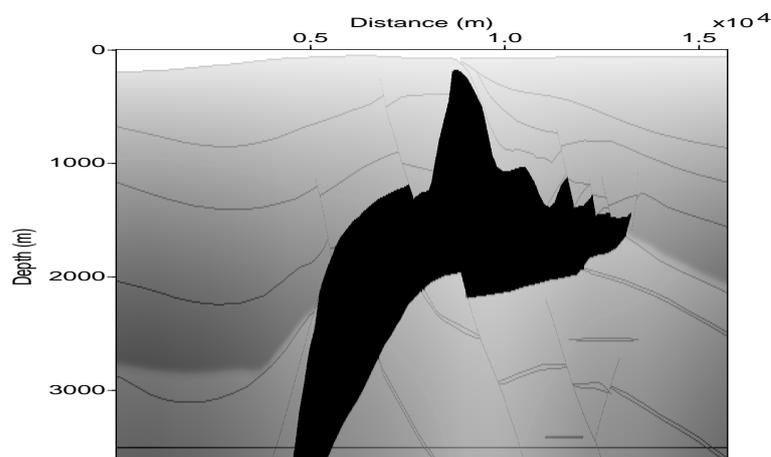


Figura 4.6: Campo de velocidade do modelo sintético do domo de sal.

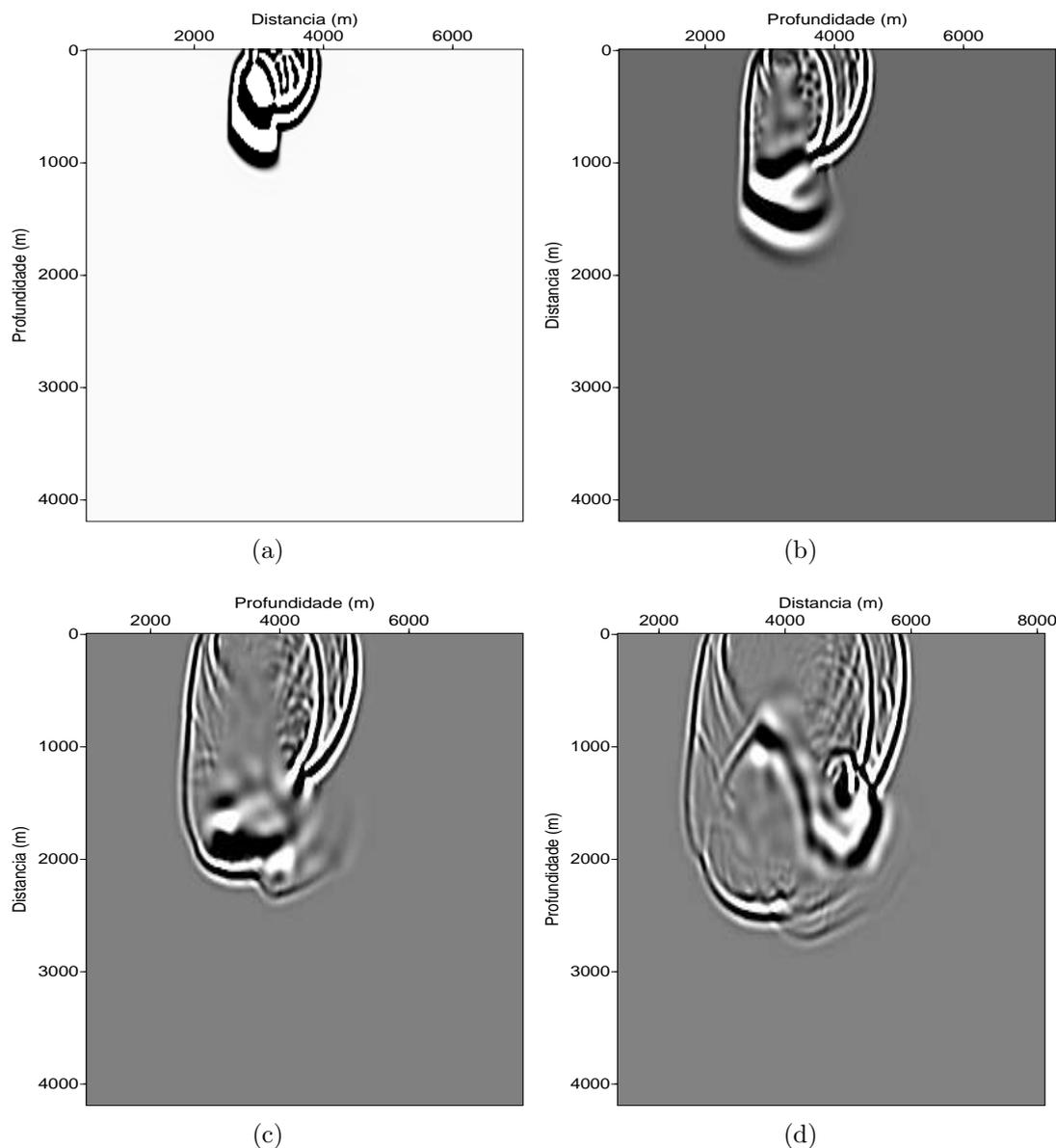


Figura 4.7: Snapshots gerados a partir do modelo sintético do domo de sal nos tempos 0.4 s (a), 0.6 s (b), 0.8 s (c) e 1 s (d) com fonte do tipo wavelet localizada em $x_s = 3000m$ e $z_s = 20m$, com o passo no tempo de 2 ms e frequência máxima de 25 Hz.

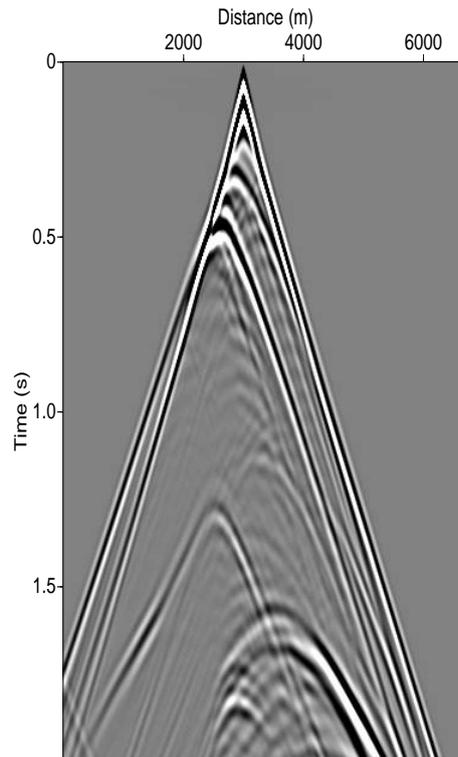


Figura 4.8: Sismograma gerados na modelagem do dado sintético do domo de sal com passo no tempo de 2 ms, frequência máxima de 25 Hz e registrado na profundidade de 20 m.

Podemos perceber, analisando os snapshots gerados pela modelagem do dado sintético SEG-EAGE, a evolução no tempo dos estágios de propagação da onda. Nota-se pouca dispersão e qualidade nos resultados. O sismograma mostra as reflexões e as múltiplas, além de difrações devido a presença do domo de sal. O corpo de sal atua como um dispersor do sinal sísmico.

4.1.3 Modelo do diápiro de sal

Aplicamos o REM com os polinômios de Laguerre em um modelo sintético de um diápiro de sal, com a presença de vários sinclinais decorrentes da deformação das camadas. É um campo de velocidade bastante complexo. Na modelagem desse dado utilizamos os parâmetro descritos na Tabela 4.3. A fonte usada foi do tipo Ricker localizada 7500 m na horizontal e 125 m na vertical. Os snapshots foram gerados nos tempos 1.6 s, 1.8 s, 2 s e 2.2 s como mostrado na Figura 4.10. O sismograma gerado nesta migração está na Figura 4.11 com geofones ao longo de todo modelo na horizontal e profundidade de 125 m.

Número de amostras na horizontal(nx)	961
Número de amostras na vertical(nz)	901
Espaçamento na horizontal	12.5 m
Espaçamento na vertical	12.5 m
Intervalo de amostragem	0,002 s
Número de amostras no tempo	2000
Frequência máxima	25 Hz

Tabela 4.3: Parâmetros da modelagem do dado sintético do diápiro.

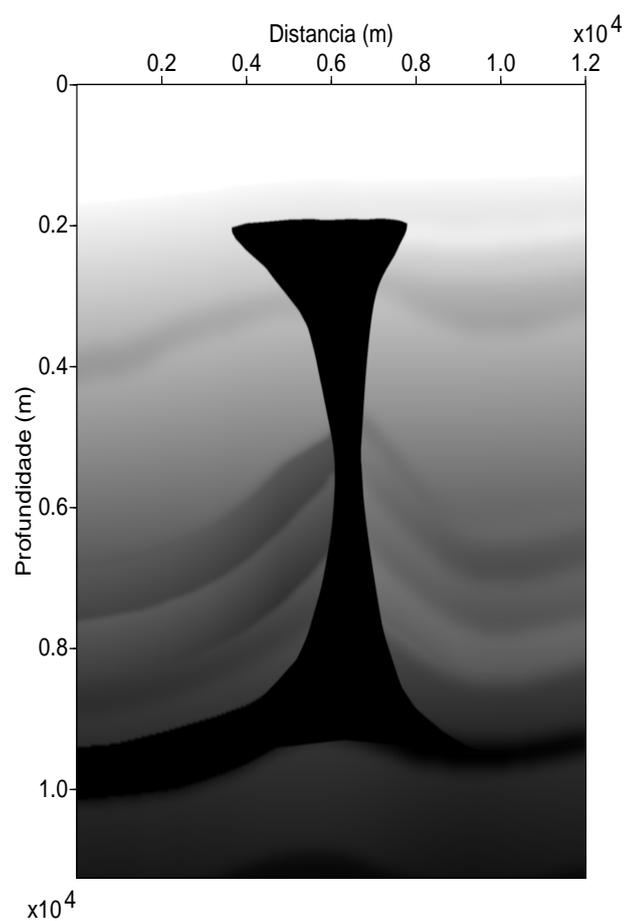


Figura 4.9: Campo de velocidades do modelo sintético do diápiro.

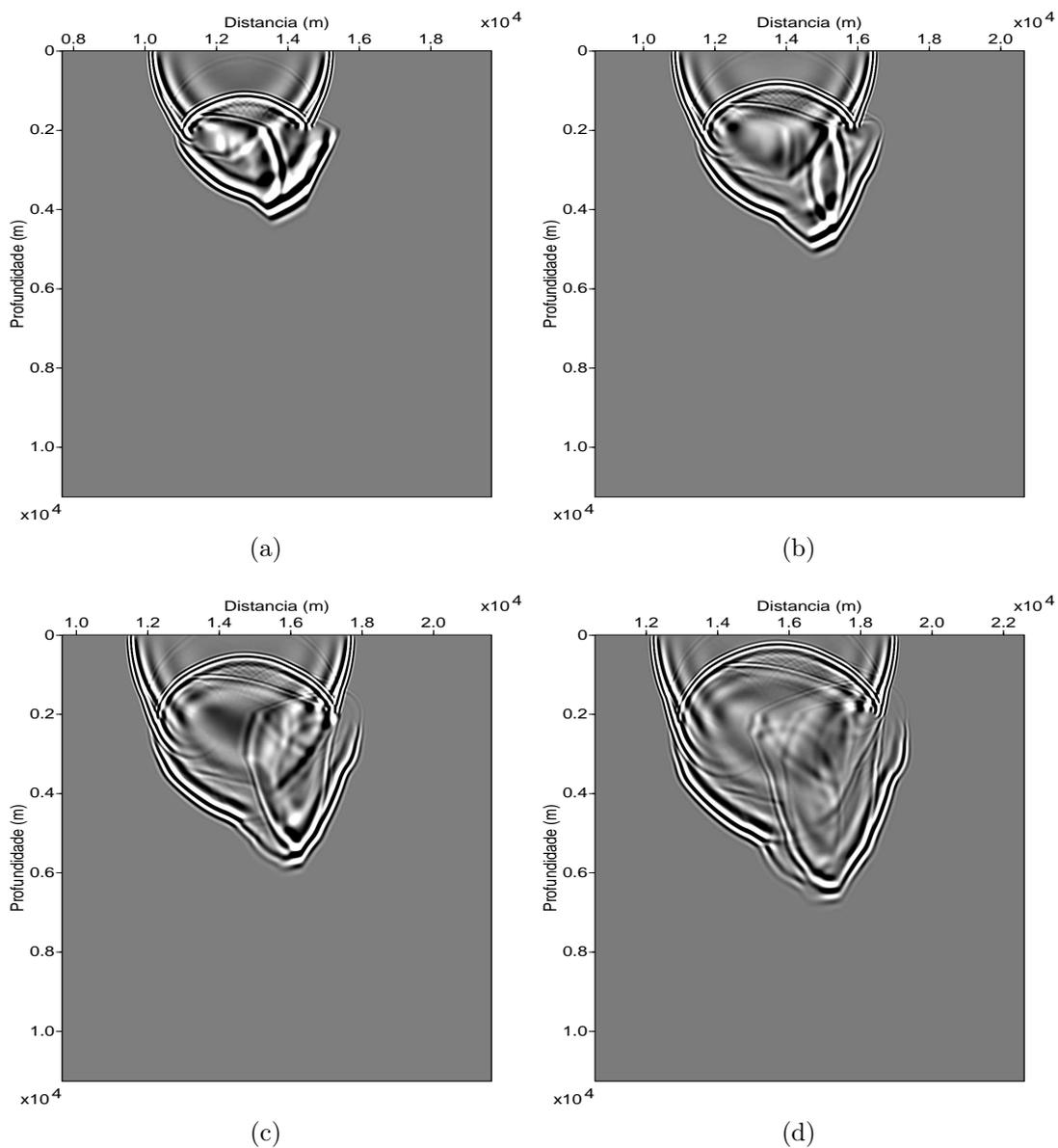


Figura 4.10: Snapshots gerados a partir do modelo sintético do diápiro nos tempos 1.6 s (a), 1.8 s (b), 2 s (c) 2.2 s (d) com intervalo de amostragem de 2ms, frequência máxima de 25 Hz e posição da fonte $x_s = 7500m$ e $z_s = 125m$.

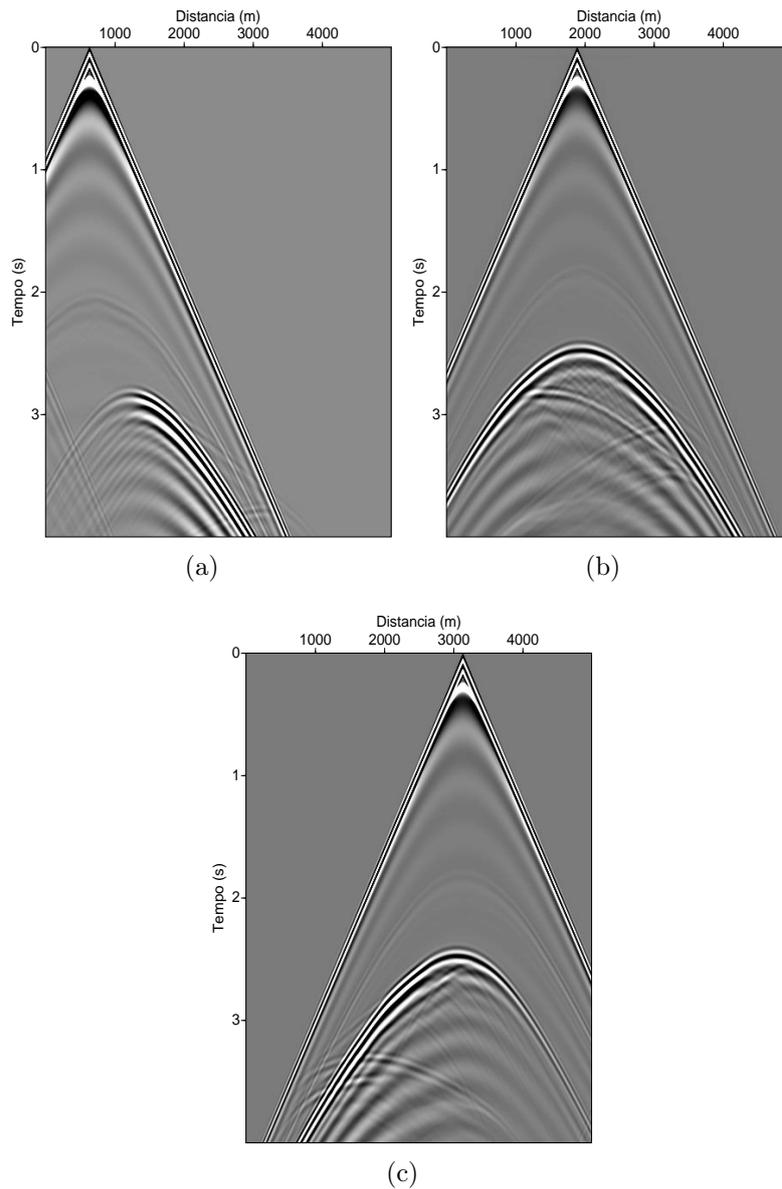


Figura 4.11: Sismograma gerados na modelagem do dado sintético do diápiro com passo no tempo de 2ms, com fonte localizada em $x_s = 2500m$ (a), $x_s = 5000m$ (b) e $x_s = 7500m$ (c) e $z_s = 125m$, frequência máxima de 25 Hz e registrado na profundidade de 125 m .

Analisando a evolução no tempo do campo de onda podemos perceber sua expansão. O sismograma gerado mostra claramente a primeira reflexão e sua múltipla, com um pouco de dispersão. Tanto os snapshots quanto o sismograma gerado pela modelagem sísmica mostram a estabilidade do método. Como foi dito anteriormente, o corpo de sal age como dispersor do sinal dificultando o imageamento.

4.2 Resultados da migração

4.2.1 Modelo do domo de sal - SEG-EAGE

Apesar de requer uma alta demanda computacional, a RTM permite migrar refletores com qualquer inclinação pelo fato de utilizar a equação da onda acústica. Esta característica, aliada à propagação inversa ao longo do tempo, em vez de profundidade, torna possível tratar de forma adequada eventos complexos como as ondas prismáticas e as reflexões geradas por ondas mergulhantes ascendentes, em interfaces caracterizadas por ângulo de mergulho maior do que 90 graus (Whitmore (1983), McMechan (1983) e Baysal et al.(1983)). Essas características justificam a eficiência do método em áreas com geologia complexa, a exemplo daquelas afetadas por tectônica salífera.

Nosso objetivo é avaliar o comportamento do método REM com os polinômios de Laguerre no posicionamento correto dos eventos sísmicos na seção migrada mediante marcha reversa no tempo. Este modelo servirá como dado de entrada para a RTM. Utilizou-se o dado sintético SEG-EAGE, o qual representa uma estrutura geológica salífera com um forte contraste de velocidade com o meio no qual está inserido, com vários refletores e falhas com forte mergulho, tanto acima como abaixo do corpo de sal. O corpo de sal atua como um dispersor do sinal sísmico. As porções do modelo que merecem especial atenção na avaliação dos métodos de migração são: os contornos do corpo de sal, as falhas subverticais abaixo do corpo salino, a estruturas anticlinais e o refletor horizontal localizado a 3.8kms de profundidade. Todas essas feições são de difícil imageamento, por estarem situadas abaixo do corpo de sal.

Os parâmetros utilizados na migração estão descritos na Tabela 4.4.

Número de amostras na horizontal (n_x)	1290
Número de amostras na vertical(n_z)	300
Espaçamento horizontal (dx)	12.2 m
Espaçamento vertical (dz)	12.2 m
Intervalo de amostragem	0,002 s
Número de amostras no tempo	2504

Tabela 4.4: Parâmetros da migração do dado sintético SEG-EAGE.

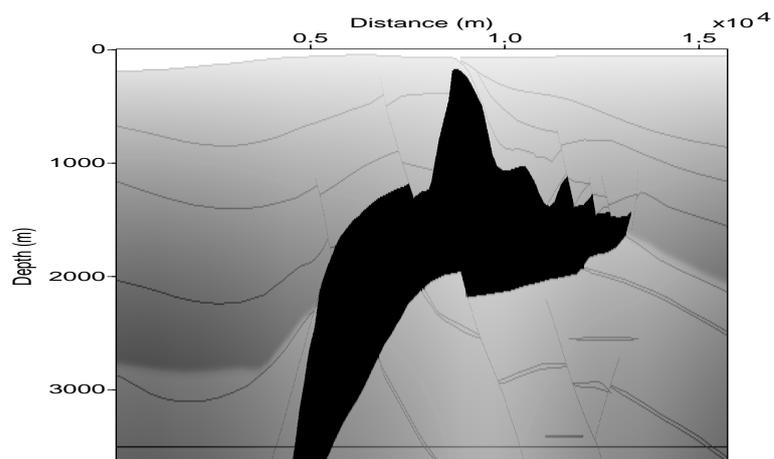


Figura 4.12: Campo de velocidade do dado sintético do domo de sal.

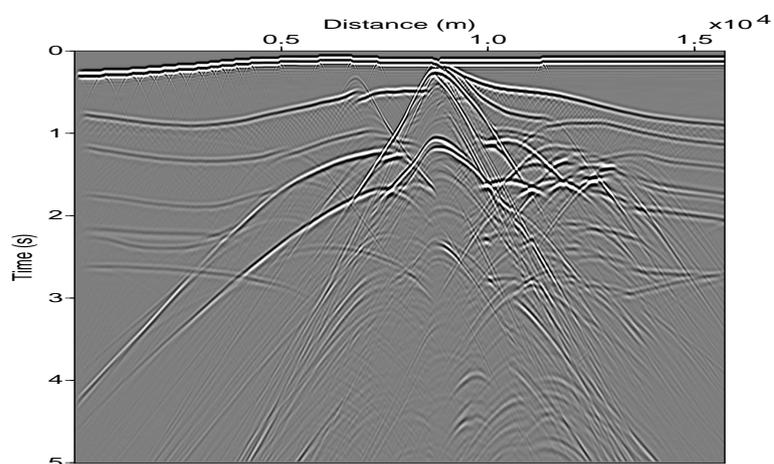


Figura 4.13: Seção de afastamento nulo do dado sintético do domo de sal.

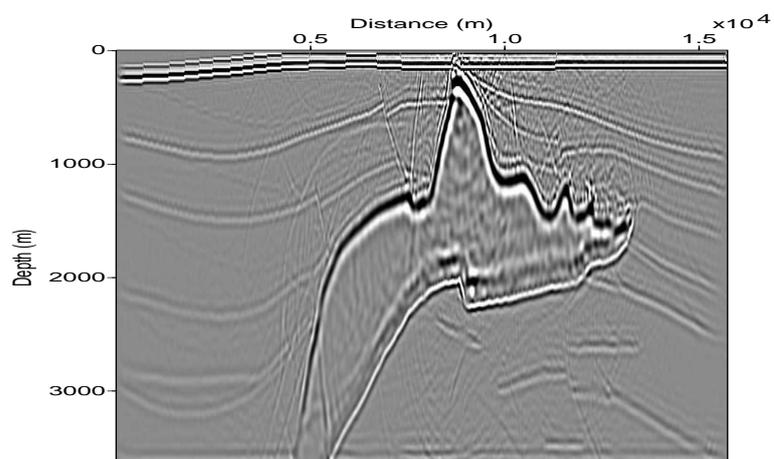


Figura 4.14: Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 5 recursões.

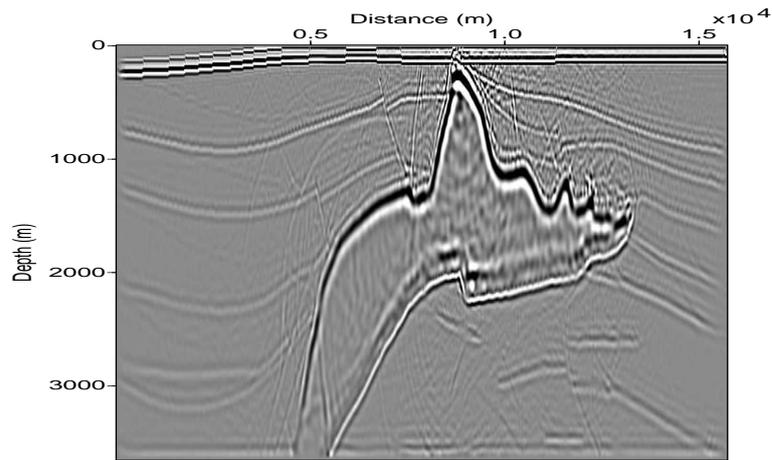


Figura 4.15: Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 10 recursões.

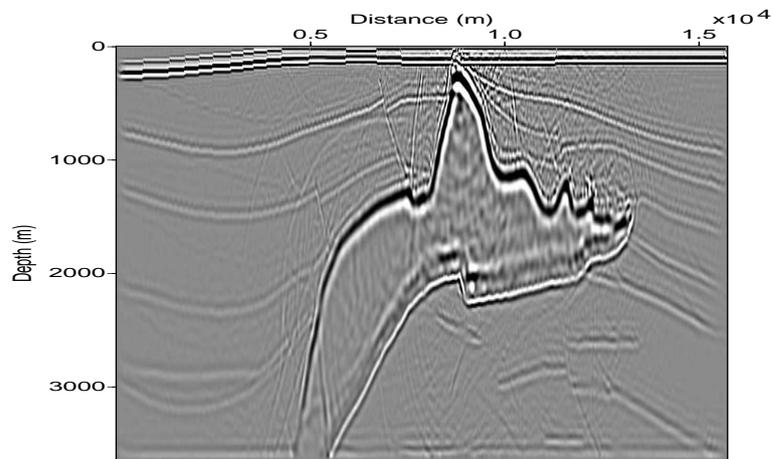


Figura 4.16: Dado sintético do domo de sal migrado utilizando a migração RTM com 15 recursões.

Analisando o dado migrado, podemos considerar que alcançamos um resultado bom no qual as estruturas complexas foram bem identificadas, imageando flanco, topo e base do corpo de sal. Os sinclinais resultantes da deformação causada pelo domo de sal estão bem mapeadas, assim como todo seu contorno e o anticlinal destacado anteriormente. Comparando o dado migrado com o campo de velocidades podemos perceber que a linha horizontal na parte inferior foi muito bem imageada na migração. Nota-se uma certa estabilidade do método e pouca dispersão nos resultados. Utilizamos na migração deste dado cinco, dez e quinze recursões.

A partir dos resultados podemos perceber que a diferença entre eles, para diferentes valores de recursões, é praticamente insignificante, sendo assim, é melhor utilizar, para este dado com intervalo de amostragem de 2 ms, apenas 5 recursões pois tem o menor custo

computacional.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Para validarmos o método aplicamos o REM utilizando os polinômios de Chebyshev, de Hermite e de Laguerre na modelagem sísmica, com o propósito de comparar os resultados obtidos através dos três métodos de expansão. Utilizamos o modelo de duas camadas, modelo relativamente simples, e foi possível perceber que os métodos alcançam resultados semelhantes. A partir daí aplicamos o método com a associação dos polinômios de Laguerre e Hermite para outros modelos mais complexos na modelagem sísmica e na migração RTM.

Os resultados mostram que o REM utilizando os polinômios de Laguerre aqui apresentados atuam bem na reconstituição do modelo em profundidade através da migração por marcha reversa no tempo. Modelos de corpos salíferos foram utilizados para demonstrar que este método se comportam de maneira satisfatória na modelagem de tiros em modelos complexos e com alto contraste de velocidade. Os resultados mostram que o novo método garante uma apresentação adequada dos eventos sísmicos de interesse em um sismograma. Além disso, oferece a possibilidade de comparar os operadores propostos em termos de precisão na aproximação e dispersão numérica associada à propagação do meio.

A expansão polinomial utilizando apenas os polinômios de Hermite quando aplicada no método de expansão rápida (REM) na migração e na modelagem apresentou uma limitação quanto ao número de termos utilizados na recursão, baseado na expansão da equação 3.16. A instabilidade ocorre quando o número de termos assume valores acima de k_{max} .

A fim de solucionar o problema de limitação no número de recursões, no caso aumentar o valor do k_{max} na expansão do cosseno, utilizamos as propriedades dos polinômios de Laguerre associados ao de Hermite, e então conseguimos aumentar o número de recursões, atingindo assim resultados melhores de imageamento. No segundo método, as recursões atingiram números maiores como desejado e mais qualidade no imageamento como visto.

Foi utilizado na expansão de Hermite o parâmetro λ igual à 1, já na expansão de Laguerre utilizamos $\lambda = 8/R$. Esses valores foram determinados de maneira empírica para manter a estabilidade do método. De uma forma geral, para atingirmos resultados estáveis o número

mínimo de termos utilizados devem ser determinados. No caso do Laguerre, estabelecemos o número de recursões também a partir de testes, para específicos parâmetros de modelagem e migração, em especial o intervalo de amostragem no tempo. O aumento no número de recursões, aumenta, conseqüentemente, o custo computacional. O método de expansão rápida aplicado na migração reversa no tempo tem um alto custo computacional e uma boa qualidade de imageamento de estruturas complexas como vimos, então o ideal é utilizarmos um número de recursões suficientes para a geração de uma boa imagem.

Como trabalho futuro, sugerimos um maior aprofundamento do método a fim de determinar de forma automática o número de termos para realizar modelagem e migração. Isso poderia ser feito a partir da análise do comportamento dos coeficientes de Laguerre.

Referências Bibliográficas

- Alford, R. M.; Kelly, K. R.; Boore, D.M. (1974) Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic equation. *Geophysics*, 39:834-842.
- Araujo, E. S. (2009) Análise dos métodos de diferenças finitas e expansão rápida na migração reversa no tempo.
- Baysal, E.; Kosloff, D.; Sherwood, J. (1983) Reverse time migration. *Geophysics*.
- Claerbout, J. F. (1976) *Fundamentals of geophysics data processing*.
- Costa, M. S. (1997) Migração de dados sísmicos 2-D ordenados em afastamento comum. Dissertação de mestrado em Geofísica, PPPG/UFBA.
- Faria, E. L. (1986) Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geofísica/UFBA.
- Fernandes, R. A. R. (1998) Modelagem e migração para meios anisotrópicos utilizando a equação acústica completa da onda. Dissertação de mestrado, UFBA.
- Figueiredo, N. D. C. (2009) Modelagem e migração de dados sísmicos utilizando operadores diferenciais explícitos e implícitos.
- Hagedoorn, J. G. (1954) A process of seismic reflection interpretation, *Geoph. Prosp.*, 2:961-980.
- Hatton, L.; Worthington, M. H.; Makin, J. (1994) *Seismic data processing - theory and practice*, Oxford.
- Hu, X.; Ho, T.; Rabitz, H. (1998) Solving the bound-state Schrodinger equation by reproducing kernel interpolation. *The American Physical Society*.
- Hu, X. (1998) Laguerre scheme: Another member for propagating the time-dependent Schrodinger equation. *The American Physical Society*.

- Kosloff, D.; Baysal, E. (1982) Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics*, 47:1402-1412.
- Kosloff D, Filho AQ, Tessmer E Behle A. (1989) Numerical solution of the acoustic and elastic wave equation by new rapid expansion method. *Geoph. Prosp.*, 37:383-394
- Kosloff, D. e Kessler, D. (1990) *Seismic numerical modeling*, cap. 6, Elsevier Science Publishers.
- Levin, S. (1984) Principle of reverse-time migration. *Geophysics*, 49:581-583.
- Loewenthal, D., LU, L., Roberson, R. Sherwood, J. W. C. (1976) The wave equation applied to migration. *Geophysical Prospecting*, 24: 380-399.
- Ma, H. R.; Jing, J. (2007) *Polynomial scheme for time evolution of open and closed quantum systems*. The American Physical Society.
- McMechan, G. A. K CHEN, H. W. (1990) Implicit static corrections in prestack migration of common-source data. *Geophysics*, 55: 757-760.
- Mitchell Ar. (1969) *Computational Methods in Partial Differential Equations*. John Wiley and Sons, London.
- Nussenzveig, H. M. (2002) *Curso de física básica*, 4ed.
- Pestana, R. C. and Stoffa, P. L. (2010) Time evolution of the wave equation using rapid expansion method. *Geophysics*, vol.75, n 4.
- Queiroz, N. P. (1998) *Migração 3D no tempo usando a teoria dos raios paraxiais*.
- Rosa, A. L. R. (2010) *Análise do sinal sísmico*. Sociedade Brasileira de Geofísica (SBGf), Rio de Janeiro.
- Tal-Ezer, H.; Kosloff, D.; Koren, Z. (1987) An accurate scheme for seismic forward modeling. *Geophysical Prospecting*, 35: 479-490.
- Tal-Ezer H. (1986) Spectral methods in time for hyperbolic problems. Society of Industrial and Applied Mathematics. *Journal on Numerical Analysis*, 23: 11-20

Whitmore, D. N. (1983) Iterative depth imaging by back time propagation, 53rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, p. 382-385.

Yilmaz, Ö. (2001) Seismic data analysis, vol. 1. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.