UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA MULTI-FREQÜÊNCIA DE UM MODELO ESFÉRICO CONDUTOR E PERMEÁVEL NO INTERVALO DA APROXIMAÇÃO QUASE-ESTÁTICA

EDUARDO NAOMITSU AGAPITO URASAKI

SALVADOR – BAHIA

AGOSTO – 2007

Indução eletromagnética multi-freqüência de um modelo esférico condutor e permeável no intervalo da aproximação quase-estática

por

Eduardo Naomitsu Agapito Urasaki

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Departamento de Geologia e Geofísica Aplicada

do

Instituto de Geociências

da

Universidade Federal da Bahia

Comissão Examinadora

Dr. Hédison Kiuity Sato - Orientador

Dra. Jacira Cristina Batista de Freitas

Dr. Olivar Antonio Lima de Lima

Data da aprovação: 09/ 08/2007

"Não prever, é já lamentar."

Leonardo da Vinci
(1452–1519)

RESUMO

Foi descrito minuciosamente todos os procedimentos que culminaram na construção de um programa de computador para o cálculo da resposta eletromagnética de uma esfera condutora e permeável inserida num meio infinitamente resistivo sob a ação de um dipolo magnético oscilante no intervalo da aproximação quase-estática para até 60 multipolos e *parâmetro resposta* de 10^{-300} a 10^{300} ordens de grandeza com desvio médio relativo de $\pm 10^{-15}$. O modelo de uma esfera condutora e permeável, que representa um corpo mineralizado maciço, foi analisado qualitativamente, no domínio da freqüência, para os efeitos da variação: (i) das propriedades do corpo (raio, condutividade elétrica e permeabilidade magnética), na *função resposta*; e (ii) dos parâmetros da aquisição (espaçamento transmissor-receptor e distância vertical ao centro da esfera), na impedância mútua e elipse de polarização para os arranjos mais comumente utilizados na geofísica de prospecção. A análise da impedância mútua para três modelos sintéticos permitiu observar que: (i) os arranjos *HCP* (*horizontal coplanar*), *VCA* (*vertical coaxial*) e *VCP* (*vertical coplanar*) possuem perfis simétricos em relação ao centro da esfera, sendo este último sempre positivo, enquanto que *PAR* (*parallel*) e *PERP* (*perpendicular*), apesar de não terem acoplamento com o campo primário, possuem anomalias mais complexas, dificultando sua interpretação; (ii) maior afastamento entre transmissor e receptor reduz a intensidade do campo primário no receptor, aumenta a magnitude da resposta, e altera a forma da anomalia; e (iii) o aumento da freqüência modifica a magnitude da resposta: a parte em fase tende aumentar, enquanto que a em quadratura continua dependente dos parâmetros do corpo e da aquisição. A avaliação qualitativa da elipse de polarização, para os mesmos modelos utilizados na impedância mútua, indicam que: (i) a elipse tende a se colapsar numa reta (a elipticidade é menor que 10^{-3}); (ii) o *tilt angle* varia com pequena amplitude em torno da direção do campo primário na posição do receptor; e (iii) a freqüência altera a magnitude da resposta, de forma que a elipticidade segue o padrão de comportamento da parte em quadratura da impedância mútua, enquanto que o *tilt angle* segue o da parte em fase.

ABSTRACT

It was described all the procedures that culminated in the construction of a computer program to calculate the electromagnetic responses of a conducting permeable sphere embedded in a resistivity medium under the action of an oscilating magnetic dipole, up to 60 multipoles and the, *response parameter* ranging 10^{-300} to 10^{300} orders of magnitude, with relative mean deviation of 10^{-15}. The model of a conducting and permeable sphere, that may represents a massive mineralized body, was analyzed qualitatively in the frequency domain for the effect of the variation of: (i) the properties of the body (radius, electric conductivity and magnetic permeability), in the *response function*; and (ii) the parameters of the acquisition (coil separation and depth to center of sphere), in the mutual impedance and ellipse polarization, for usual arrangements in the geophysical EM prospecting. The analysis of the mutual impedance for three synthetic models allowed to observe: (i) the arrangements *HCP* (horizontal coplanar), *VCA* (vertical coaxial) and *VCP* (vertical coplanar) always possess symmetrical profiles in relation to the center of the sphere, being this last entirely positive, while *PAR* (parallel) and *PERP* (perpendicular), although not having coupling with the primary field, produce complex anomalies, more difficult to interpret; (ii) larger separation between transmitter and receiver reduces the intensity of the primary field in the receiver, increases the magnitude of the response, and modifies the shape of the anomaly; and (iii) increasing the frequency modifies the magnitude of the response: the in-phase part increases, while the quadrature part depends on the parameters of the body and the acquisition. The qualitative evaluation of the polarization ellipse, for the same models used in the mutual impedance, indicates that: (i) the polarization ellipses are, in general, almost collapsed to a straight line (ellipticity less than 10^{-3}); (ii) the tilt angle shows small deviations around the primary field direction at the receiver position; and (iii) the frequency modify the magnitude of the response, such that the ellipticity follows the behaviour of the quadrature part of the mutual impedance, while that tilt angle the behaviour of the in-phase part.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

O método eletromagnético tem sido intensivamente utilizado na prospecção geofísica como um meio eficaz para a exploração e detecção de corpos geológicos que exibem acentuado contraste de condutividade com o meio em que estão inseridos, existindo atualmente considerável quantidade de sistemas e métodos disponíveis. Não tão recente, foram introduzidos os sistemas que operam a multi-freqüência.

O procedimento mais freqüente na interpretação de anomalias eletromagnéticas de modelos geológicos simplificados é pelo método indireto a partir da comparação com curvas geradas teoricamente ou por inversão numérica. Para situações geológicas mais complexas, a interpretação geralmente é realizada através da comparação dos dados reais com os gerados por modelos reduzidos em laboratório, que normalmente simulam apenas grosseiramente o meio geológico, ou através de técnicas computacionais, usando diferenças finitas ou elementos finitos.

Nestes casos são obtidas respostas eletromagnéticas de modelos idealizados. Não obstante, o estudo teórico da resposta eletromagnética de diversos modelos pode evidenciar fenômenos do eletromagnetismo que venham a fornecer base para o desenvolvimento de novas variantes do método eletromagnético de campo artificial, como também dar maiores subsídios para a interpretação de anomalias (Guedes, 1979).

A resposta eletromagnética de corpos condutores com simetria esférica tem sido do constante interesse dos geofísicos, devido às suas possíveis aplicações na prospecção de corpos mineralizados maciços — de grande interesse econômico — e por constituir a geometria de dimensões finitas mais simples.

O modelo analítico de uma esfera condutora e homogênea demonstrou sua utilidade como elemento guia na interpretação de resultados experimentais de prospecção eletromagnética. Este modelo tem sido investigado no espaço livre (Wait e Spies, 1969; Nabighian, 1970; Lodha e West, 1976; Best e Shammas, 1979), contendo camadas esféricas (Guedes, 1979; Fuller, 1971; Nabighian, 1971) ou inserida num meio condutivo (Singh, 1973).

É neste contexto que verificou-se a importância de representar computacionalmente o modelo de uma esfera condutora e permeável situada num meio infinitamente resistivo sob a ação de um dipolo magnético oscilante no intervalo da aproximação quase-estática, obtendo a resposta eletromagnética, que controla o comportamento do campo magnético secundário na região exterior à esfera.

O desenvolvimento desse programa permitiu o estudo em multi-freqüência para os efeitos da variação: (i) das propriedades do corpo (raio, condutividade elétrica e permeabilidade magnética), na *função resposta*; e (ii) dos parâmetros da aquisição (espaçamento transmissor-receptor e distância vertical ao centro da esfera), na impedância mútua e elipse de polarização para os arranjos mais comumente utilizados na geofísica de prospecção.

Por ser um programa de fácil manuseio e livre distribuição, serve tanto como material didático para as disciplinas de geofísica correlatas, como também ferramenta de modelagem e interpretação de dados na execução de trabalhos de pesquisa.

CAPÍTULO 1

Fundamentos do Eletromagnetismo

1.1 Breve Histórico

A observação foi a precursora da ciência do eletromagnetismo. Na Grécia antiga, Tales de Mileto[1] realizou algumas análises elementares sobre eletrização ao friccionar o âmbar[2] com uma pele de animal, o qual adquiria o poder de atrair pequenos objetos próximos, como grãos de poeira. Além disso, Tales também relata as propriedades de atração e repulsão entre pedaços de uma "pedra", atualmente denominada de magnetita[3], cujo nome deriva provavelmente da região de origem do material — Magnésia — na Ásia Menor, atual Turquia.

Foram essas as modestas origens da eletricidade e do magnetismo. Estas duas ciências desenvolveram-se independentemente uma da outra durante séculos, até 1820, quando Hans Christian Ørsted[4] descobriu uma conexão entre elas: uma corrente elétrica percorrendo um fio ocasionava a deflexão da agulha imantada de uma bússola. Curiosamente, Ørsted fez esta descoberta enquanto preparava uma aula de laboratório para seus alunos de física.

A nova ciência do eletromagnetismo foi, posteriormente, desenvolvida por muitos pesquisadores em diversos países. Um dos mais importantes foi Michael Faraday[5] que descobriu a indução eletromagnética em 1831. Na metade do século XIX, James Clerk Maxwell[6] deu forma matemática às idéias de Faraday, introduzindo muitas idéias próprias e estabeleceu as

[1]Filósofo, matemático e astrônomo grego, de ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 624/625 a.C. e faleceu em 556/558 a.C..

[2]Resina fóssil, proveniente de uma espécie extinta de pinheiro do período terciário, sólida, amarelo-pálida ou acastanhada, transparente ou opaca, utilizada na fabricação de vários objetos. O termo elétron é derivado do grego *élektron*, que significa âmbar-amarelo.

[3]Minério de ferro. Mineral isométrico, (Fe,Mg)Fe_2O_4 com propriedades: cor preta, dureza 5,5, densidade 5,2, brilho metálico, fortemente magnético.

[4]Físico e químico dinamarquês (1777–1851). Foi também inventor do piezômetro (instrumento para medir a compressibilidade de líquidos em pressões elevadas), e na química, conseguiu isolar o alumínio e preparar o cloreto de alumínio.

[5]Físico, químico e filósofo britânico (1791–1867). É considerado o maior físico experimental de todos os tempos, tendo centenas de publicações sem utilizar sequer uma única equação matemática.

[6]Físico escocês (1831–1879). Além dos seus trabalhos em eletromagnetismo, provou que os anéis de Saturno tinham de ser constituídos de miríades de pequenas luas, e fez importantes contribuições à termodinâmica e à mecânica estatística.

bases teóricas do eletromagnetismo, as denominadas *equações de Maxwell*.

As equações de Maxwell desempenham, no eletromagnetismo, o mesmo papel que as leis do movimento de Newton[7] na mecânica clássica e as leis da termodinâmica no estudo do calor.

A grande descoberta de Maxwell foi que a luz é uma onda eletromagnética e que, portanto, sua velocidade escalar pode ser determinada efetuando-se medidas puramente elétricas e magnéticas. Com esta descoberta, Maxwell relacionou a antiga ciência da ótica com a eletricidade e o magnetismo. Heinrich Rudolf Hertz[8] deu outro grande passo à frente produzindo o fenômeno eletromagnético denominado por ele de "ondas maxwellianas", as ondas curtas de rádio. Atualmente, as equações de Maxwell são utilizadas no mundo inteiro, na solução de diversos problemas práticos de engenharia, física, geofísica, dentre outros.

1.2 Equações de Maxwell

Os fenômenos eletromagnéticos são governados pelas equações empíricas de Maxwell. Elas encontram-se desacopladas em equações diferenciais lineares de primeira ordem, porém podem ser acopladas pelas relações empíricas constitutivas, onde o número dos campos vetoriais se reduz de cinco para dois (Ward e Hohmann, 1988).

Essas relações devem ser escolhidas de forma adequada com as características do objeto de estudo, como os materiais terrestres no caso da geofísica; sendo, na maioria das aplicações, selecionadas de forma que representem regiões isotrópicas, homogêneas, lineares e independentes de temperatura, pressão e tempo (Sato, 2002).

1.2.1 Equações de Maxwell no Domínio do Tempo

Grant e West (1965) evidencia que são cinco os vetores necessários para se determinar os campos elétrico e magnético dentro de uma região. Os vetores **e**, **b**, **h** e **d** descrevem o campo eletromagnético e o **j**, o movimento de cargas livres. A descrição desses vetores encontra-se na tabela 1.1.

[7] Isaac Newton (1643–1727). Físico, matemático e astrônomo britânico. Dentre suas contribuições constam o Cálculo Diferencial e Integral, escoamento em canais, velocidade de ondas superficiais e deslocamento do som no ar. Também escreveu sobre química, alquimia, cronologia e teologia.

[8] Físico alemão (1857–1894). Também demonstrou a refração, reflexão e a polarização das ondas eletromagnéticas.

Esses cinco vetores relacionam-se, em parte, através das equações de Maxwell:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} && \text{Lei de Faraday} \\
\nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} && \text{Lei de Ampère–Maxwell} \\
\nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 && \text{Ausência de monopolos magnéticos} \\
\nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho && \text{Lei de Coulomb}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Símbolo	Descrição	Unidade
$\mathbf{e}$	Vetor campo elétrico	$\mathrm{V\,m^{-1}}$
$\mathbf{b}$	Vetor indução magnética	$\mathrm{Wb\,m^{-2}}$ ou T
$\mathbf{h}$	Vetor campo magnético	$\mathrm{A\,m^{-1}}$
$\mathbf{d}$	Vetor deslocamento elétrico	$\mathrm{C\,m^{-2}}$
$\mathbf{j}$	Vetor densidade de corrente elétrica	$\mathrm{A\,m^{-2}}$
ρ	Densidade de carga elétrica	$\mathrm{C\,m^{-3}}$

Tabela 1.1: Descrição das grandezas eletromagnéticas das equações de Maxwell.

1.2.2 Relações Constitutivas

Harrington (1961) mostra que um meio é linear no sentido geral quando as relações constitutivas seguem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} &= \varepsilon \mathbf{e} + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} + \cdots \\
\mathbf{j} &= \sigma \mathbf{e} + \sigma_1 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} + \cdots \\
\mathbf{b} &= \mu \mathbf{h} + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

cujas descrições encontram-se na tabela 1.2 e seus valores no vácuo na tabela 1.3.

Parâmetro	Descrição
ε	Permissividade elétrica
σ	Condutividade elétrica
μ	Permeabilidade magnética

Tabela 1.2: Descrição das relações constitutivas ε, σ e μ.

Normalmente na literatura (Grant e West, 1965; Sampaio, 2006) as relações constitutivas são dadas na forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} &= \varepsilon \mathbf{e} & & & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\
\mathbf{j} &= \sigma \mathbf{e} & &\text{ou} & \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \\
\mathbf{b} &= \mu \mathbf{h} & & & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Parâmetro	Valor
ε_0	$8,854 \times 10^{-12}$ F m^{-1}
σ_0	nulo
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1}

Tabela 1.3: Valor das relações constitutivas ε, σ e μ no vácuo.

Estas equações descrevem o comportamento coletivo peculiar dos átomos em resposta ao estímulo do campo aplicado.

Verifica-se uma maior complexidade no tratamento matemático das equações 1.2 do que com as equações 1.3 quando embutidas nas equações de Maxwell (equações 1.1).

1.2.3 Equações de Maxwell no Domínio da Freqüência

Por Ward e Hohmann (1988) o par de transformadas de Fourier é:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \tag{1.4}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \tag{1.5}$$

Aplicando a transformada de Fourier definida em 1.4 nas equações 1.1, e utilizando as relações constitutivas dadas nas equações 1.3, obtemos as equações de Maxwell no domínio da freqüência:

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = 0 \tag{1.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - (\sigma + i\varepsilon\omega)\mathbf{E} = 0 \tag{1.7}$$

Na equação 1.7, o termo $\sigma\mathbf{E}$ representa a corrente de condução e $i\varepsilon\omega\mathbf{E}$ a corrente de deslocamento devido à variação temporal do campo elétrico.

De acordo com Harrington (1961), pode-se introduzir os termos que representam a impeditividade $\widehat{z} = i\mu\omega$ e a admitividade $\widehat{y} = \sigma + i\varepsilon\omega$ nas equações de Maxwell, onde $\kappa^2 = -\widehat{z}\,\widehat{y}$.

O termo κ^2 é denominado número de onda e possui dimensão m^{-1},

$$\kappa^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma \tag{1.8}$$

Para o caso quase-estático, a corrente de deslocamento é muito menor que a de condução para materiais da terra com freqüência abaixo de 10^5 Hz e, nestas condições, o número de onda é dado por (Ward e Hohmann, 1988):

$$\kappa = (-i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

1.3 Impedância Mútua

De acordo com Grant e West (1965), a impedância mútua é um conceito bastante utilizado para descrever a interação à distância entre circuitos elétricos devido à indução eletromagnética. E, dessa forma, na exploração eletromagnética induzida em que transmissor e receptor são bobinas simples, existe a preocupação com a interação entre elas.

A impedância mútua é então tratada por Grant e West (1965) considerando que o transmissor e o receptor são simples bobinas de pequena seção transversal, mantidas fixas suas posições e orientações uma em relação à outra. Assim, a *fem* induzida no receptor é proporcional à taxa de variação temporal da corrente no transmissor, e a constante de proporcionalidade se denomina de coeficiente de impedância mútua.

Wait (1955) introduziu em termos práticos a razão Z/Z_0 como sendo a forma da impedância mútua, onde Z é a impedância de uma pequena bobina situada na superfície da terra e, Z_0 é a impedância mútua desta mesma bobina embutida em um semi-espaço. Esta razão é obtida pela divisão entre o campo magnético total na bobina receptora e o campo magnético primário medido no espaço livre.

CAPÍTULO 2

Campo Magnético Espalhado por uma Esfera Condutora e Permeável em um Meio Resistivo sob a Ação de um Campo Dipolar na Aproximação Quase-Estática

2.1 Significado Geofísico do Modelo

A situação de um corpo aproximadamente esférico, situado na subsuperfície terrestre e excitado por um campo eletromagnético gerado por uma fonte de dimensões finitas, implica num problema teórico de solução extremamente difícil. Pode-se, entretanto, fazer idealizações de modo a simplificar este modelo, acarretando na redução a um problema semelhante, mas de tratamento teórico muito mais simples, além de permitir o estudo do comportamento do sistema originalmente proposto. Neste sentido, convém considerar as seguintes hipóteses simplificativas dentro dessa concepção (Guedes, 1979):

1. Se a condutividade do semi-espaço que envolve o corpo for bem menor do que a do corpo, o efeito do semi-espaço poderá ser desprezado, e o sistema pode ser simplificado por um modelo de um espaço infinitamente resistivo envolvendo o corpo;

2. Se o corpo for de dimensões pouco diferentes nas três dimensões, pode ser descrito pelo modelo de um corpo esférico;

3. Na faixa das áudio[1] e sub-áudio[2] freqüências e usando distâncias de separação entre transmissor e receptor não superiores a 1 km, pode-se tratar a situação real dentro do limite de validade da aproximação quase-estática (Grant e West, 1965);

4. Operando com distâncias de transmissor–receptor sempre superiores a dez vezes o raio da bobina do transmissor, a fonte de dimensões finitas pode ser aproximada por um dipolo magnético oscilante.

[1]VLF — *Very Low Frequency*: 3–30 kHz.
[2]ELF — *Extra Low Frequency*: 3–3000 Hz.

2.2 Formulação Física–Matemática

2.2.1 Impedância Mútua

Para o cálculo da impedância mútua, iremos, inicialmente, avaliar o campo secundário.

Grant e West (1965) apresenta a solução quase-estática para o campo magnético gerado por um dipolo magnético oscilante, com dependência temporal $e^{i\omega t}$, espalhada por uma esfera condutora em um espaço infinitamente resistivo.

Esses autores mostram que o campo magnético secundário, em coordenadas esféricas, para o caso do dipolo radial m_r, tem seus componentes dados por:

$$\begin{aligned}
H_r^S(m_r) &= -\frac{m_r}{4\pi}\, e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + iY_n)\, \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}}\, n(n+1)\, P_n(\cos(\theta))}_{\text{soma_radial_}H_r^S} \\
H_\theta^S(m_r) &= -\frac{m_r}{4\pi}\, e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + iY_n)\, \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}}\, n\, P_n^1(\cos(\theta))}_{\text{soma_radial_}H_\theta^S} \\
H_\phi^S(m_r) &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

no caso do dipolo transversal m_θ:

$$\begin{aligned}
H_r^S(m_\theta) &= \frac{m_\theta}{4\pi}\, e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + iY_n)\, \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}}\, n\, P_n^1(\cos(\theta))}_{\text{soma_transv_}H_r^S = \text{ soma_radial_}H_\theta^S} \\
H_\theta^S(m_\theta) &= -\frac{m_\theta}{4\pi}\, e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + iY_n)\, \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}} \left[n^2\, P_n(\cos(\theta)) - \frac{n}{n+1}\, \cot(\theta)\, P_n^1(\cos(\theta)) \right]}_{\text{soma_transv_}H_\theta^S} \\
H_\phi^S(m_\theta) &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

e para o dipolo transversal m_ϕ:

$$\begin{aligned}
H_r^S(m_\phi) &= H_\theta^S(m_\phi) = 0 \\
H_\phi^S(m_\phi) &= -\frac{m_\phi}{4\pi}\, e^{i\omega t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + iY_n)\, \frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}} \left[\frac{n}{n+1}\, \csc(\theta)\, P_n^1(\cos(\theta)) \right]}_{\text{soma_transv_}H_\phi^S}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde:

$$
\begin{aligned}
H_r^S,\ H_\theta^S,\ H_\phi^S &= \text{componentes } r,\ \theta \text{ e } \phi \text{ do campo secundário;}\\
m_r,\ m_\theta,\ m_\phi &= \text{componentes radial e transversais do momento magnético do dipolo indutor } (m_{Tx});\\
r_0 &= \text{posição do dipolo indutor } (Tx);\\
r &= \text{posição do receptor } (Rx);\\
\theta &= \text{ângulo entre } r \text{ e } r_0;\\
a &= \text{raio da esfera;}\\
n &= \text{ordem do multipolo}^3;\\
P_n(\cos(\theta)) &= \text{polinômio de Legendre de grau } n \text{ e ordem 0;}\\
P_n^1(\cos(\theta)) &= \text{polinômio associado de Legendre de grau } n \text{ e ordem 1.}
\end{aligned}
$$

O termo $(X_n + iY_n)$ é denominado de *função resposta*, sendo expresso por:

$$
(X_n + iY_n) = \frac{\left[\mu_0/2 - (n+1)\mu\right] I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a) + \mu_0 \kappa a I'_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{\left(\mu_0/2 + n\mu\right) I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a) + \mu_0 \kappa a I'_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)} \tag{2.4}
$$

tal que:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \text{permeabilidade magnética da esfera;}\\
\mu_0 &= \text{permeabilidade magnética no vácuo } (= 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}});\\
\kappa^2 &= i\omega\mu\sigma;\\
i &= \sqrt{-1};\\
\omega &= \text{freqüência angular da corrente no transmissor;}\\
\sigma &= \text{condutividade elétrica da esfera;}\\
|\kappa^2 a^2| &= \omega\mu\sigma a^2 \ (\textit{parâmetro resposta});\\
I_{n+\frac{1}{2}} &= \text{função modificada de Bessel de primeira espécie e ordem } n + \tfrac{1}{2};\\
I'_{n+\frac{1}{2}} &= \text{primeira derivada da função modificada de Bessel de primeira espécie e ordem } n + \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Considerando um levantamento executado na superfície $z = h$ e paralelo ao eixo x, com um dipolo de momento magnético m_{Tx} em qualquer direção, precisamos calcular o campo secundário na posição e no sentido do dipolo receptor (H_{Rx}^S).

Para a situação mostrada na figura 2.1, temos que:

$$
\begin{gathered}
r_0 = \sqrt{x^2 + h^2 + y^2}\,; \quad r = \sqrt{(x+\ell)^2 + h^2 + y^2}\,; \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_0^2 + r^2 - \ell^2}{2\,r r_0}\right);\\
\alpha_{Tx} = \arctan\left(\frac{\sqrt{h^2+y^2}}{|x|}\right); \quad \alpha_{Rx} = \arctan\left(\frac{\sqrt{h^2+y^2}}{|x+\ell|}\right); \quad \beta = \arctan\left(\frac{|y|}{h}\right).
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

[3] Está relacionada à separação dos campos dipolar e não dipolar do campo eletromagnético, tal que esse termo se refere ao potencial gerado por uma fração do corpo idealizado, isto é, se $n = 1$ corresponde ao dipolo; $n = 2$, ao quadrupolo; $n = 3$, ao octupolo, e assim sucessivamente.

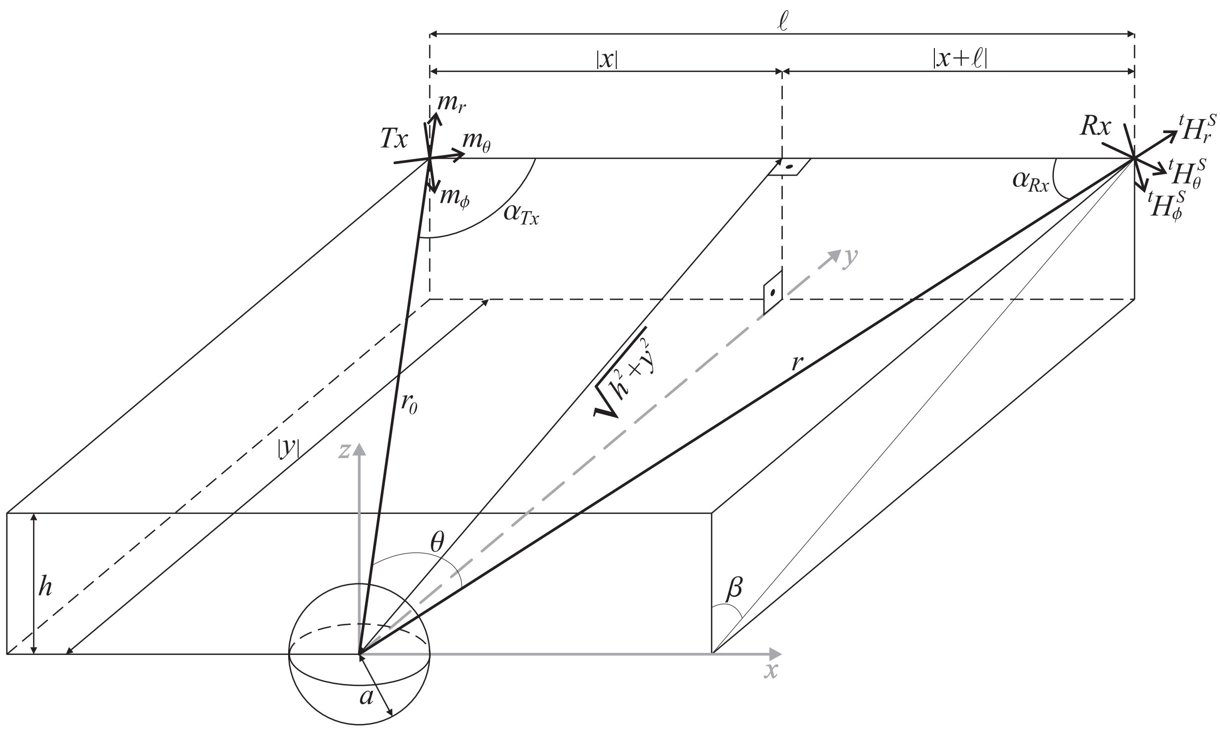


Figura 2.1: Descrição do modelo da esfera com condutividade elétrica σ e permeabilidade magnética μ num meio infinitamente resistivo com permeabilidade magnética μ_0. A relação dos parâmetros geométricos encontra-se na tabela 2.1.

Parâmetro	Descrição
a	Raio da esfera
ℓ	Distância transmissor−receptor
h	Distância vertical (eixo z) do centro da esfera ao plano do levantamento (plano x−y)
y	Distância perpendicular (eixo y) entre a linha do levantamento (eixo x) e a projeção do centro da esfera no plano x−y

Tabela 2.1: Descrição dos parâmetros geométricos do modelo.

E como transmissor e receptor estão, *a priori*, em qualquer direção, então decompondo-se m_{Tx} em m_r, m_θ e m_ϕ podemos utilizar as expressões 2.1 a 2.3 na determinação de H^S_{Rx} através das decomposições de H^S_r, H^S_θ e H^S_ϕ no sentido de Rx.

Assim, inicialmente, iremos decompor m_{Tx} em coordenadas cartesianas a partir dos elementos descritos na figura 2.2:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{Tx}\,\mathrm{sen}\,(\theta_{Tx})\cos(\phi_{Tx}) \\ m_y &= m_{Tx}\,\mathrm{sen}\,(\theta_{Tx})\,\mathrm{sen}\,(\phi_{Tx}) \\ m_z &= m_{Tx}\cos(\theta_{Tx}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

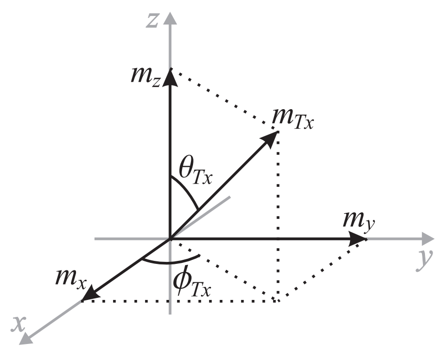


Figura 2.2: Posição espacial do momento magnético do dipolo transmissor e seus componentes cartesianos.

E observando as figuras 2.1 e 2.3 e, utilizando-se dos resultados da equação 2.6, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
m_r &= -m_x \cos(\alpha_{Tx}) + m_y \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) \operatorname{sen}(\beta) + m_z \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) \cos(\beta) \\
m_\theta &= m_x \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) + m_y \cos(\alpha_{Tx}) \operatorname{sen}(\beta) + m_z \cos(\alpha_{Tx}) \cos(\beta)
\end{aligned}\right\} \text{ se } x \leq 0 \\
&\left.\begin{aligned}
m_r &= m_x \cos(\alpha_{Tx}) + m_y \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) \operatorname{sen}(\beta) + m_z \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) \cos(\beta) \\
m_\theta &= m_x \operatorname{sen}(\alpha_{Tx}) - m_y \cos(\alpha_{Tx}) \operatorname{sen}(\beta) - m_z \cos(\alpha_{Tx}) \cos(\beta)
\end{aligned}\right\} \text{ se } x > 0 \\
&m_\phi = m_y \cos(\beta) - m_z \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

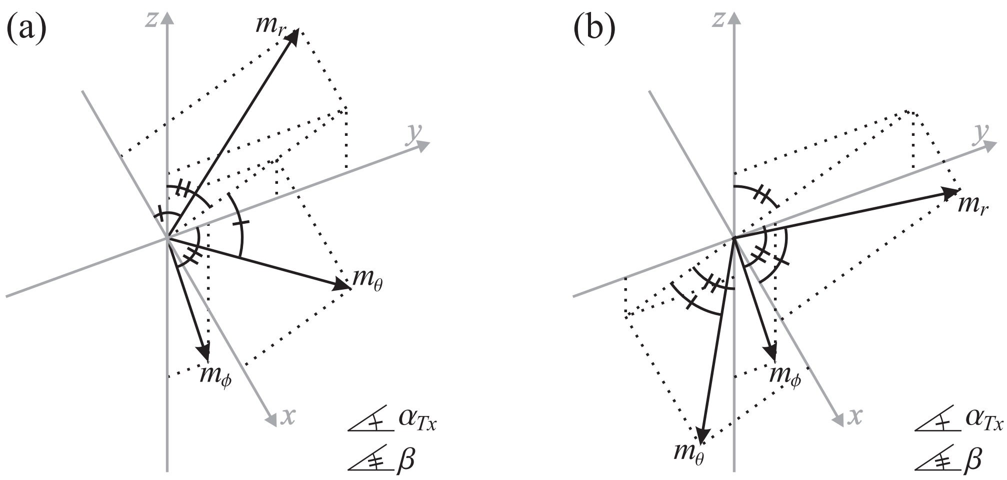


Figura 2.3: Componentes esféricos do momento magnético do transmissor (m_{Tx}). Em (a) para $x \leq 0$ e (b) para $x > 0$.

A superposição de cada componente das equações 2.1 a 2.3 nos fornecem os componentes totais do campo magnético secundário em coordenadas esféricas:

$$
\begin{aligned}
{}^tH_r^S &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi}\left(-m_r \cdot \text{soma\_radial\_}H_r^S + m_\theta \cdot \text{soma\_radial\_}H_\theta^S\right)\\
{}^tH_\theta^S &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi}\left(-m_r \cdot \text{soma\_radial\_}H_\theta^S - m_\theta \cdot \text{soma\_transv\_}H_\theta^S\right)\\
{}^tH_\phi^S &= -\frac{e^{i\omega t}}{4\pi}\, m_\phi \cdot \text{soma\_transv\_}H_\phi^S
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Com o auxílio das figuras 2.1 e 2.4, transformamos o resultado anterior (equação 2.8) em coordenadas cartesianas:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
H_x^S &= -{}^tH_r^S \cos(\alpha_{Rx}) + {}^tH_\theta^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx})\\
H_y^S &= {}^tH_r^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx}) \operatorname{sen}(\beta) + {}^tH_\theta^S \cos(\alpha_{Rx}) \operatorname{sen}(\beta) + {}^tH_\phi^S \cos(\beta)\\
H_z^S &= {}^tH_r^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx}) \cos(\beta) + {}^tH_\theta^S \cos(\alpha_{Rx}) \cos(\beta) - {}^tH_\phi^S \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}\right\} \text{se } x+\ell \le 0\\
&\left.\begin{aligned}
H_x^S &= {}^tH_r^S \cos(\alpha_{Rx}) + {}^tH_\theta^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx})\\
H_y^S &= {}^tH_r^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx}) \operatorname{sen}(\beta) - {}^tH_\theta^S \cos(\alpha_{Rx}) \operatorname{sen}(\beta) + {}^tH_\phi^S \cos(\beta)\\
H_z^S &= {}^tH_r^S \operatorname{sen}(\alpha_{Rx}) \cos(\beta) - {}^tH_\theta^S \cos(\alpha_{Rx}) \cos(\beta) - {}^tH_\phi^S \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}\right\} \text{se } x+\ell > 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

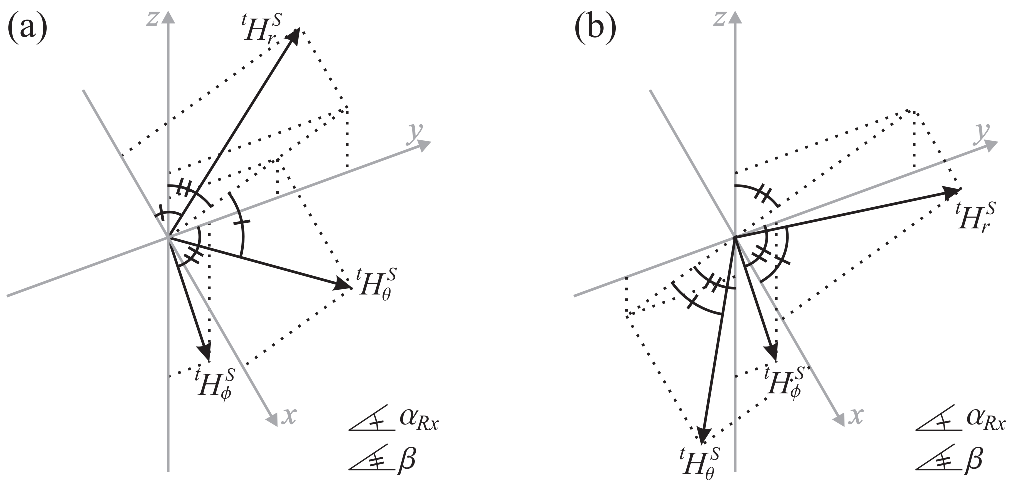


Figura 2.4: Componentes esféricos totais do campo magnético secundário (${}^tH^S$). Em (a) para $x+\ell \le 0$ e (b) para $x+\ell > 0$.

Conseqüentemente, o campo magnético secundário no receptor, com os elementos mostrados na figura 2.5, é da forma:

$$
H_{Rx}^S = H_x^S \operatorname{sen}(\theta_{Rx}) \cos(\phi_{Rx}) + H_y^S \operatorname{sen}(\theta_{Rx}) \operatorname{sen}(\phi_{Rx}) + H_z^S \cos(\theta_{Rx}) \tag{2.10}
$$

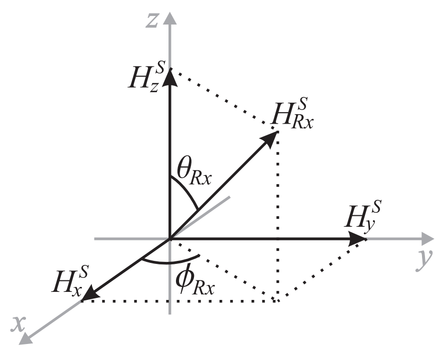


Figura 2.5: Posição espacial do campo magnético secundário no receptor e seus componentes cartesianos.

O cálculo do campo magnético primário é dado por Frischknecht et al. (1991), que para o modelo desenvolvido é:

$$H^P = \frac{m_{Tx}}{4\pi\ell^3}\left[\left(2\cos\left(\phi_{Tx}\right) - \operatorname{sen}\left(\phi_{Tx}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\theta_{Tx}\right) - \cos\left(\theta_{Tx}\right)\right] \tag{2.11}$$

E, assim, a impedância mútua (Wait, 1955; Grant e West, 1965) pode ser calculada:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{{}^tH_{Rx}^S}{H^P} = \frac{H_{Rx}^S + H_{Rx}^P}{H^P} \tag{2.12}$$

sendo normalmente medida em *ppm* ou percentagem, tal que:

$^tH_{Rx}^S$ = campo magnético total no receptor;
H_{Rx}^P = campo magnético primário no receptor.

O termo H_{Rx}^P é mensurado a partir da equação 2.11, cujos componentes estejam na mesma direção do receptor (figura 2.5):

$$\begin{aligned} H_{Rx}^P = \frac{m_{Tx}}{4\pi\ell^3}\Big[\Big(&2\cos\left(\phi_{Tx}\right)\cos\left(\phi_{Rx}\right) - \operatorname{sen}\left(\phi_{Tx}\right)\operatorname{sen}\left(\phi_{Rx}\right)\Big) \\ &\operatorname{sen}\left(\theta_{Tx}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_{Rx}\right) - \cos\left(\theta_{Tx}\right)\cos\left(\theta_{Rx}\right)\Big] \end{aligned} \tag{2.13}$$

De um modo geral, nos levantamentos geofísicos, procura-se minimizar o efeito do campo primário (fonte) no receptor, isto é, deseja-se obter somente a resposta do corpo em subsuperfície, tendo em vista que muitas vezes a fonte mascara o sinal proveniente do corpo, que já é tênue, bem como acrescenta incógnitas ao sistema de equações a ser resolvido (para estipular as propriedades do corpo), como a assinatura da fonte.

Dessa forma, existem arranjos (figura 2.6) em que $H_{Rx}^P = 0$, como o *PERP*, *NULL*, *PAR* (dedução deste último encontra-se no apêndice A), de modo que:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{H_{Rx}^S}{H^P}\text{, sendo denominado de } \frac{Z}{Z_0} - 1 \tag{2.14}$$

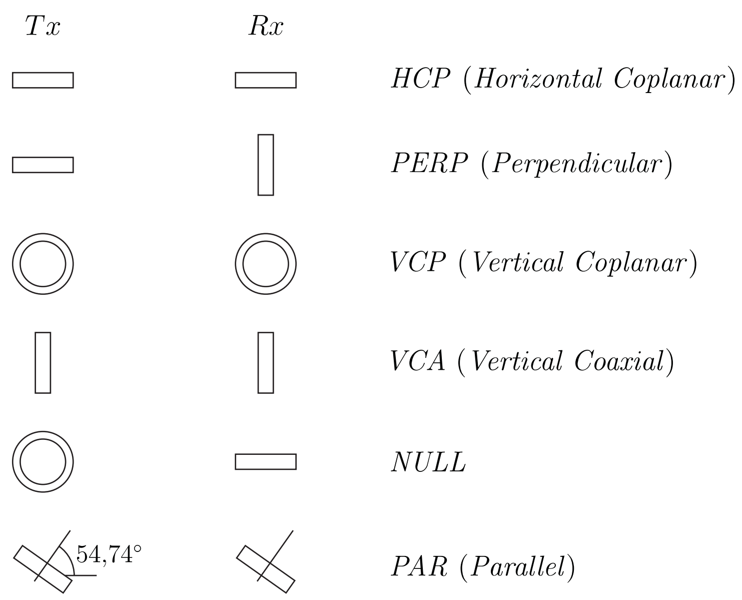


Figura 2.6: Configurações eletromagnéticas usuais em aplicações no domínio da freqüência (Frischknecht et al., 1991).

Além disso, como H^P e H^P_{Rx} são quantidades reais, mas H^S_{Rx} é complexa, pois não está em fase com a corrente do transmissor, então:

$$\begin{array}{cc} \text{Parte em fase} & \text{Parte em quadratura} \\ \Re\left(\dfrac{Z}{Z_0}\right) = \Re\left(\dfrac{H^S_{Rx} + H^P_{Rx}}{H^P}\right) & \Im\left(\dfrac{Z}{Z_0}\right) = \Im\left(\dfrac{H^S_{Rx}}{H^P}\right) \end{array}$$

de forma que em muitos trabalhos apresentados, como em Frischknecht et al. (1991), a parte em fase é dada em $\frac{Z}{Z_0} - 1$, independentemente de H^P_{Rx} ser nulo.

2.2.2 Elipse de Polarização

Segundo Sampaio (2006), os componentes do campo eletromagnético variam em amplitude e em fase conforme a direção. Devido à variação na fase, tanto na direção como no tempo, o campo total não é, em geral, linearmente polarizado, de modo que a extremidade do vetor descreve um elipsóide de polarização no espaço com o passar do tempo. Os parâmetros mais empregados são os seguintes:

tilt angle — ângulo espacial entre um dos eixos principais de uma elipse e um dos eixos coordenados;

elipticidade — razão entre a magnitude dos dois eixos principais de uma elipse.

Uma análise desses parâmetros foi feita por Grant e West (1965) e Smith e Ward (1974), sendo que vamos desenvolver baseada na descrição de Sampaio (2006).

Supondo dois vetores complexos, $\mathbf{H^P}$ e $\mathbf{H^S}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H^P} &= H_x^P\mathbf{i} + H_y^P\mathbf{j} + H_z^P\mathbf{k} \\ \mathbf{H^S} &= H_x^S\mathbf{i} + H_y^S\mathbf{j} + H_z^S\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.15}$$

a magnitude da superposição de cada componente é da forma:

$$\begin{aligned} H_x &= H_x^P + H_x^S = H_{x0}e^{i\phi_x} \\ H_y &= H_y^P + H_y^S = H_{y0}e^{i\phi_y} \\ H_z &= H_z^P + H_z^S = H_{z0}e^{i\phi_z} \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{x_0} &= \sqrt{\left(H_{x_R}^P + H_{x_R}^S\right)^2 + \left(H_{x_I}^P + H_{x_I}^S\right)^2}; \qquad \phi_x = \arctan\left(\frac{H_{x_I}^P + H_{x_I}^S}{H_{x_R}^P + H_{x_R}^S}\right) \\ H_{y_0} &= \sqrt{\left(H_{y_R}^P + H_{y_R}^S\right)^2 + \left(H_{y_I}^P + H_{y_I}^S\right)^2}; \qquad \phi_y = \arctan\left(\frac{H_{y_I}^P + H_{y_I}^S}{H_{y_R}^P + H_{y_R}^S}\right) \\ H_{z_0} &= \sqrt{\left(H_{z_R}^P + H_{z_R}^S\right)^2 + \left(H_{z_I}^P + H_{z_I}^S\right)^2}; \qquad \phi_z = \arctan\left(\frac{H_{z_I}^P + H_{z_I}^S}{H_{z_R}^P + H_{z_R}^S}\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aplicando a transformada para o domínio do tempo, obtêm-se:

$$\begin{aligned} h_x &= \Re\left[H_x e^{i\omega t}\right] = \Re\left[H_{x_0}e^{i(\omega t + \phi_x)}\right] = H_{x_0}\cos\left(\omega t + \phi_x\right) \\ h_y &= \Re\left[H_y e^{i\omega t}\right] = \Re\left[H_{y_0}e^{i(\omega t + \phi_y)}\right] = H_{y_0}\cos\left(\omega t + \phi_y\right) \\ h_z &= \Re\left[H_z e^{i\omega t}\right] = \Re\left[H_{z_0}e^{i(\omega t + \phi_z)}\right] = H_{z_0}\cos\left(\omega t + \phi_z\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim, o campo total é dado por:

$$\mathbf{R} = h_x\mathbf{i} + h_y\mathbf{j} + h_z\mathbf{k} = R_0(t)\mathbf{r} \tag{2.19}$$

em que:

$$\begin{aligned} R_0(t) &= \sqrt{H_{x_0}^2\cos^2(\omega t + \phi_x) + H_{y_0}^2\cos^2(\omega t + \phi_y) + H_{z_0}^2\cos^2(\omega t + \phi_z)} \\ \mathbf{r} &= \operatorname{sen}\left(\theta(t)\right)\cos\left(\phi(t)\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\theta(t)\right)\operatorname{sen}\left(\phi(t)\right)\mathbf{j} + \cos\left(\theta(t)\right)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.20}$$

e o ângulo que o vetor $\mathbf{R}$ faz com o plano horizontal (vide figura 2.7) é:

$$\alpha(t) = \arctan\left(\frac{H_{z_0}\cos\left(\omega t + \phi_z\right)}{\sqrt{H_{x_0}^2\cos^2(\omega t + \phi_x) + H_{y_0}^2\cos^2(\omega t + \phi_y)}}\right) \tag{2.21}$$

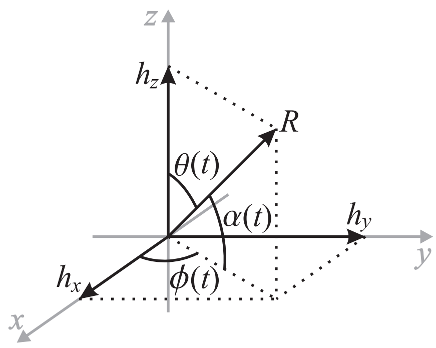


Figura 2.7: Posição espacial do vetor $\mathbf{R}$ que descreve a elipse de polarização e seus componentes cartesianos.

Definindo o tempo $t = t_1$, o tempo em que o eixo maior ocorre, temos que $R_0(t_1)$ é máximo, bem como sua raiz, assim:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_1}\left[H_{x_0}^2 \cos^2(\omega t_1 + \phi_x) + H_{y_0}^2 \cos^2(\omega t_1 + \phi_y) + H_{z_0}^2 \cos^2(\omega t_1 + \phi_z)\right] = 0 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; t_1 = \frac{1}{2\omega} \arctan\left(-\frac{H_{x_0}^2 \,\mathrm{sen}\,(2\phi_x) + H_{y_0}^2 \,\mathrm{sen}\,(2\phi_y) + H_{z_0}^2 \,\mathrm{sen}\,(2\phi_z)}{H_{x_0}^2 \cos(2\phi_x) + H_{y_0}^2 \cos(2\phi_y) + H_{z_0}^2 \cos(2\phi_z)}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

O eixo menor encontra-se defasado de $\frac{\pi}{2\omega}$ do eixo maior. Dessa forma, definindo o tempo $t = t_2$ em que isso acontece, temos que:

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\omega} \tag{2.23}$$

Assim, substituindo nas equações 2.20 e 2.21 os valores de t_1 (equação 2.22) e t_2 (equação 2.23), determinamos, respectivamente, a elipticidade e o *tilt angle* dos eixos maior e menor da elipse de polarização.

Vale salientar que para o modelo definido neste capítulo, $\mathbf{H^P}$ é real e seus componentes serão dados pela equação 2.6, enquanto que $\mathbf{H^S}$ é complexo, sendo dados pela equação 2.9.

CAPÍTULO 3

Procedimentos Computacionais

No capítulo anterior mostramos a parte física–matemática[1] do campo magnético induzido por uma esfera condutora e permeável num meio infinitamente resistivo sob a ação de um dipolo magnético oscilante na aproximação quase-estática, dada por Grant e West (1965); e da elipse de polarização, baseada em Sampaio (2006).

Neste capítulo, evidenciaremos como "transformar" essa linguagem matemática em computacional, sendo que o código-fonte em *Fortran 90/95* encontra-se no anexo I.

Em termos computacionais, pode-se dividir em três grupos a matemática envolvida nesses cálculos, os quais são:

1. Cálculo da *função resposta*, dada pela equação 2.4;
2. Cálculo da impedância mútua, resumida na equação 2.12, e que depende da *função resposta*, e da elipse de polarização; e
3. Procedimentos auxiliares.

De modo a averiguar a consistência numérica dos resultados gerados pelo programa desenvolvido, utilizou-se, como ferramenta para tal, o programa *Mathematica*© versão 5.1, da Wolfram Research.

3.1 Cálculo da *Função Resposta*

Este cálculo requer valores precisos da função modificada de Bessel ($I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)$) e da sua derivada ($I'_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)$) para o argumento complexo κa (Lodha e West, 1976).

Os outros elementos da *função resposta* podem ser calculados facilmente, inclusive o próprio argumento κa, de forma que não serão explanados aqui, podendo ser contemplados diretamente no código-fonte.

[1] A parte física está embutida, conceitualmente, nos cálculos matemáticos.

Abramowitz e Stegun (1970) mostram que a derivada da função de Bessel pode ser dada por:

$$I'_{n+\frac{1}{2}}(z) = I_{n-\frac{1}{2}}(z) - (n+\tfrac{1}{2})\, z^{-1}\, I_{n+\frac{1}{2}}(z)\ , \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

portanto, a equação 2.4 fica reescrita na forma:

$$(X_n + iY_n) = \frac{\mu_0 \kappa a - \big[(n+1)\mu + n\mu_0\big]\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{I_{n-\frac{1}{2}}(\kappa a)}}{\mu_0 \kappa a - n\big(\mu - \mu_0\big)\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{I_{n-\frac{1}{2}}(\kappa a)}} \tag{3.2}$$

e se $\mu = \mu_0$, então:

$$(X_n + iY_n) = 1 - (2n+1)(\kappa a)^{-1}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{I_{n-\frac{1}{2}}(\kappa a)} \tag{3.3}$$

A função de Bessel $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$ é computacionalmente onerosa e instável, tendo em vista que o valor de $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$ é muito variável sendo, obviamente, dependente de n e z. Quando $n \to \infty$, $I_{n+\frac{1}{2}}(z) \to 0$, e a velocidade deste decaimento está relacionado ao argumento, tal que, quando $|z|$ cresce, a magnitude de $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$ aumenta, assim, quanto maior for $|z|$, mais vagarosamente ocorrerá o decaimento, sendo que este indica ser do tipo amortecido, como pode ser observado na figura 3.1.

Vale ressaltar que a precisão numérica do computador é limitada, sendo que em dupla precisão (a utilizada), tem-se 15 casas decimais e expoente de -308 a $+308$ (que depende do processador, devido ao ponto flutuante[2]). Assim, para valores "extremos" de $|z|$, o número de multipolos seria restringido, já que neste caso a probabilidade de ocorrer *overflow*[3] ($|z|$ grande) ou *underflow*[4] ($|z|$ pequeno) aumenta consideravelmente, de modo que ultrapassaria a precisão utilizada.

Contudo, a razão $\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)}$ é estável, cujos valores das partes real e imaginária variam de 0 a 1, se $n = 1, 2, \ldots$, como é o caso (reveja as equações 2.1 a 2.3). A figura 3.2 mostra o "equivalente" da figura 3.1 quando é utilizada essa razão.

---

[2]Certos números não podem ser convertidos em sua representação binária sem perda de precisão, de forma que o ponto flutuante está relacionado à forma de como o coprocessador aritmético realiza os cálculos matemáticos que exigem maior precisão e, desta forma, varia com cada tipo de processador.

[3]Ocorre quando os dados resultantes da entrada ou do processamento exigem mais bits do que os que foram fornecidos no *hardware* ou no *software* para armazenar os dados; como é o caso de uma operação com ponto flutuante em que o resultado é muito grande para o número de bits permitido para o expoente.

[4]Condição na qual um cálculo matemático produz um resultado tão próximo de zero que não pode ser representado pela faixa de dígitos binários disponíveis no computador para armazenar valores com a precisão especificada.

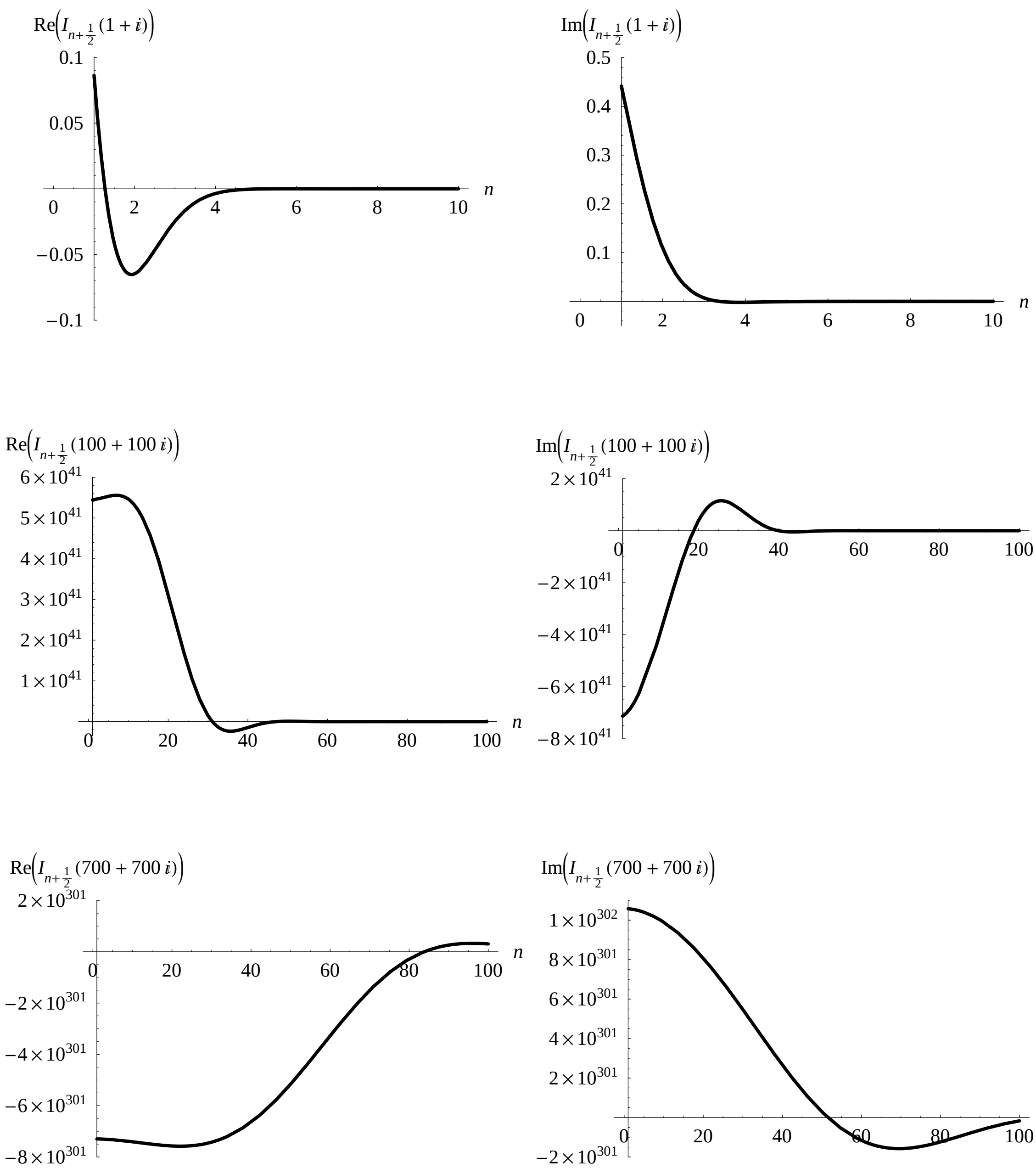


Figura 3.1: Gráficos de $I_{n+\frac{1}{2}}(z) \times n$ para alguns valores de z. Note que quando $n \to \infty$, $I_{n+\frac{1}{2}}(z) \to 0$, com decaimento amortecido, cuja velocidade depende do $|z|$.

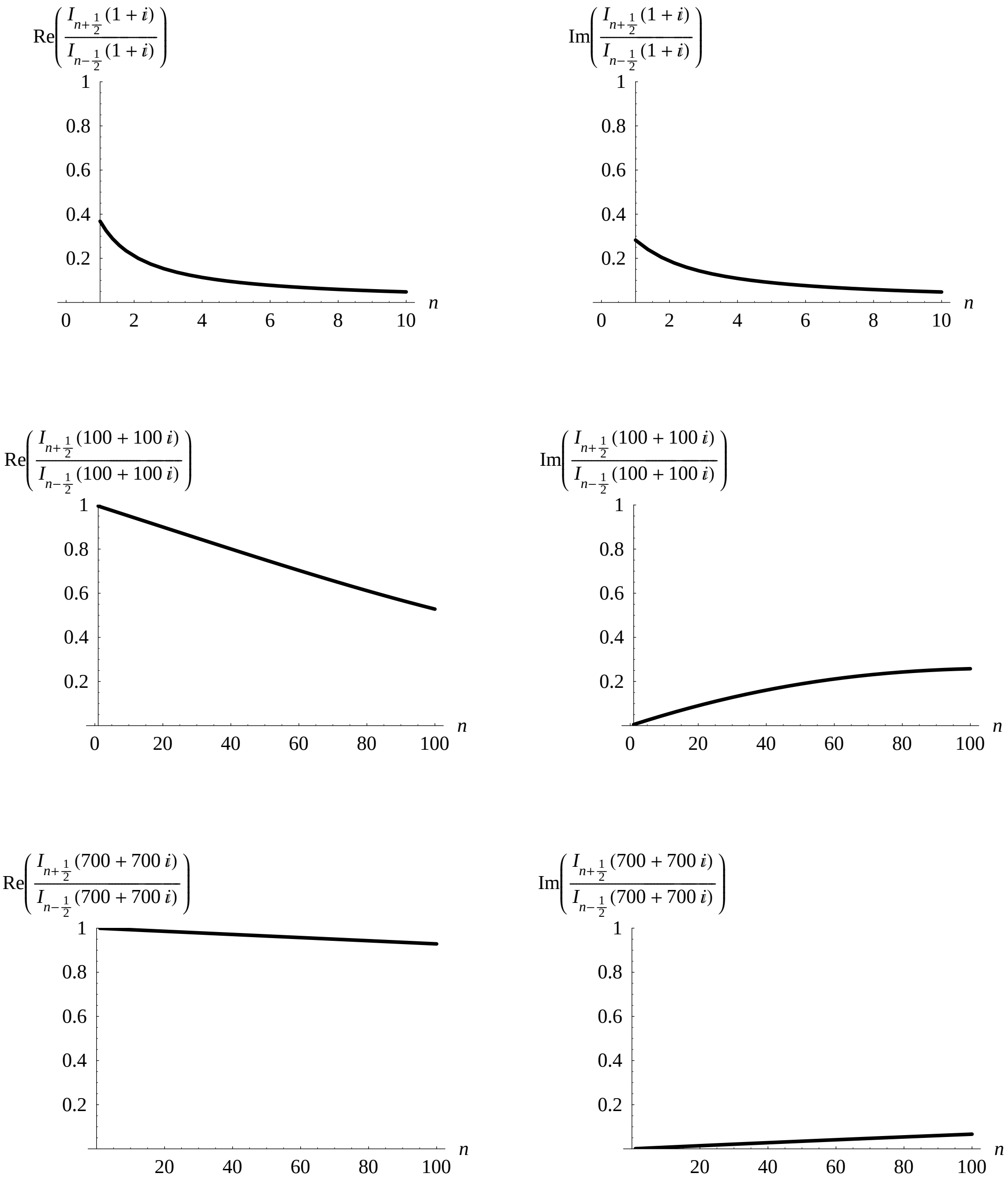


Figura 3.2: Gráficos de $\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} \times n$ para os mesmos valores de z da figura 3.1.

3.1.1 Cálculo da Razão $\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)}$

Para avaliar esta razão recorremos à Abramowitz e Stegun (1970), onde:

$$I_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\tfrac{1}{2}\,z\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{4}\,z^2\right)^k}{k\,!\;\Gamma\!\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}}_{A_k}\;, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in \mathbb{C} \tag{3.4}$$

em que:

$$\Gamma\!\left(a+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\;\ldots\;\cdot(2a-1)}{2^a}\,\pi^{\frac{1}{2}}\;,\; a \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

e sabendo-se que $n > 0$, então:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\;\ldots\;\cdot(2n+1)\,\pi^{\frac{1}{2}}} \\ A_k &= \frac{\frac{1}{4}\,z^2}{k\,\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}\;A_{k-1}\;,\;\; k>0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dessa forma, a razão da função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem $n+\frac{1}{2}$ e sua ordem anterior fica:

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} = \frac{1}{2}\,z\;\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,z^2\right)^k}{k\,!\;\Gamma\!\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\,z^2\right)^k}{k\,!\;\Gamma\!\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}} \tag{3.7}$$

sendo os termos dos somatórios calculados por relações de recorrência, o numerador pela equação 3.6, e o denominador por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2^{n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\;\ldots\;\cdot(2n-1)\,\pi^{\frac{1}{2}}} \\ A_k &= \frac{\frac{1}{4}\,z^2}{k\,\left(n+k-\frac{1}{2}\right)}\;A_{k-1}\;,\;\; k>0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Algumas particularidades, como o modo de realizar a soma destes termos, serão abordadas na seção 3.3.

Com este método obteve-se, de maneira precisa, a razão para $|z|$ abaixo da ordem de 10^2, com $1 \leq n \leq 65$, sendo que para ordens superiores, mostrou-se ineficiente.

Isto devido ao fato que, para esses valores de z, os termos da série oscilam muito, no que tange à magnitude, como num transiente, necessitando de uma grande quantidade de termos de modo a representar, significativamente, o somatório, ocorrendo, então, a perda de precisão computacional no momento da soma desses termos.

Vale destacar que a relação de recorrência para a função de Bessel (Abramowitz e Stegun, 1970):

$$I_{n+\frac{1}{2}}(z) = I_{n-\frac{3}{2}}(z) - (2n-1)\, z^{-1}\, I_{n-\frac{1}{2}}(z)\,, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in \mathbb{C} \tag{3.9}$$

é instável para cima, isto é, para valores crescentes de n e, por conseguinte, não foi utilizada.

Dessa forma, procurou-se outro procedimento para o cálculo, também fornecido por Abramowitz e Stegun (1970):

$$\begin{aligned} & I_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,\big[\, g_n(z)\, \mathrm{senh}\,(z) + g_{-n-1}(z)\, \cosh\,(z) \,\big], \text{ com } n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}, \\ & \text{e} \begin{cases} g_0(z) = z^{-1}\,; \quad g_1(z) = -z^{-2}\,; \\ g_n(z) = g_{n-2}(z) - (2n-1)\, z^{-1} g_{n-1}(z) \end{cases} \end{aligned} \tag{3.10}$$

conseqüentemente:

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} = \frac{g_n(z)\, \tanh\,(z) + g_{-n-1}(z)}{g_{n-1}(z)\, \tanh\,(z) + g_{-n}(z)} \tag{3.11}$$

em que as funções $g(z)$ são calculadas pela recorrência fornecida na equação 3.10 e, $\tanh\,(z)$ por:

$$\tanh\,(z) = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}} \tag{3.12}$$

mais adequada para cálculos computacionais.

Neste caso, conseguiu-se calcular com precisão para $|z|$ acima da ordem de 10^2 e $1 \leq n \leq 65$. Para ordens inferiores ocorre *underflow*, em que o valor do denominador da equação 3.11 ficava abaixo da precisão computacional, ocasionando a divisão por zero.

O valor de n interfere nessa precisão para os dois métodos, sendo que para o primeiro (equação 3.7), quando n decresce, a precisão diminui, deslocando-se para ordens de grandeza inferiores à 10^2, enquanto que no segundo caso (equação 3.11) é o oposto.

Assim, procurou-se por outras maneiras de calcular essa razão[5], a fim de que fosse utilizado apenas um método e que este apresentasse um limite de n superior à 65, mas não houve resultados satisfatórios. Estes procedimentos encontram-se no apêndice B.

[5]Poder-se-ia ter restringido o valor de κa, sabendo-se a faixa de freqüência utilizada na geofísica de exploração e das características geológicas plausíveis para o corpo esférico (condutividade, permeabilidade e raio), o que porventura facilitaria o cálculo da razão de Bessel com o uso de aproximações assintóticas e afins; o que acarretaria conseqüências negativas, tendo em vista que, a princípio, buscou-se arquitetar um programa que fosse geral o suficiente para que pudesse, inclusive, ser utilizado para outros fins, como por exemplo, em estudos extraplanetares (geofísica espacial). Entretanto, mesmo que o programa fosse somente utilizado para os problemas geofísicos terrestres, a contenção de κa ainda poderia vir a ser uma limitação do mesmo, já que a descoberta de minerais cujos parâmetros físicos diferem em muitas ordens de grandeza dos mais comumente estudados, não poderia ser objeto de estudo do programa (pelo menos sem as devidas correções). Além do mais, a sua não limitação permite a análise de modelos com parâmetros “absurdos”.

Entretanto, considerando o intervalo de $1 \leq n \leq 60$ (o limite superior não é 65 para se ter uma margem de segurança nos cálculos), ao mesclar os dois procedimentos descritos, obteve-se essa razão com precisão e para uma extensa faixa de valores de z (testou-se para $10^{-150} \leq |z| \leq 10^{150}$, com desvio médio relativo de $\pm 10^{-15}$ em relação aos valores calculados pelo *Mathematica*[6])

A junção desses métodos foi realizada calculando, experimentalmente, os valores do $|z^2|$ em função de n, em que as razões de Bessel determinadas pelos dois procedimentos estivessem mais próximas do valor dado pelo *Mathematica*, tido como "verdadeiro"; e ao fazer esse processo para $n = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ e 60, obtivemos o valor correspondente do $|z^2|$, o qual interpolado para o restante de n, permitiu criar uma função que estabelece a mudança automática de um método para outro.

Esta função, então, depende do n desejado e do z de entrada, sendo da forma:

$$lm = 5,2755662538111 \times 10^{-3}\, n^3 + 3,0880786864353\, n^2 + 6,42799892759467\, n \tag{3.13}$$

sendo que, se $|z^2| < lm$, o primeiro procedimento (equação 3.7) será o utilizado, e quando $|z^2| \geq lm$, será o segundo (equação 3.11).

A escolha de $|z^2|$ não foi por acaso, pois $z = \kappa a$ e, conseqüentemente, $|z^2|$ corresponde ao *parâmetro resposta*.

Assim, o cálculo da *função resposta* está finalizado, sendo que o número máximo de 60 multipolos é bastante razoável tendo em vista o fato que Grant e West (1965) conseguiu até quatro multipolos, enquanto que Lodha e West (1976) até 20.

3.2 Cálculo da Impedância Mútua e da Elipse de Polarização

Uma vez obtida a *função resposta*, os cálculos computacionais da impedância mútua e da elipse de polarização são bastantes simples, como veremos na esquematização abaixo:

1. Primeiramente iremos avaliar o campo magnético secundário no receptor (H^S_{Rx}), sendo obtido pelos passos:

   (a) Leitura dos parâmetros do modelo (previamente descritos/ilustrados no capítulo anterior) acerca da esfera (σ, μ, a), do transmissor (f ($\omega = 2\pi f$), h, x, y, m_{Tx}, θ_{Tx}, ϕ_{Tx}) e do receptor (ℓ, θ_{Rx}, ϕ_{Rx});

   (b) Cálculo dos valores de r_0, r, θ, α_{Tx}, α_{Rx} e β utilizando a equação 2.5;

[6]O *Mathematica* só conseguiu calcular para $|z| \leq 10^8$, de forma que para $|z|$ maiores, verificou a forma do gráfico da *função resposta* $\times$ *parâmetro resposta*, em que para $|z| \to \infty$, a parte real da *função resposta* tende a 1, e a imaginária a 0.

(c) Cálculo dos componentes cartesianos e esféricos do momento magnético do dipolo transmissor (equações 2.6 e 2.7);

(d) Cálculo dos somatórios: soma_radial_H_r^S, soma_radial_H_θ^S, soma_transv_H_θ^S e soma_transv_H_ϕ^S dados pelas equações 2.1 a 2.3;

(e) Cálculo dos componentes totais do campo magnético secundário em coordenadas cartesianas através da equação 2.9, utilizando-se da equação 2.8; e

(f) Cálculo do campo magnético secundário no receptor dado pela equação 2.10.

2. A impedância mútua é então determinada fazendo-se os cálculos:

(a) Do campo magnético primário, fornecido pela equação 2.11;

(b) Do campo magnético primário recebido pelo receptor, dado pela equação 2.13; e

(c) Da impedância mútua $\frac{Z}{Z_0}$ pela equação 2.12, e $\frac{Z}{Z_0} - 1$ através da equação 2.14.

3. E por fim, a elipse de polarização será mensurada realizando-se:

(a) Avaliação da magnitude e fase da superposição dos campos magnéticos primário e secundário, dado pela equação 2.17, tal que os componentes cartesianos já foram previamente calculados nos itens 1c e 1e para $\mathbf{H^P}$ e $\mathbf{H^S}$, respectivamente, sendo o primeiro real e o segundo complexo;

(b) Cálculo dos tempos em que os eixos maior e menor acontecem, dados pelas equações 2.22 e 2.23; e

(c) Cálculo dos parâmetros da elipse de polarização através das equações 2.20 (elipticidade) e 2.21 (*tilt angle*).

O item 1d será o único a ser explanado devido ao seu maior grau de complexidade em frente aos demais, os quais podem ser apreciados diretamente no código-fonte.

3.2.1 Cálculo dos Somatórios

Os somatórios: soma_radial_H_r^S, soma_radial_H_θ^S, soma_transv_H_θ^S e soma_transv_H_ϕ^S, dados pelas equações 2.1 a 2.3, podem ser subdivididos em três partes.

A primeira se refere à *função resposta* $(X_n + iY_n)$, cujo modo de se mensurar já foi detalhado na seção 3.1.

Já a segunda,

$$\frac{a^{2n+1}}{(rr_0)^{n+2}} = A_n \tag{3.14}$$

é calculada pela relação de recorrência:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{a}{rr_0}\right)^3 \\ A_n &= \frac{a^2}{rr_0}\, A_{n-1}\,,\ n > 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

E a terceira são os polinômios de Legendre que, diferentemente da função modificada de Bessel de ordem $n + \frac{1}{2}$, são estáveis para valores de grau crescente. Assim, por Abramowitz e Stegun (1970), o cálculo do polinômio de Legendre de grau n e ordem 0 ($P_n(\cos(\theta))$) fica na forma:

$$\begin{aligned} &x = \cos(\theta)\,; \quad P_0(x) = 1\,; \quad P_1(x) = x\,; \\ &P_n(x) = \frac{(2n-1)\,x\,P_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)}{n}, \text{ com } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{3.16}$$

e para o polinômio associado de Legendre de grau n e ordem 1 ($P_n^1(\cos(\theta))$):

$$\begin{aligned} &x = \cos(\theta)\,; \quad y = \operatorname{sen}(\theta)\,; \quad P_1^1(x) = y\,; \quad P_2^1(x) = 3xy\,; \\ &P_n^1(x) = \frac{(2n-1)\,x\,P_{n-1}^1(x) - n\,P_{n-2}^1(x)}{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Os demais elementos que fazem parte desses somatórios possuem cálculos diretos, de forma que o número de termos é limitado pelo fator geométrico (equação 3.14), que é sempre menor que a unidade, e pela *função resposta*, logo, máximo de 60. Além disso, o modo de realizar essa soma estará explicada na seção seguinte.

3.3 Procedimentos Auxiliares

No contexto da transformação da linguagem matemática para a computacional, é importante analisar a questão da soma, principalmente no nosso caso em que ela é utilizada diversas vezes e para cálculos que requerem grande precisão.

Na matemática, uma das propriedades da soma é a comutativa, em que a ordem das parcelas não altera o resultado, porém, isto deixa de ser verdade na computação, tendo em vista a restrição da precisão, de modo que se considerarmos, em dupla precisão, a soma:

$$10^{16} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{10} = 1{,}000\,000\,000\,000\,000 \times 10^{16} \tag{3.18}$$

mas,

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{10} + 10^{16} = 1{,}000\,000\,000\,000\,001 \times 10^{16} \tag{3.19}$$

evidenciando que a ordem dos termos é essencial para cálculos que necessitem de grande precisão.

Assim, é necessário dispor, em ordem crescente, todos os termos de um determinado somatório, para então realizar a soma.

Porém, depois de ordenados, a soma não deve ser feita, pura e simplesmente, em ordem dos valores crescentes, já que se tivermos termos com valores negativos de grande magnitude, os positivos de pequena magnitude não acarretarão incrementos na soma.

Dessa forma, é imprescindível que a soma seja subdividida em três etapas:

1. Somar em ordem decrescente os valores negativos;
2. Somar em ordem crescente os valores positivos; e
3. Somar esses resultados.

No *Fortran 90/95* existe uma função intrínseca de somatório mas, na maioria dos casos, mostrou-se menos precisa do que estes procedimentos.

CAPÍTULO 4

Resultados e Discussões

Realizados os procedimentos computacionais, obteve-se um programa em *Fortran 90/95* capaz de fornecer a resposta eletromagnética multi-freqüência no intervalo quase-estático para o modelo de uma esfera condutora e permeável inserida num meio resistivo sob a ação de um campo dipolar.

No presente capítulo examinar-se-á, qualitativamente, a *função resposta* e a impedância mútua e a elipse de polarização para os arranjos mais comumente utilizados.

4.1 Análise da *Função Resposta*

Na figura 4.1, temos o gráfico da *função resposta* em função do *parâmetro resposta* (o qual denominaremos de γ) para alguns valores de multipolos.

Nesta figura observa-se que todas as curvas situam-se entre dois limites. No limite resistivo ($\gamma \to 0$) o campo primário não induz um campo secundário na esfera e ambos os componentes da resposta eletromagnética são nulos quando $\mu = \mu_0$, e quando $\mu > \mu_0$, somente o componente em fase apresenta valores negativos, cuja assíntota depende do número do multipolo e do valor de μ. No limite indutivo ($\gamma \to \infty$) a resposta é puramente em fase com o campo primário e não possui componente em quadratura, pois a esfera comporta-se como um perfeito condutor (Guedes, 1979).

Além disso, os momentos dos multipolos de ordens mais altas são menos facilmente excitados que os de mais baixa ordens, como comprovado pela observação de que eles alcançam o limite indutivo a valores mais altos do *parâmetro resposta*, o que já foi previamente notado por Grant e West (1965) e Lodha e West (1976).

Temos também que a *função resposta* para uma esfera permeável ($\mu \neq \mu_0$) difere de uma impermeável ($\mu = \mu_0$) em pelo menos três aspectos:

1. Aumento na magnitude do componente em quadratura para um mesmo valor de γ;
2. Para baixos valores de γ, um momento magnético adicional é introduzido, em fase e com a mesma direção do campo primário. Este momento é a magnetização induzida que

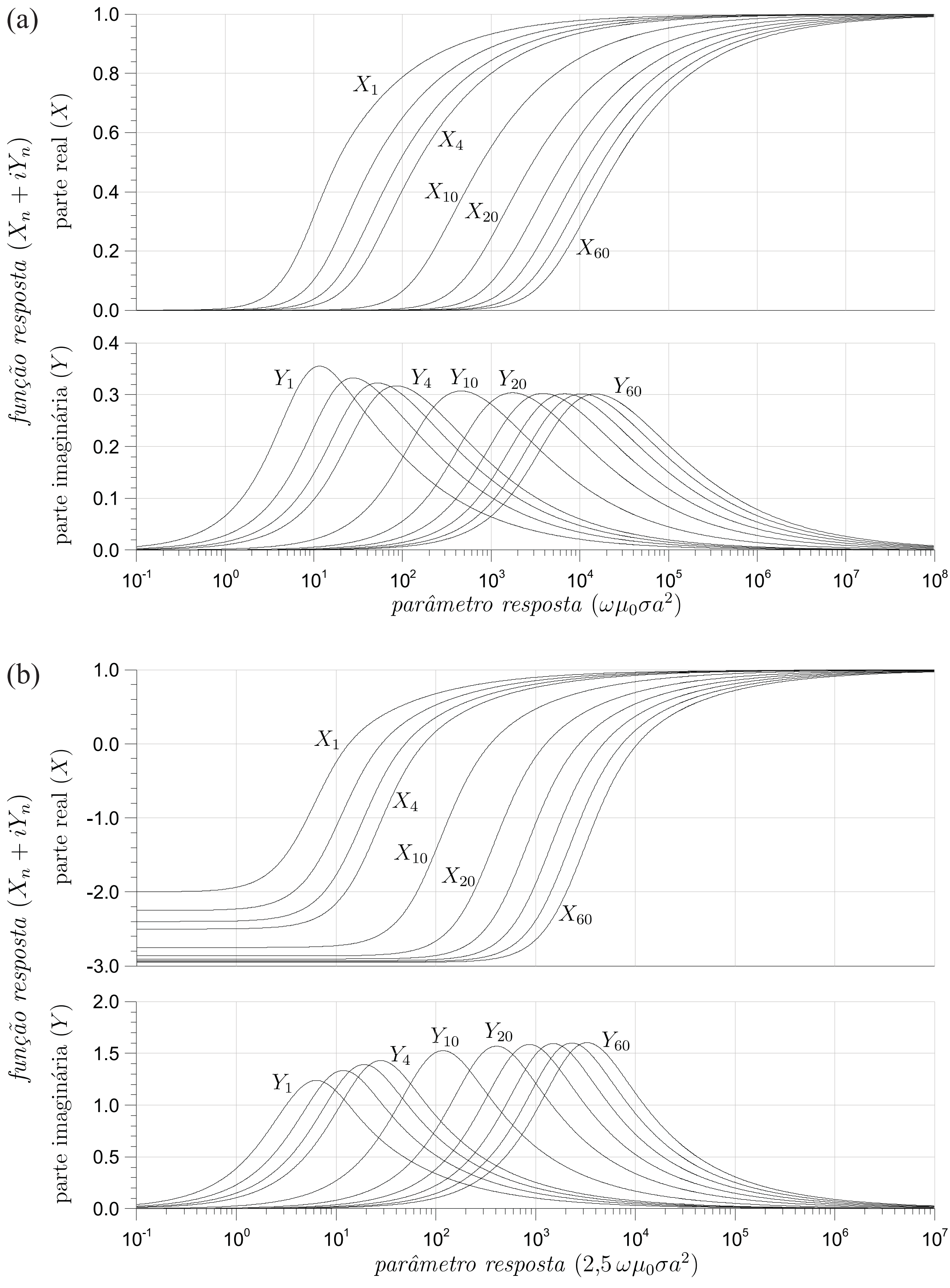


Figura 4.1: *Função resposta* contra *parâmetro resposta* para o momento do multipolo induzido de ordens $n = 1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 50$ e 60 (da esquerda para a direita), e $\mu = \mu_0$ em (a) e $\mu = 2{,}5\,\mu_0$ em (b).

ocorre quando um corpo permeável está em um campo magnético estático. Entretanto, quando γ é grande a resposta "condutiva" encobre completamente esse momento extra (Guedes, 1979); e

3. Para o mesmo multipolo há o afastamento do limite resistivo e a aproximação do limite indutivo a valores menores de γ.

Nas figuras 4.2 a 4.4, pode-se verificar o comportamento dos componentes em fase e em quadratura da *função resposta* em multi-freqüência para variações na permeabilidade magnética, condutividade elétrica e raio da esfera. O valor superior utilizado para a freqüência do dipolo indutor expressa o limite da aproximação quase-estática (Ward e Hohmann, 1988).

Os gráficos da figura 4.2 evidenciam os efeitos da mudança da permeabilidade magnética, de forma que o valor máximo do componente em quadratura situa-se num pequeno intervalo do domínio da freqüência e, quanto maior a permeabilidade magnética da esfera, maior a magnitude da resposta. No componente em fase, tem-se que quanto mais permeável, maior a magnetização induzida a baixas freqüências.

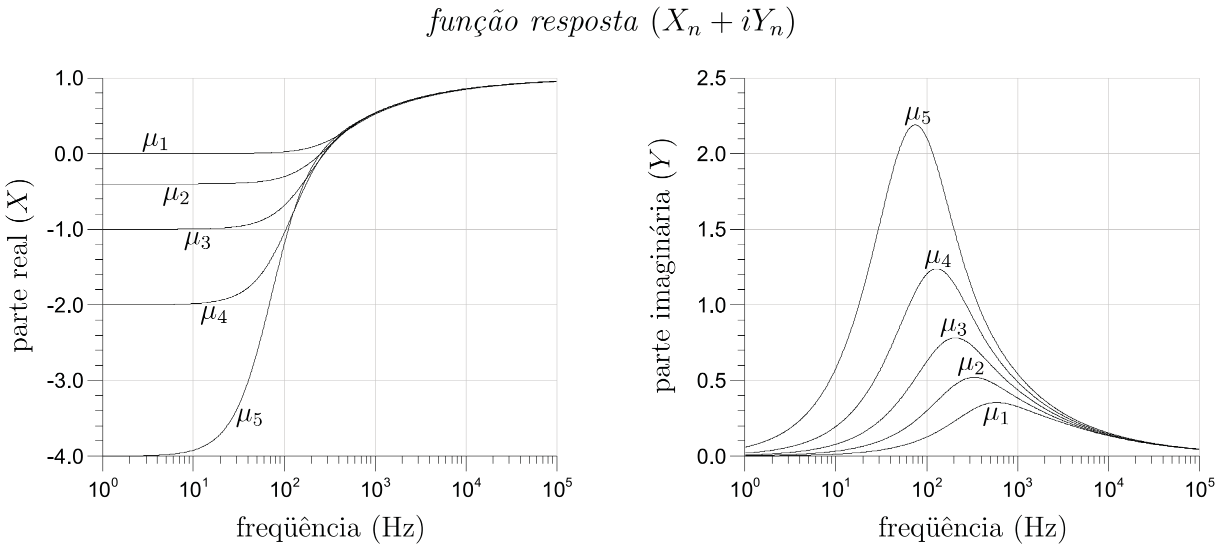


Figura 4.2: *Função resposta* multi-freqüência para o momento de multipolo de ordem $n = 1$, para a variação da permeabilidade magnética da esfera. Parâmetros: $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = 1{,}5\,\mu_0$, $\mu_3 = 2\,\mu_0$, $\mu_4 = 2{,}5\,\mu_0$, $\mu_5 = 3\,\mu_0$, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$ e $a = 50$ m.

Nos gráficos da figura 4.3, nota-se que uma variação na condutividade elétrica da esfera implica numa translação das respostas em fase e em quadratura no domínio da freqüência, de modo que não há alterações na magnitude da resposta, apenas ocorrendo em uma outra freqüência, sendo que quanto menor a condutividade, maior a freqüência da máxima resposta.

Observa-se também que, para o componente em fase, quanto mais condutora for a esfera, maior a sua resposta para uma determinada freqüência.

função resposta $(X_n + iY_n)$

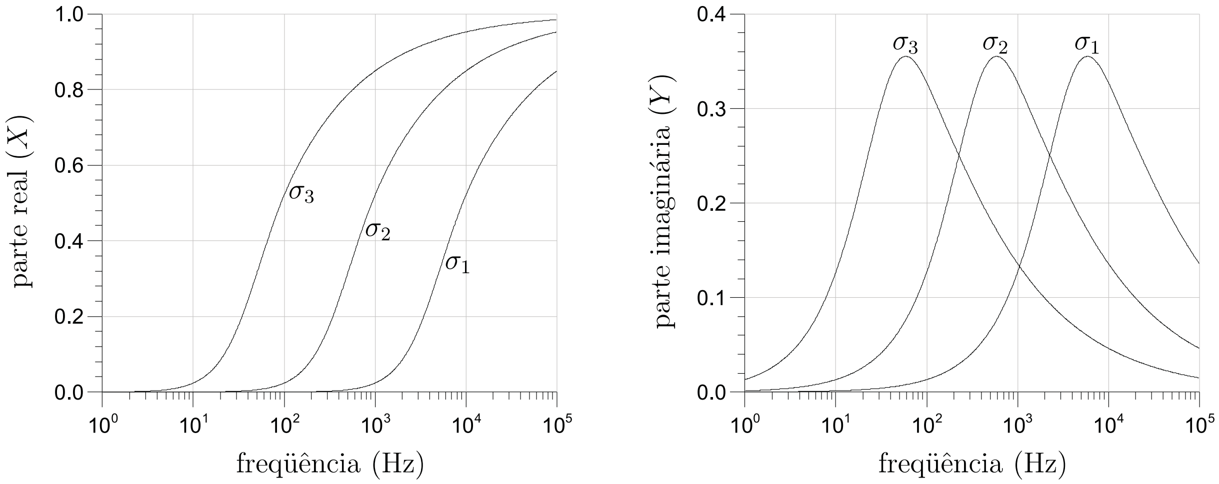


Figura 4.3: *Função resposta* multi-freqüência para o momento de multipolo de ordem $n = 1$, para a variação da condutividade elétrica da esfera. Parâmetros: $\sigma_1 = 0{,}1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\sigma_2 = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\sigma_3 = 10\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$ e $a = 50$ m.

Na figura 4.4 tem-se os gráficos da variação da *função resposta* com o raio da esfera, o qual verifica-se um comportamento semelhante ao do caso anterior, de modo que quanto maior o raio, para o componente em fase, maior a magnitude da resposta, enquanto que com o componente em quadratura, a resposta máxima ocorre numa freqüência menor.

4.2 Análise da Impedância Mútua

Para esta avaliação utilizamos três modelos, sendo dois gerados pela alteração de uma das propriedades do primeiro, os quais compararemos entre si.

Os parâmetros do primeiro modelo estão descritos na tabela 4.1 e os resultados obtidos encontram-se nas figuras 4.5 a 4.9, respectivamente para as configurações *HCP*, *PAR*, *PERP*, *VCA* e *VCP*, em que a locação da resposta é atribuída na posição da meia distância Tx–Rx.

O arranjo *NULL* não foi utilizado pelo fato dos modelos terem seus levantamentos acima do centro da esfera, de modo que o transmissor só terá o componente m_ϕ, que está no sentido do eixo y, de forma que o dipolo receptor na posição vertical (eixo z) não irá captar nada do campo secundário.

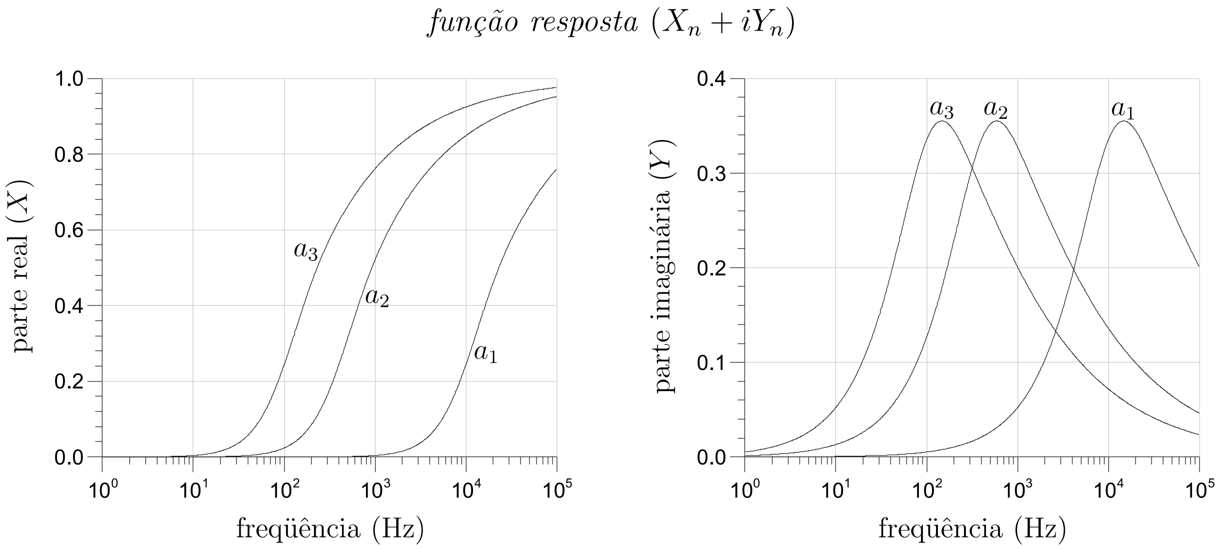


Figura 4.4: *Função resposta* multi-freqüência para o momento de multipolo de ordem $n = 1$, para a variação do raio da esfera. Parâmetros: $a_1 = 10$ m, $a_2 = 50$ m, $a_3 = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$ e $\mu = \mu_0$.

Parâmetro	Descrição	Valor
a	Raio da esfera	50 m
σ	Condutividade elétrica da esfera	$1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$
μ	Permeabilidade magnética da esfera	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$ (μ_0)
f_n	N-ésima freqüência da corrente no dipolo transmissor	$21 \times 8^{n-1}$ Hz, $n = 1, \ldots, 5$
m_{Tx}	Momento magnético do dipolo transmissor	$1\ \mathrm{A\,m^2}$
ℓ	Distância transmissor–receptor	1 m
h	Distância vertical (eixo z) do centro da esfera ao plano do levantamento (plano x–y)	100 m
y	Distância perpendicular (eixo y) entre a linha do levantamento (eixo x) e a projeção do centro da esfera no plano x–y	nulo

Tabela 4.1: Descrição dos parâmetros do modelo 1.

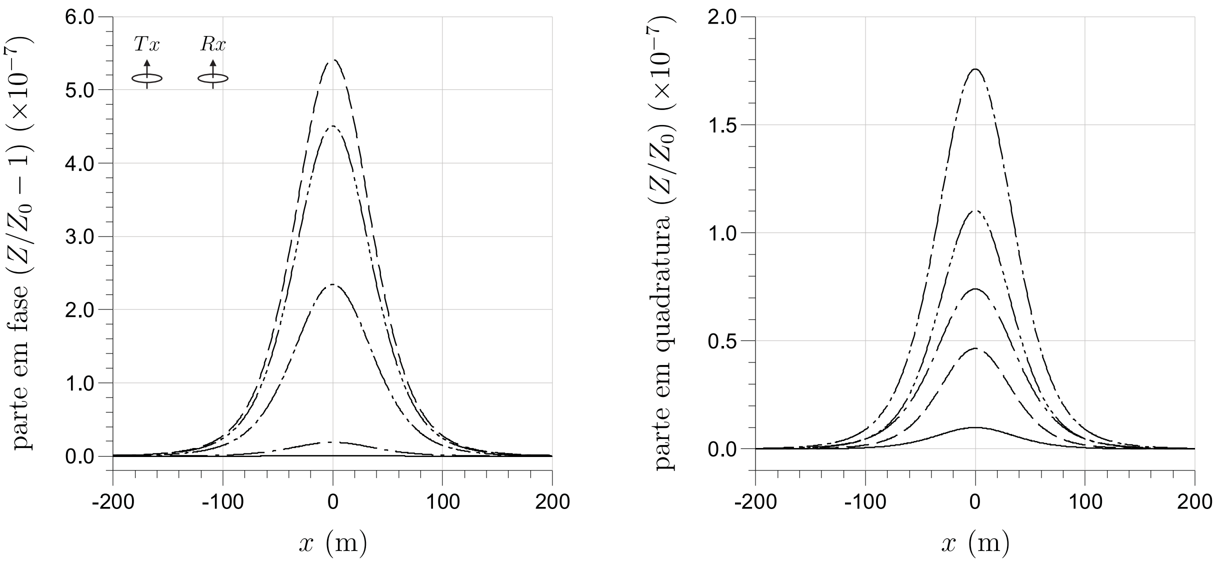
Para este modelo pode-se observar que:

1. A magnitude da resposta do arranjo *PAR* é maior que nos outros, sendo que *PAR* > *HCP* > *VCP* > *PERP* (pico a pico) > *VCA*;

2. As respostas do *HCP* e *VCP* são positivas, *PAR* e *VCA* são negativas e *PERP* é mista;

3. *PAR* e *PERP* são os únicos cujas respostas não são simétricas em relação ao centro da esfera ($x = 0$). No *PAR* as "amplitudes" apresentam uma translação no sentido positivo do eixo x, enquanto que no *PERP* a interceptação do valor de magnitude zero, quando da inversão de "polaridade", ocorre um pouco antes de $x = 0$, bem como, aparentemente, a parte negativa é uma rotação de 180° da parte positiva em torno desse ponto, mas com um decréscimo na magnitude (ou vice-versa); e

4. Para a parte em fase, a magnitude é crescente com a freqüência e, para a parte em quadratura, a maior magnitude é para a freqüência central (f_3), diminuindo em direção à periferia, isto é, $f_3 > f_4 > f_2 > f_5 > f_1$. Ambos os casos estão diretamente relacionados à *função resposta*, que como já dito anteriormente (seção 4.1), para a parte em fase, quanto maior o γ mais próximo do limite indutivo e maior a magnitude (até saturar na magnitude máxima, que é igual a 1), e para a parte em quadratura, o valor máximo encontra-se numa pequena faixa do domínio da freqüência (reveja a figura 4.1).



$f_1 = 21$ Hz $f_2 = 168$ Hz $f_3 = 1344$ Hz $f_4 = 10752$ Hz $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.5: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *HCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1$ S m^{-1}, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1$ A m^2 e $y = 0$.

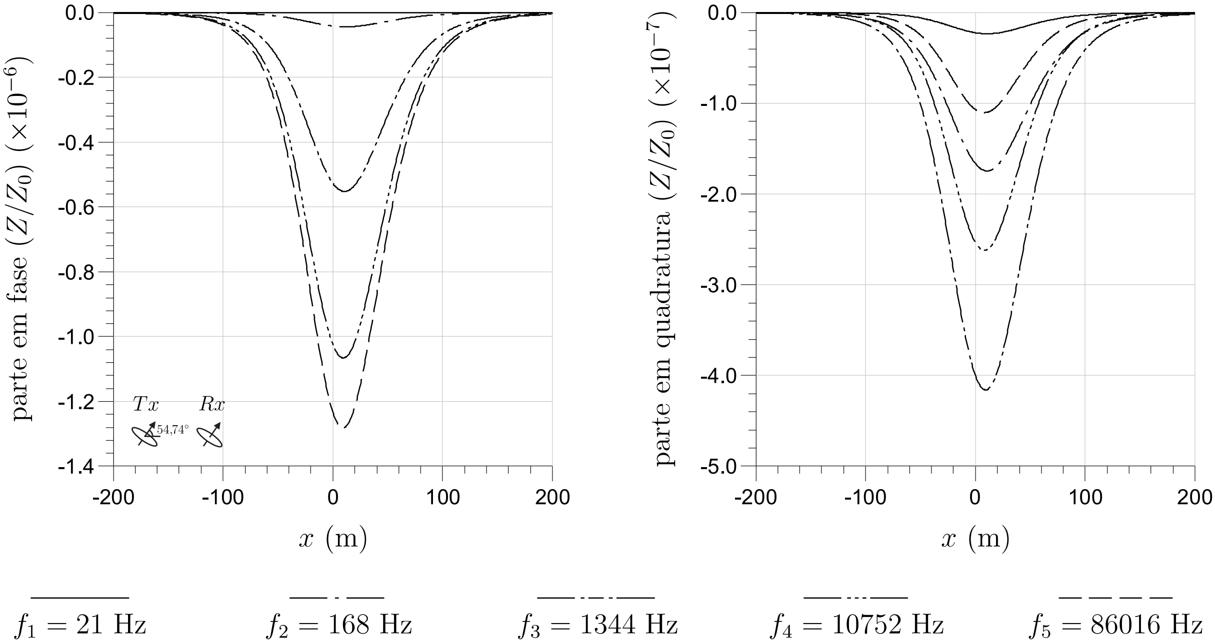


Figura 4.6: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PAR*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

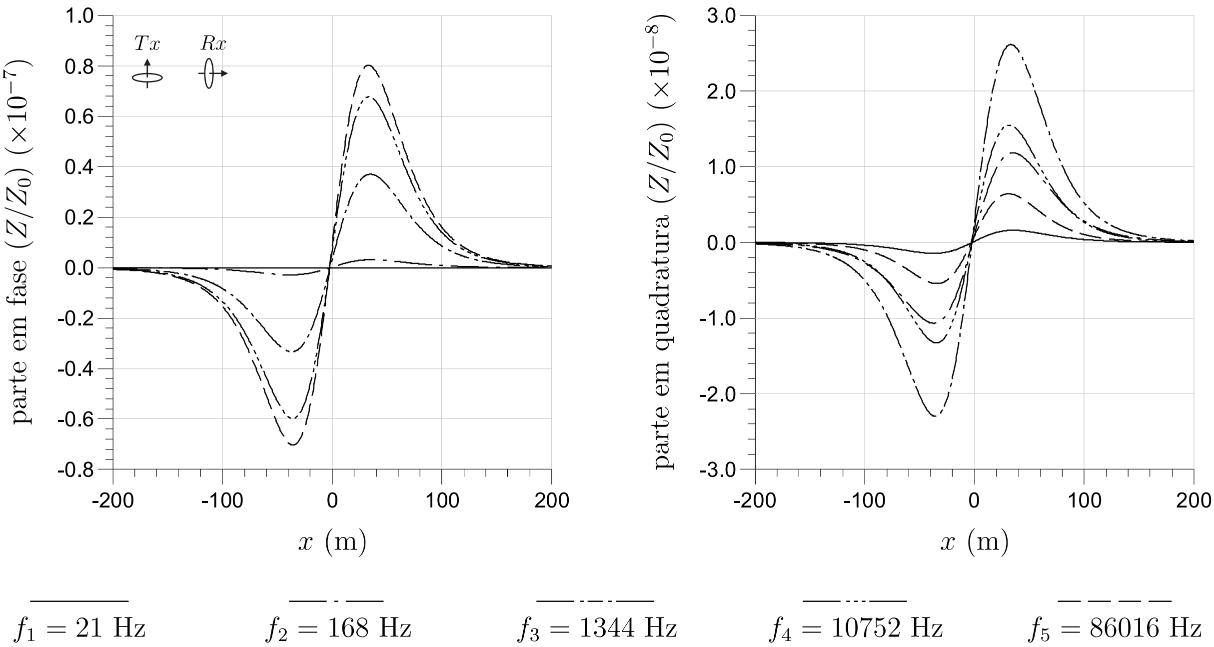


Figura 4.7: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PERP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

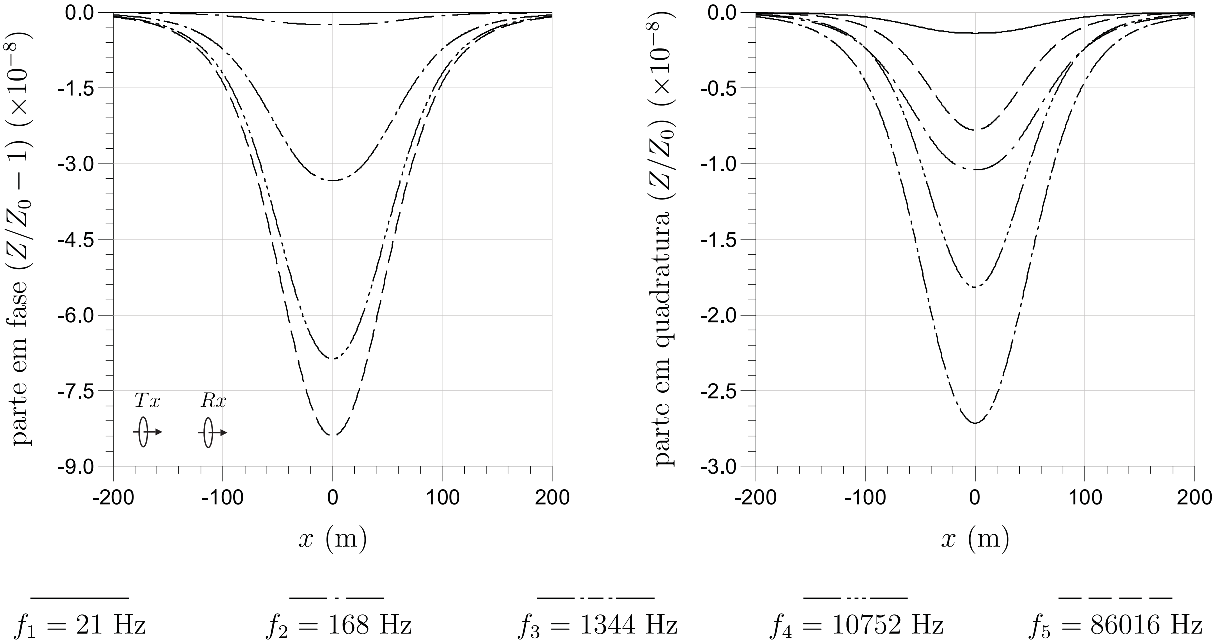


Figura 4.8: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCA*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

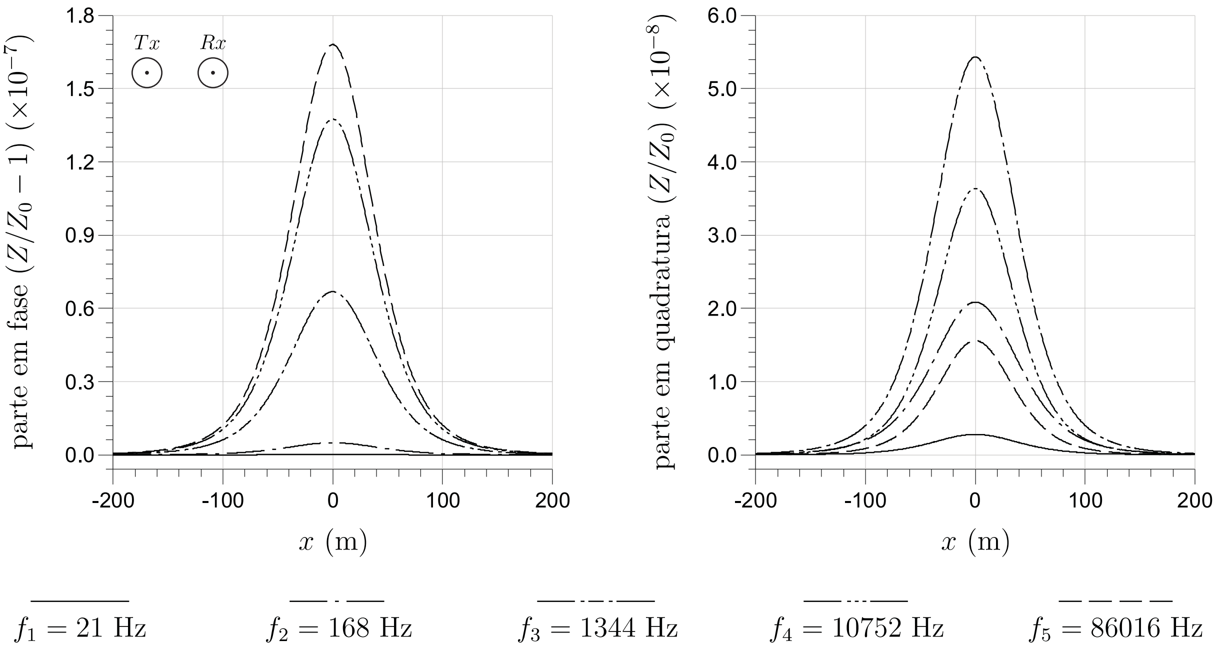


Figura 4.9: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

Os parâmetros do segundo modelo encontram-se na tabela 4.2, sendo a única alteração o h, de 100 m para 50 m, de forma que a esfera tangencia o plano do levantamento. Os perfis correspondentes para o mesmo grupo e ordem dos arranjos estão nas figuras 4.10 a 4.14.

Parâmetro	Descrição	Valor
a	Raio da esfera	50 m
σ	Condutividade elétrica da esfera	$1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$
μ	Permeabilidade magnética da esfera	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$ (μ_0)
f_n	N-ésima freqüência da corrente no dipolo transmissor	$21 \times 8^{n-1}$ Hz, $n = 1, \ldots, 5$
m_{Tx}	Momento magnético do dipolo transmissor	$1\ \mathrm{A\,m^2}$
ℓ	Distância transmissor–receptor	1 m
h	Distância vertical (eixo z) do centro da esfera ao plano do levantamento (plano x–y)	50 m
y	Distância perpendicular (eixo y) entre a linha do levantamento (eixo x) e a projeção do centro da esfera no plano x–y	nulo

Tabela 4.2: Descrição dos parâmetros do modelo 2.

Neste caso, verifica-se que:

1. A magnitude da resposta do arranjo *PAR* continua sendo maior que nos demais, mas ocorre uma permutação entre o *PERP* e o *VCA*, de modo que *PAR* > *HCP* > *VCP* > *VCA* > *PERP* (pico a pico);

2. Não há alteração da "polaridade" das respostas. *HCP* e *VCP* são positivas, *PAR* e *VCA* são negativas e *PERP* é mista;

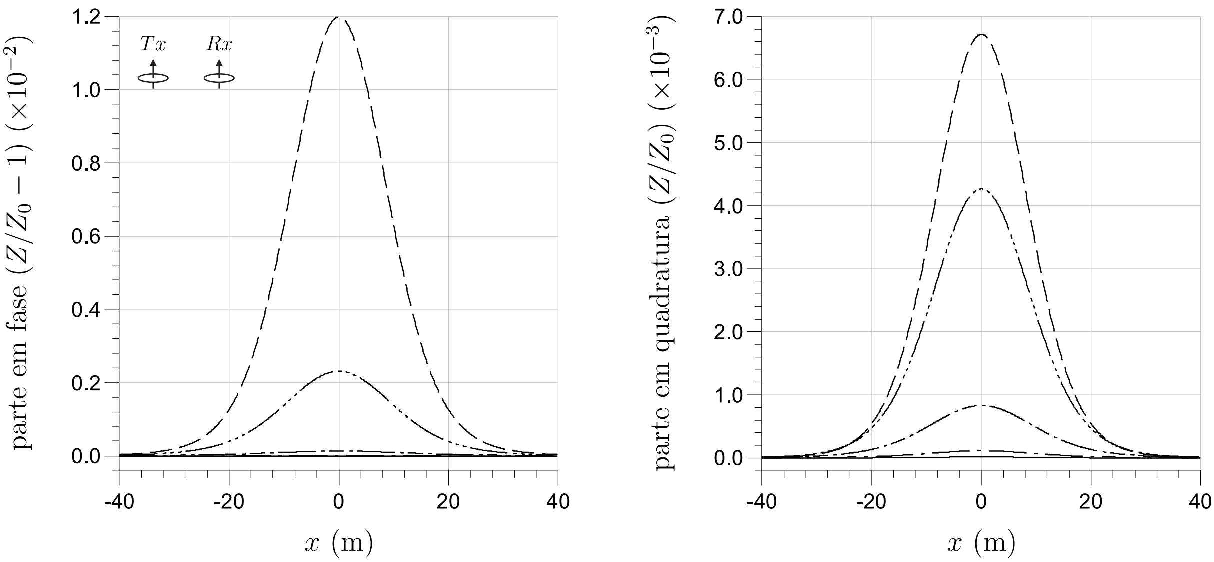
3. *PAR* e *PERP* permanecem não simétricos em relação ao centro da esfera, sendo que no *PERP* o decréscimo na magnitude da parte negativa é muito mais acentuada e o "ponto de rotação", definido anteriormente, encontra-se muito mais no sentido negativo do eixo x;

4. A magnitude é crescente com a freqüência para as partes em fase e em quadratura. No caso da parte em quadratura tem-se que a *função resposta* é multiplicada pelo fator geométrico $a^{2n+1}/(rr_0)^{n+2}$ (equações 2.1 a 2.3), o qual é sempre menor do que a unidade, logo, quanto mais próximos os dipolos estiverem da esfera, mais multipolos serão necessários para obter a resposta eletromagnética com uma acurácia satisfatória; e como os multipolos de maior ordem possuem seus máximos em intervalos de

freqüência maiores, então o fato da magnitude crescer com a freqüência para a parte em quadratura está coerente, mesmo quando não se modificou o *parâmetro resposta*;

5. Todas as configurações tiveram suas magnitudes elevadas em 10^4 a 10^5 ordens de grandeza em relação ao modelo anterior, isto porque a esfera encontra-se muito mais próxima do levantamento, de forma que sua resposta (campo magnético secundário) aumenta consideravelmente, enquanto que o campo primário não é alterado e, por conseguinte, a impedância mútua aumenta; e

6. As "larguras dos picos" encontram-se numa estreita faixa de comprimento aproximado ao do raio da esfera (de -30 a 30 m), enquanto que nos perfis do modelo 1 é cerca de três vezes o diâmetro (de -150 a 150 m). Entretanto, é importante notar que além dos ± 30 m existe influência (resposta) da esfera, mas como sua magnitude é muito inferior aos dos "picos", então aparenta, devido à escala utilizada, que a magnitude chega ao valor zero. O mesmo ocorre com o modelo anterior, mas de modo inverso, ou seja, como a esfera está mais distante dos dipolos, a sua influência é pequena em toda a extensão, sendo, obviamente, maior quando está mais perto ($x = 0$), mas ainda assim "ínfima", de forma que pode-se apreciar a resposta da esfera em regiões mais distantes por causa da magnitude desta e da escala empregada.



$f_1 = 21$ Hz $f_2 = 168$ Hz $f_3 = 1344$ Hz $f_4 = 10752$ Hz $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.10: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *HCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

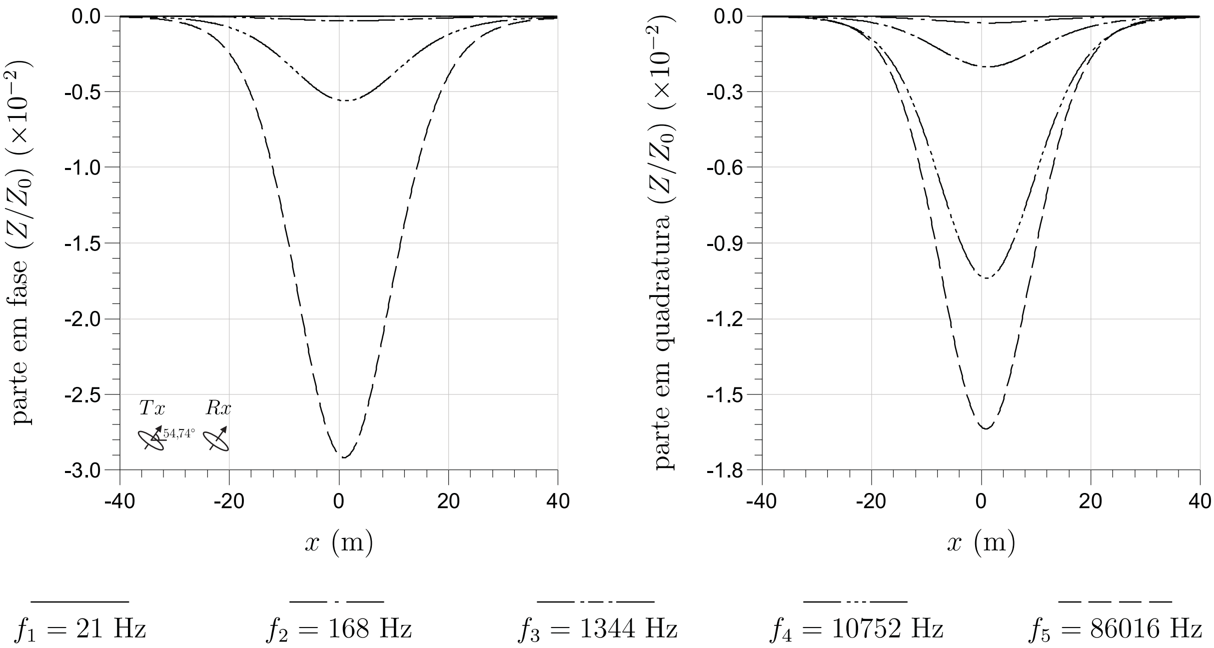


Figura 4.11: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PAR*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

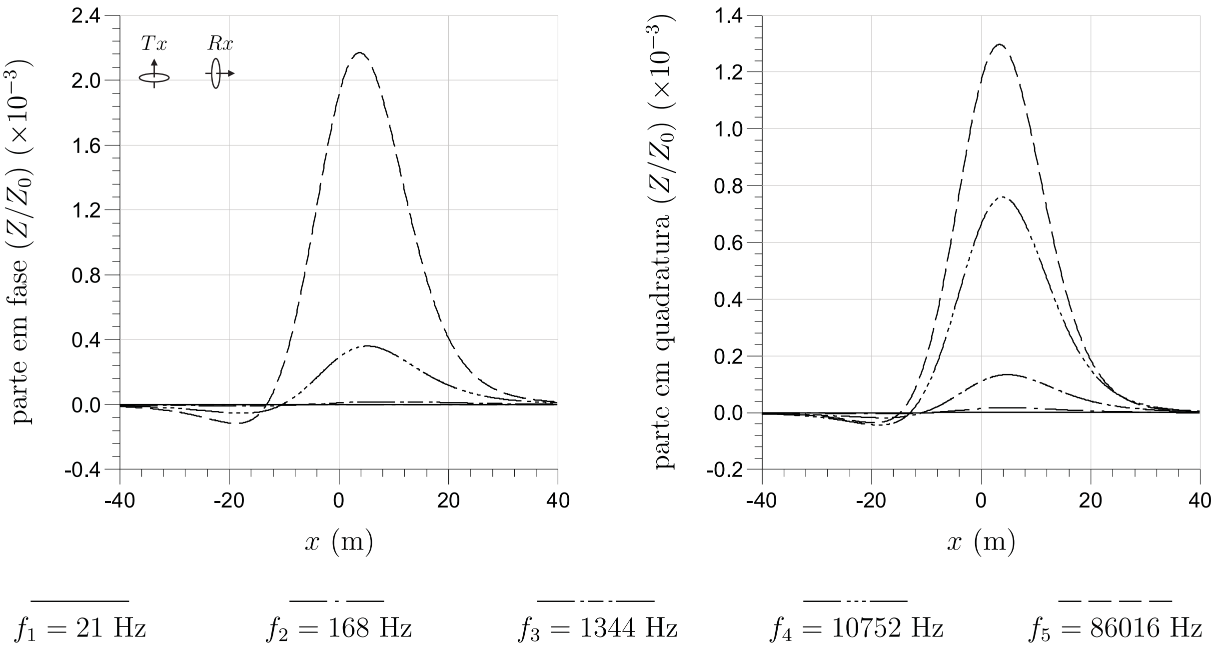


Figura 4.12: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PERP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

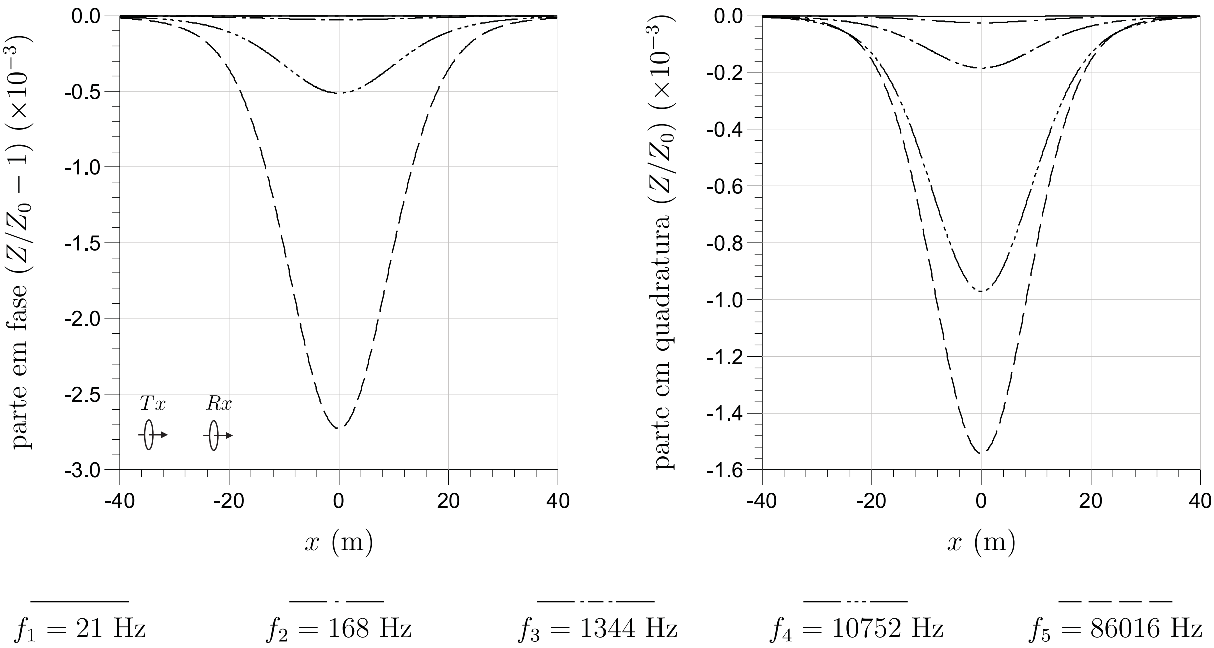


Figura 4.13: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCA*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

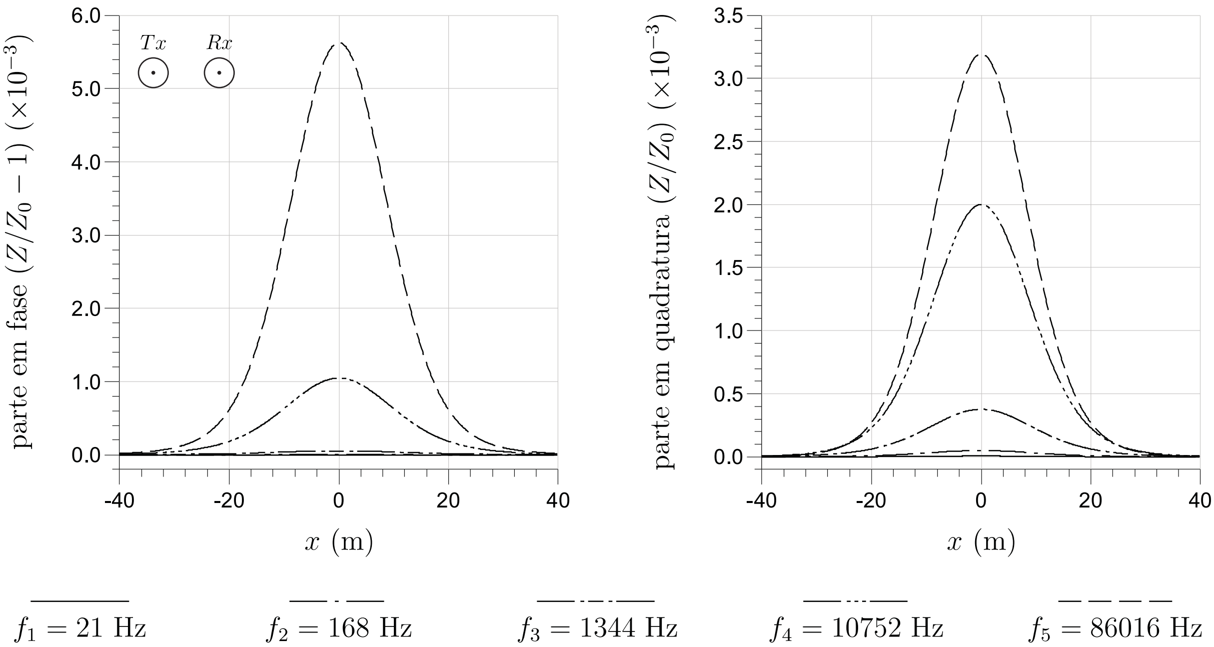


Figura 4.14: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

E os parâmetros do terceiro modelo estão na tabela 4.3, em que a mudança foi no ℓ, de 1 m para 100 m, aumentando em 100 vezes a separação Tx– Rx. Os perfis correspondentes para o mesmo grupo e ordem dos arranjos estão nas figuras 4.15 a 4.19.

Parâmetro	Descrição	Valor
a	Raio da esfera	50 m
σ	Condutividade elétrica da esfera	$1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$
μ	Permeabilidade magnética da esfera	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$ (μ_0)
f_n	N-ésima freqüência da corrente no dipolo transmissor	$21 \times 8^{n-1}$ Hz, $n = 1, \ldots, 5$
m_{Tx}	Momento magnético do dipolo transmissor	$1\ \mathrm{A\,m^2}$
ℓ	Distância transmissor– receptor	100 m
h	Distância vertical (eixo z) do centro da esfera ao plano do levantamento (plano x– y)	100 m
y	Distância perpendicular (eixo y) entre a linha do levantamento (eixo x) e a projeção do centro da esfera no plano x– y	nulo

Tabela 4.3: Descrição dos parâmetros do modelo 3.

Para este modelo tem-se que:

1. A magnitude da resposta da configuração *PAR* continua sendo a mais alta, mas com mudança na ordenação dos demais, tal que *PAR* (pico a pico) > *PERP* > *VCP* > *VCA* > *HCP*;

2. Ocorre modificações na "polaridade" das respostas, em que *PERP* (predominantemente) e *VCP* são positivas e *HCP*, *PAR* e *VCA* são mistas;

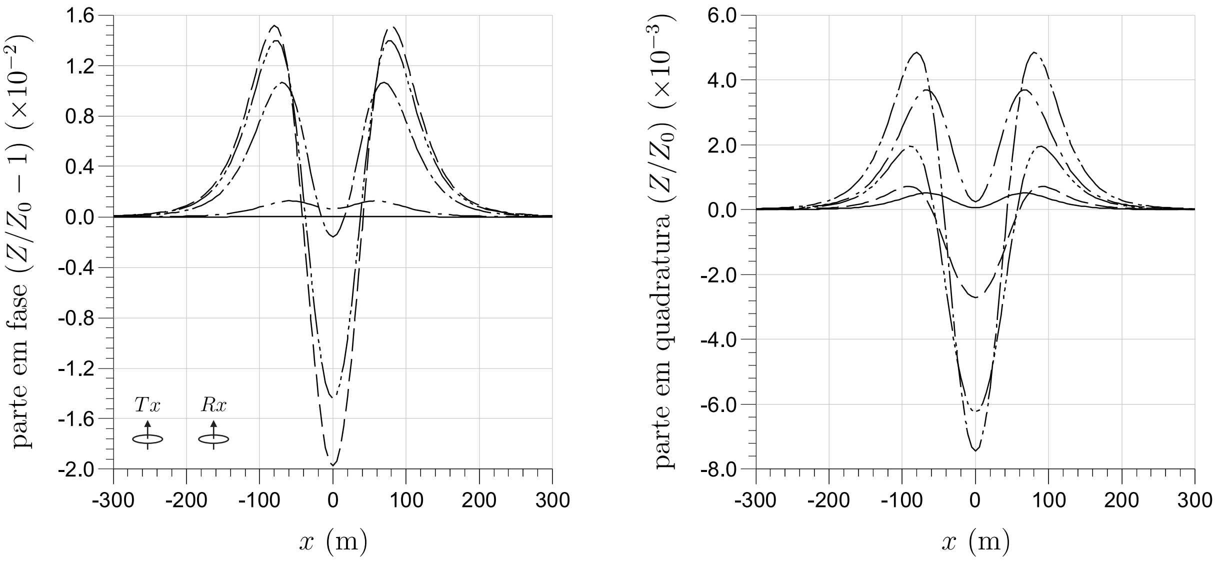
3. *PAR* e *PERP* continuam não simétricos em relação ao centro da esfera, em que o *PAR* fica com um aspecto semelhante ao do *PERP* do modelo 1 e no *PERP* a magnitude da parte negativa é insignificante quando comparada à positiva, sendo esta apresentada deformada;

4. Não há alteração em relação à magnitude versus freqüência para a parte em fase, que é crescente, mas para a parte em quadratura tem-se, em alguns casos, a permutação de f_2 com f_4, cujo motivo encontra-se explicado no item 6;

5. Todas as configurações tiveram suas magnitudes elevadas em 10^5 a 10^6 ordens de grandeza em relação ao modelo 1, visto que como Tx e Rx estão muito mais afastados,

então o campo primário é muito menor, já que este decai com o cubo da distância entre os dipolos (equação 2.11) e, conseqüentemente, a impedância mútua aumenta notavelmente; e

6. Com relação ao aspecto das anomalias, ao aumentar a separação Tx– Rx, aumenta-se o ângulo (θ) entre eles e, para uma mesma posição do transmissor (x), a distância do receptor ao centro da esfera (r) é alterado de forma que comparado com a distância "original" (r^0), tem-se que até $x+\ell < -49{,}5$ m, $r < r^0$ e para $x+\ell > -49{,}5$ m, $r > r^0$. Assim, o θ vai mudar o argumento do polinômio de Legendre e o r no fator geométrico (equações 2.1 a 2.3), este último implicando na quantidade de multipolos. De forma que estes dois fatores é que alteram a forma da anomalia, já que o campo primário só vai variar na magnitude.



$f_1 = 21$ Hz $f_2 = 168$ Hz $f_3 = 1344$ Hz $f_4 = 10752$ Hz $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.15: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *HCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

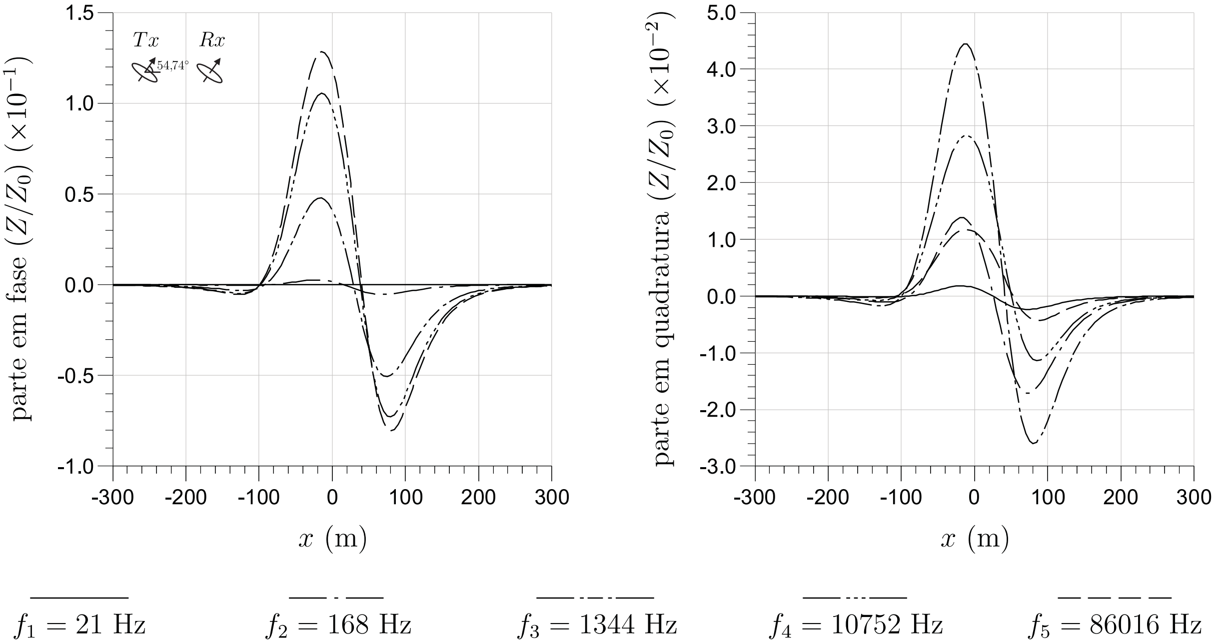


Figura 4.16: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PAR*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

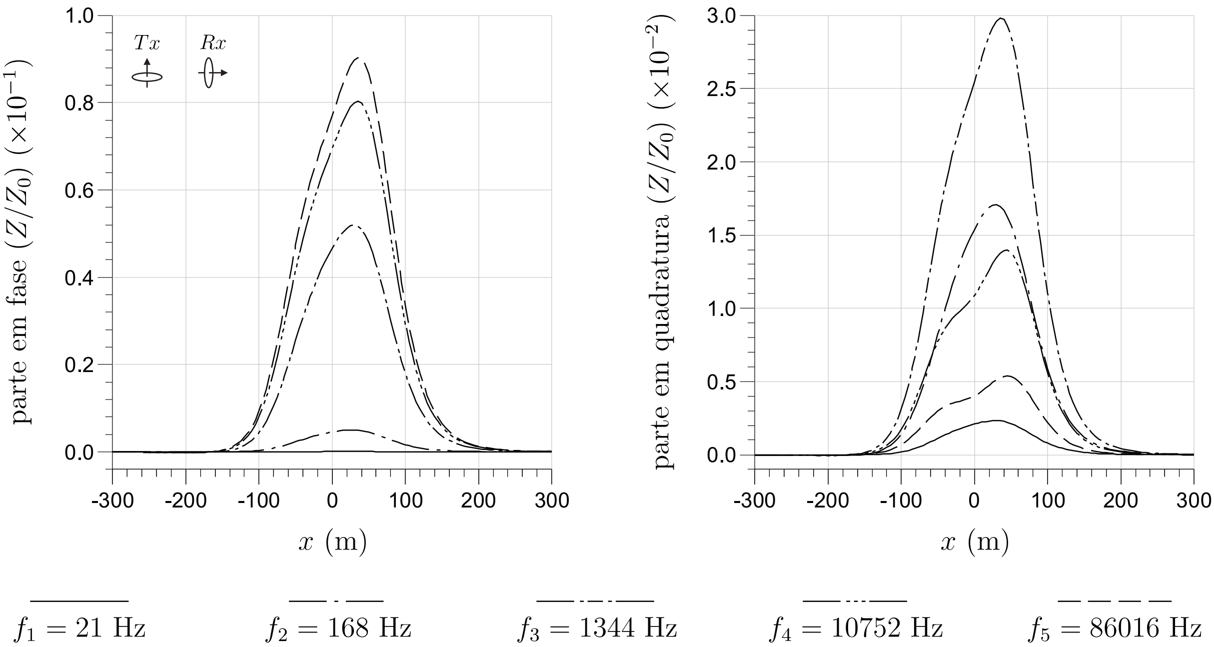


Figura 4.17: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *PERP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

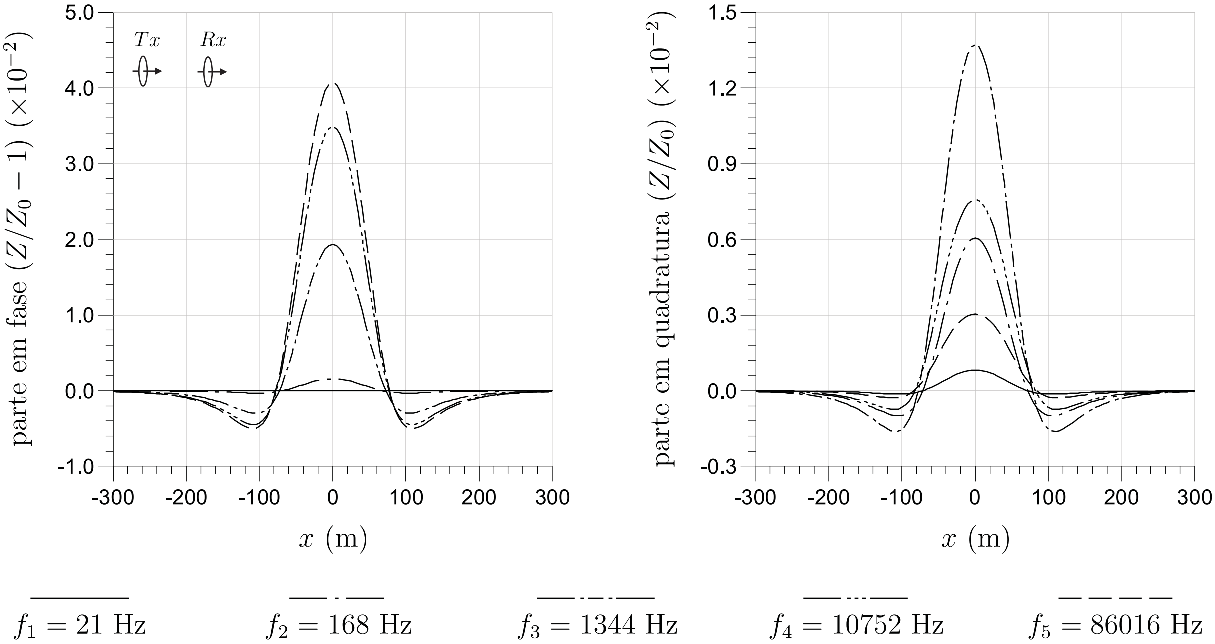


Figura 4.18: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCA*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

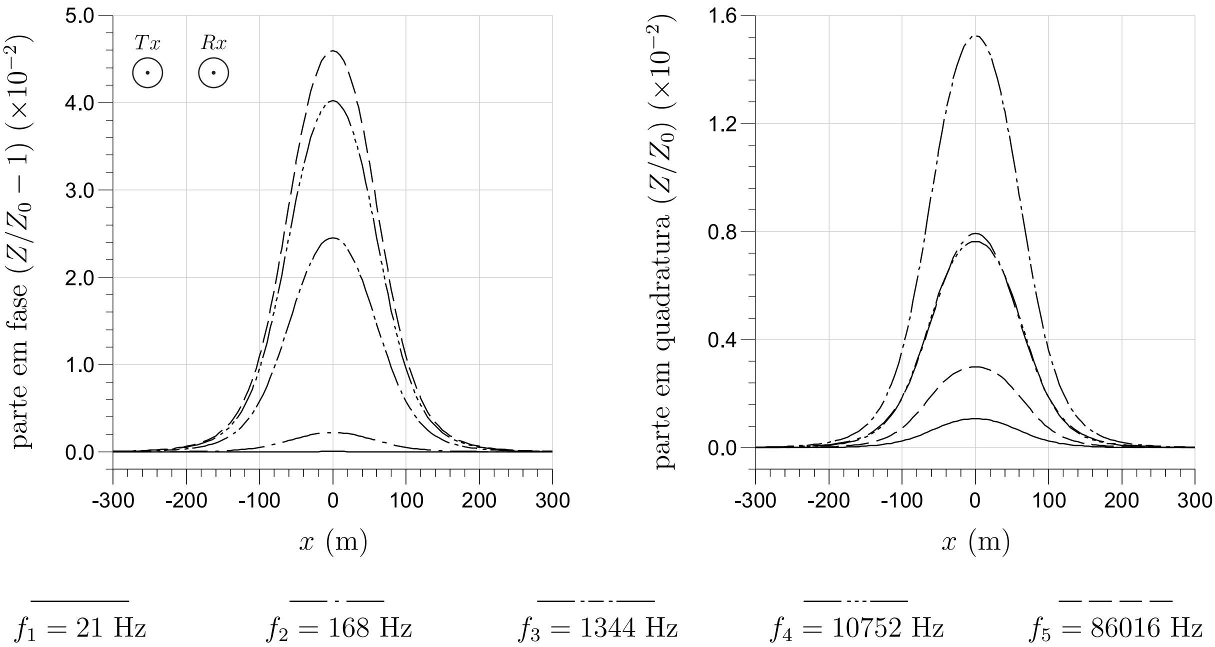


Figura 4.19: Impedância mútua multi-freqüência para o arranjo *VCP*. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

4.2.1 Conclusões Parciais

Pelo exposto,

1. As configurações *HCP*, *VCA* e *VCP* são simétricas em relação ao centro da esfera, permitindo uma primeira estimativa da sua posição espacial;

2. Os arranjos *PAR* e *PERP* não possuem o componente do campo primário no campo total, todavia, apresentam anomalias mais complexas. No *PERP* a forma da anomalia em quadratura é significativamente diferente da em fase (figura 4.17), indicando que a resposta não é puramente dipolar (Frischknecht et al., 1991);

3. A anomalia do *VCP* é completamente positiva. Segundo Frischknecht et al. (1991) devido a esta propriedade um simples perfil pode ser utilizado para distinguir entre um corpo aproximadamente eqüidimensional de um longo cilindro de mesma seção transversal;

4. Uma maior separação entre os dipolos contribui para minimizar o efeito do campo primário no receptor, como também aproximar a bobina transmissora de dimensões finitas em um dipolo magnético oscilante, contudo, distâncias demasiadas podem acarretar em perda do sinal da resposta eletromagnética da esfera, tendo em vista o afastamento entre o transmissor e/ou receptor dela, assim como, infligir o limite da aproximação quase-estática;

5. A magnitude da resposta depende dos parâmetros da esfera e da aquisição, desta forma, a utilização de multi-freqüência é essencial para garantir que pelo menos uma das respostas obtidas seja apreciável, já que se for nula ou próxima disso (lembrar que o ruído está presente), indicará, a princípio, que não há nenhum corpo em subsuperfície, ou ainda, que suas propriedades não diferem consideravelmente da encaixante.

4.3 Análise da Elipse de Polarização

Para esta avaliação utilizamos os mesmos modelos da seção anterior, cujos parâmetros encontram-se nas tabelas 4.1 a 4.3.

As configurações do transmissor foram: vertical (correspondente à posição do transmissor do arranjo *HCP* e *PERP*), horizontal no sentido da aquisição (*VCA*) e inclinado de 54,74° em relação à linha do levantamento (*PAR*).

O horizontal perpendicular à aquisição (*VCP* e *NULL*) não foi utilizado pelo fato dos modelos terem seus levantamentos acima do centro da esfera, de modo que o transmissor só terá o componente m_ϕ, que está no sentido do eixo y e o campo secundário também, dessa forma, como ambos os campos (primário e secundário) estão na mesma direção, não ocorre a polarização elíptica.

Os resultados obtidos estão nas figuras 4.20 a 4.22 para o primeiro modelo, 4.23 a 4.25 para o segundo e 4.26 a 4.28 para o último.

Pela análise desses gráficos pode-se observar que:

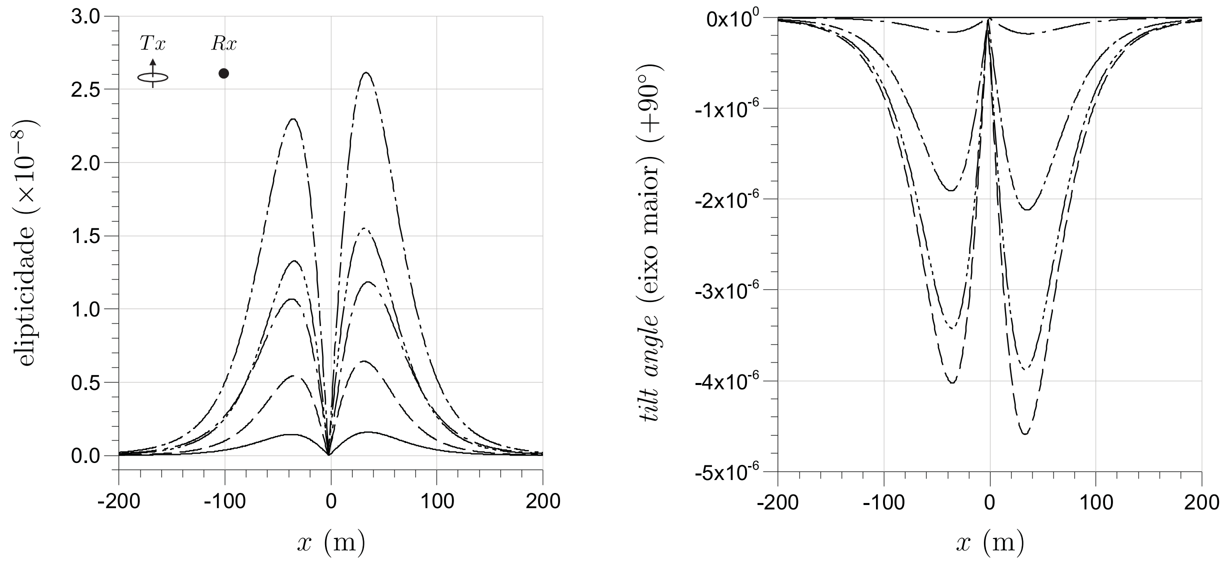
1. A elipticidade é muito pequena, e quanto mais afastada da esfera mais próxima de zero, indicando que a elipse tende a colapsar-se para uma reta;

2. A forma das curvas de elipticidade para o mesmo modelo sugerem que ao variar a posição do transmissor ocorre uma deformação seguida de uma rotação em torno do eixo $x = 0$ (que passa pelo centro da esfera). A rotação pode ser comprovada pelos gráficos do transmissor vertical e horizontal, que são idênticos, exceto pela rotação de 180°, enquanto que a deformação conjuntamente com a rotação, por um dos gráficos anteriores e o inclinado;

3. Para o *tilt angle* tem-se que o ângulo entre o eixo maior e o plano da aquisição (no caso o eixo x), varia com pequena amplitude em torno da direção do campo primário na posição do receptor;

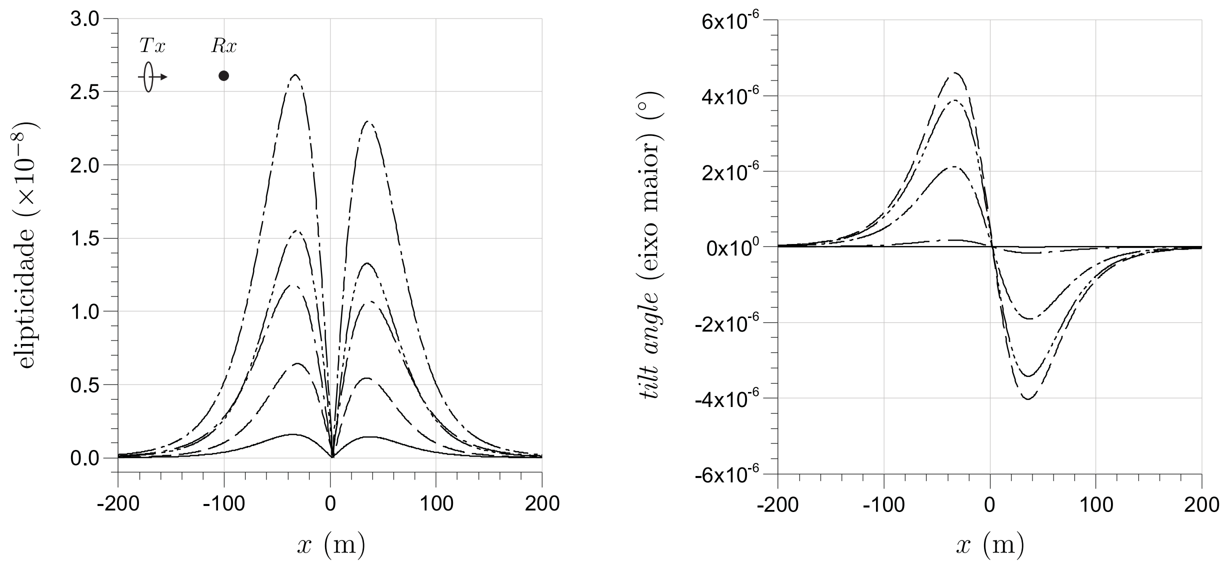
4. A análise do item 2 pode ser extendida para o *tilt angle*, sendo esta mais complexa, já que entra a oscilação em torno da posição do transmissor e, portanto, no mínimo uma parte é refletida em torno dele (isto fica mais evidente nas figuras 4.23 e 4.24); e

5. Em relação à magnitude versus freqüência, a elipticidade segue o comportamento da parte em quadratura da impedância mútua, enquanto que o *tilt angle* o da parte em fase.



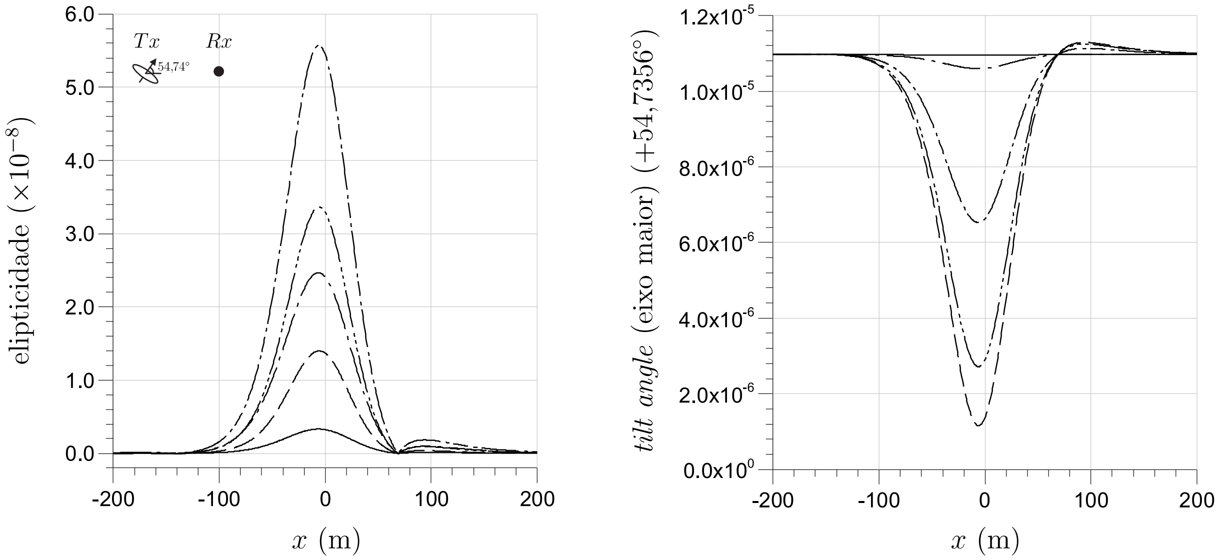
$f_1 = 21$ Hz $\quad$ $f_2 = 168$ Hz $\quad$ $f_3 = 1344$ Hz $\quad$ $f_4 = 10752$ Hz $\quad$ $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.20: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor vertical. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.



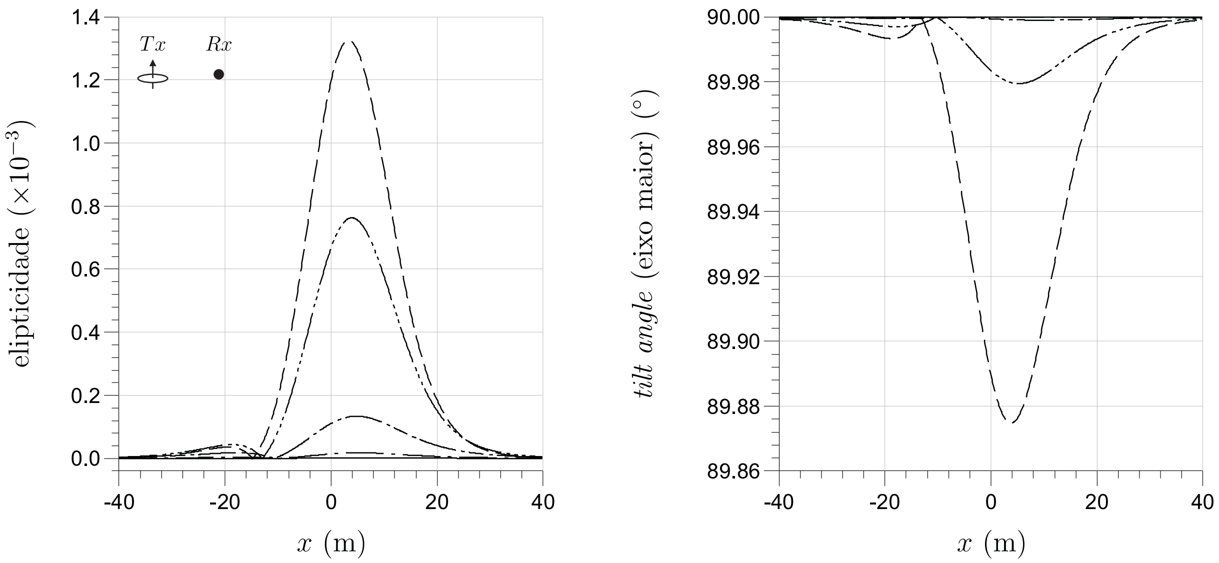
$f_1 = 21$ Hz $\quad$ $f_2 = 168$ Hz $\quad$ $f_3 = 1344$ Hz $\quad$ $f_4 = 10752$ Hz $\quad$ $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.21: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor horizontal (no sentido do levantamento). Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.



$f_1 = 21$ Hz $f_2 = 168$ Hz $f_3 = 1344$ Hz $f_4 = 10752$ Hz $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.22: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor inclinado de 54,74° em relação à linha do levantamento. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.



$f_1 = 21$ Hz $f_2 = 168$ Hz $f_3 = 1344$ Hz $f_4 = 10752$ Hz $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.23: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor vertical. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

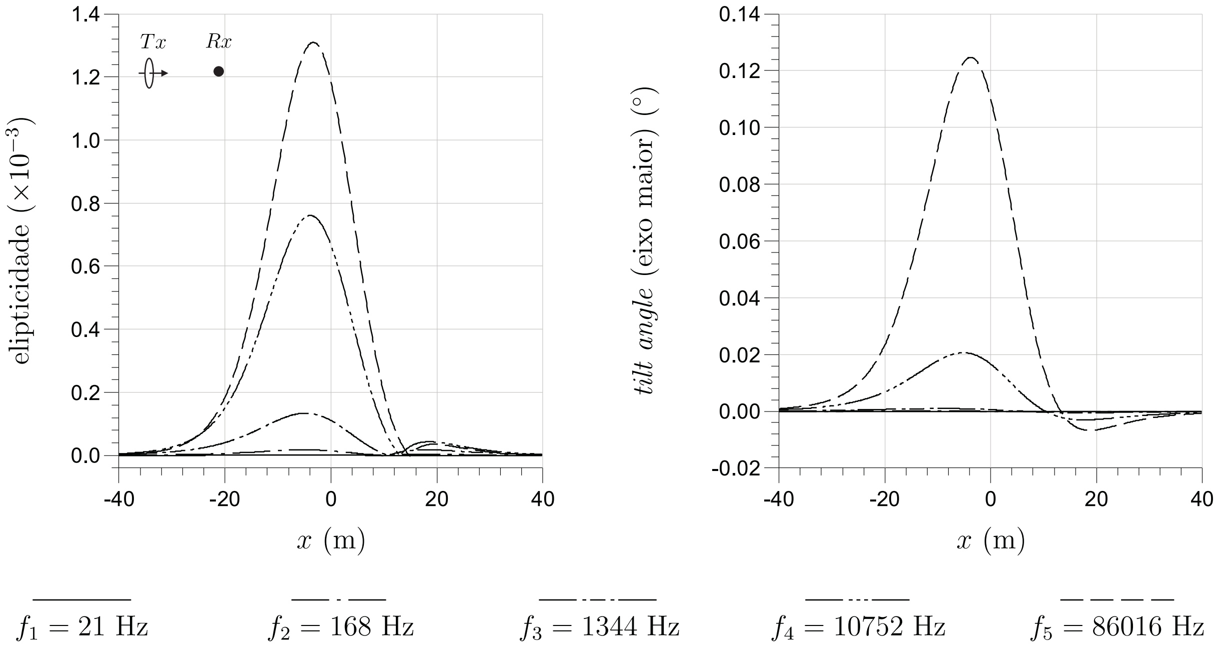


Figura 4.24: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor horizontal (no sentido do levantamento). Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

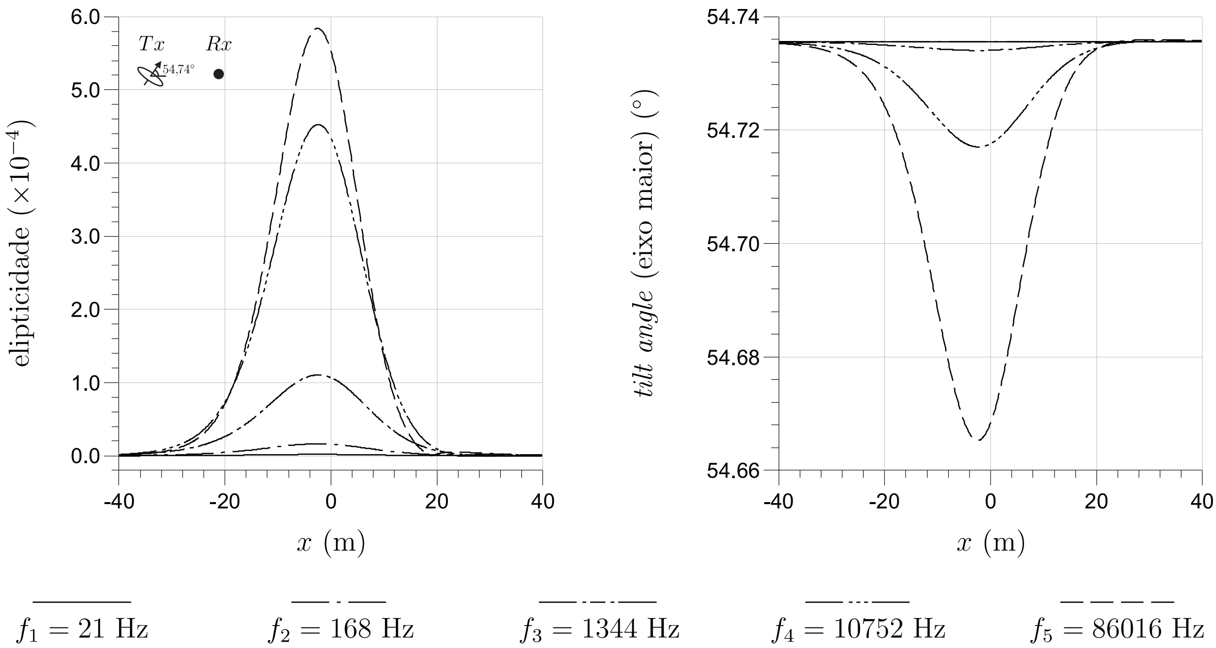
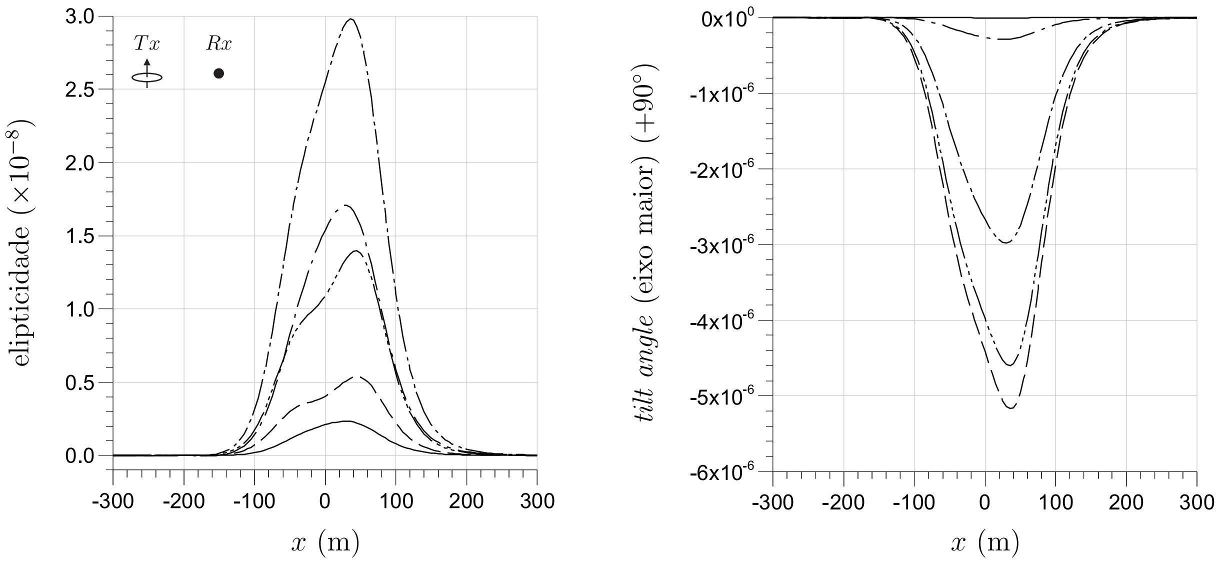
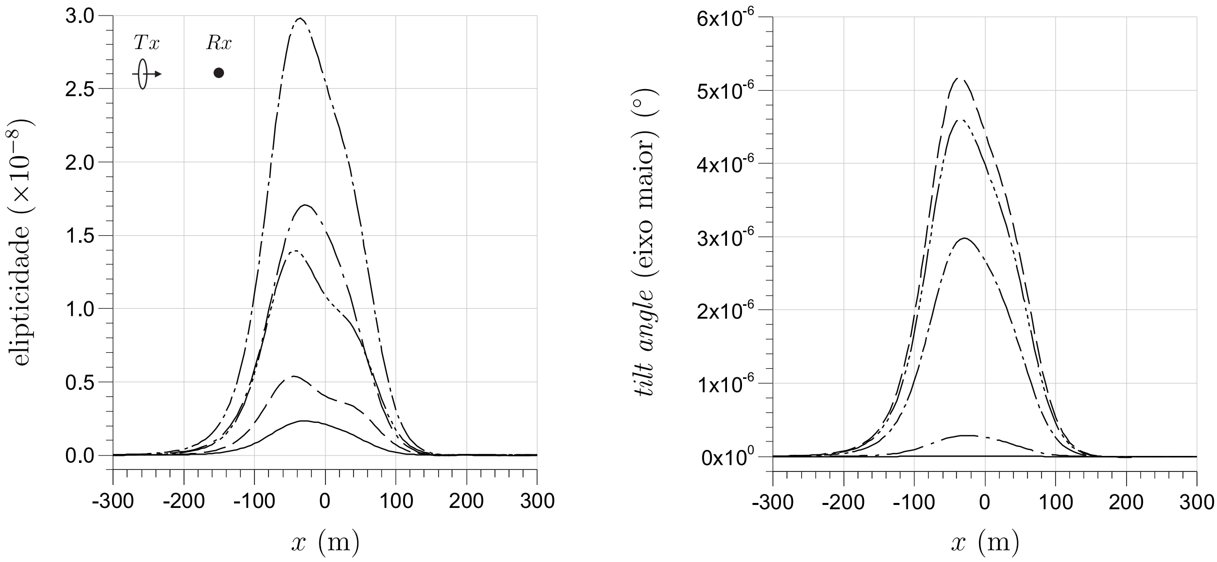


Figura 4.25: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor inclinado de 54,74° em relação à linha do levantamento. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 50$ m, $\ell = 1$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.



$f_1 = 21$ Hz $\quad$ $f_2 = 168$ Hz $\quad$ $f_3 = 1344$ Hz $\quad$ $f_4 = 10752$ Hz $\quad$ $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.26: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor vertical. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.



$f_1 = 21$ Hz $\quad$ $f_2 = 168$ Hz $\quad$ $f_3 = 1344$ Hz $\quad$ $f_4 = 10752$ Hz $\quad$ $f_5 = 86016$ Hz

Figura 4.27: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor horizontal (no sentido do levantamento). Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

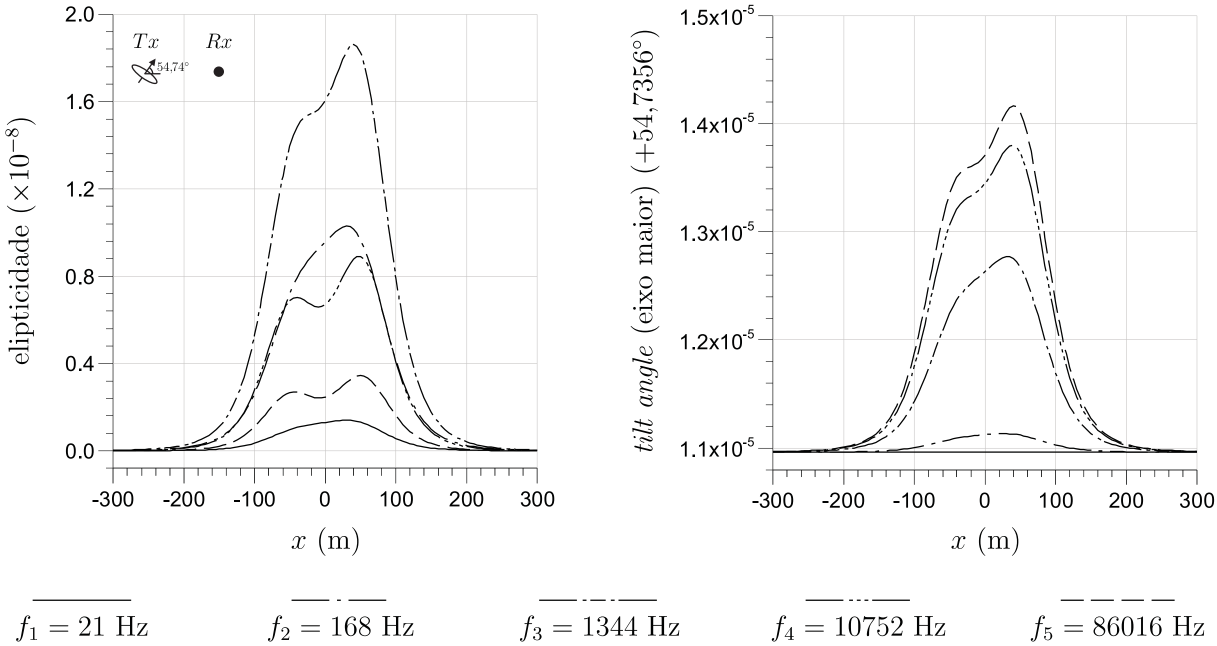


Figura 4.28: Elipse de polarização multi-freqüência para o dipolo trasmissor inclinado de 54,74° em relação à linha do levantamento. Parâmetros: $a = 50$ m, $h = 100$ m, $\ell = 100$ m, $\sigma = 1\ \mathrm{S\,m^{-1}}$, $\mu = \mu_0$, $m_{Tx} = 1\ \mathrm{A\,m^2}$ e $y = 0$.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Recomendações

Foi possível representar na forma computacional a resposta eletromagnética para o modelo de uma esfera condutora e permeável situada num meio infinitamente resistivo sob ação de um dipolo magnético oscilante no intervalo da aproximação quase-estática para até 60 multipolos e *parâmetro resposta* de 10^{-300} a 10^{300} ordens de grandeza com desvio médio relativo de $\pm 10^{-15}$.

Os procedimentos para o desenvolvimento do programa, que calcula a impedância mútua e a elipse de polarização, foram descritos minuciosamente, de forma que a metodologia empregada pode ser utilizada em outros problemas geofísicos de interesse e, embora a forma final tenha sida escrita na linguagem *Fortran 90/95*, estes procedimentos são válidos para qualquer linguagem de programação.

A análise qualitativa da impedância mútua para três modelos sintéticos permitiu observar que a magnitude e forma da anomalia sofrem influência de muitos fatores, portanto, a escolha dos parâmetros da aquisição são de fundamental importância para o sucesso da pesquisa, de modo que: (i) os arranjos *HCP*, *VCA* e *VCP* possuem perfis simétricos em relação ao centro da esfera, sendo este último sempre positivo, enquanto que *PAR* e *PERP*, apesar de não terem acoplamento com o campo primário, possuem anomalias mais complexas, dificultando sua interpretação; (ii) um maior afastamento entre transmissor e receptor reduz a intensidade do campo primário no receptor, aumenta a magnitude da resposta, e altera a forma da anomalia; e (iii) o aumento da freqüência modifica a magnitude da resposta: a parte em fase tende a aumentar, enquanto que a em quadratura continua dependente dos parâmetros do corpo e da aquisição.

A avaliação qualitativa da elipse de polarização, para os mesmos modelos utilizados na impedância mútua, indicam que: (i) a elipse tende a colapsar-se para uma reta (a elipticidade é menor que 10^{-3}); (ii) o *tilt angle* varia com pequena amplitude em torno da direção do campo primário na posição do receptor; e (iii) a freqüência altera a magnitude da resposta, de forma que a elipticidade segue o padrão de comportamento da parte em quadratura da impedância mútua, enquanto que o *tilt angle* da parte em fase.

Assim, o emprego do programa em áreas em que se tenha uma noção do corpo pode contribuir para o sucesso da pesquisa, tendo em vista que já se pode ir em campo prevendo os resultados a serem obtidos. Neste caso, o campo serve de verificação da hipótese. E quanto às áreas virgens, a confirmação de que os parâmetros escolhidos para o levantamento permitem a obtenção de resultados satisfatórios, para diferentes modelos do corpo, incrementa o êxito da aquisição.

Dessa forma, possibilita sua utilização como ferramenta de modelagem e interpretação nos trabalhos de pesquisa, bem como material didático nas disciplinas de geofísica correlatas.

Além disso, o programa admite a incorporação de novos algoritmos (subrotinas), haja vista que é de livre distribuição, permitindo sua adaptação a estudos mais específicos, bem como a utilização das suas subrotinas em outros programas de interesse.

O modelo proposto pode ainda ter suas funcionalidades ampliadas ao inserir condições de relevo e deslocamentos sinuosos do transmissor e/ou receptor.

Agradecimentos

Universidade Federal da Bahia – UFBA, pelos conhecimentos adquiridos.

Hédison K. Sato pela oportunidade de tê-lo como orientador, tornando possível a realização desta pesquisa.

Jacira C. B. de Freitas e Olivar A. L. de Lima membros da comissão examinadora pelas críticas e sugestões.

Amin Bassrei, coordenador do curso de Geofísica, por todo estímulo e cooperação dispensados.

Todos os professores pelo ensino e conselhos durante nosso convívio acadêmico, em particular, Milton J. Porsani, Joaquim X. C. Neto, Luiz C. C. Gomes e Telésforo M. Marques.

CPGG/UFBA, em especial Joaquim B. Lago e Ana M. d'Ó P. de Aragão, pela concessão do laboratório de informática e infraestrutura, indispensável para o desenvolvimento dos trabalhos.

Sociedade Brasileira de Geofísica – SBGf, pelo patrocínio na forma de bolsa de estudos.

Meus familiares pelo constante incentivo e apoio tão necessários nesta jornada.

Colegas de curso pelo companheirismo e críticas construtivas, em especial Jeferson A. C. de Andrade, Joelson C. Batista, Moisés V. Pinto, Quézia C. dos Santos, Felipe A. Terra e Silmara L. R. Oliveira.

APÊNDICE A

Dedução para o Arranjo *Parallel*

Sato (2005) mostra que as linhas de campo de um dipolo magnético são da forma:

$$r = r_0 \operatorname{sen}^2(\theta) \tag{A.1}$$

Queremos um ângulo tal que as linhas de campo do dipolo indutor são perpendiculares no receptor. Pela figura A.1, temos que a linha de campo é $\perp$ no Rx em $z'_{\text{máx}}$, logo:

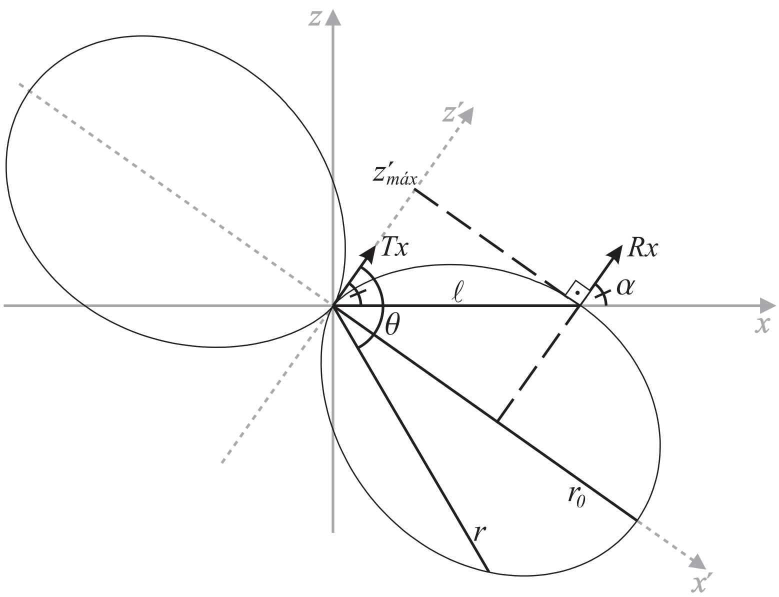


Figura A.1: Esquema do arranjo *parallel*.

$$\cos(\alpha) = \frac{z'_{\text{máx}}}{\ell} \tag{A.2}$$

e pela equação A.1:

$$\ell = r_0 \operatorname{sen}^2(\alpha) \tag{A.3}$$

dessa forma:

$$z'_{\text{máx}} = r_0 \operatorname{sen}^2(\alpha) \cos(\alpha) \tag{A.4}$$

e como α é um ângulo em que $z^{'}$ é máximo, isto é, $\mathrm{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)$ é um valor máximo, então:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\big(\mathrm{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)\big) = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 54{,}74^\circ \tag{A.5}$$

Portanto, o arranjo *parallel* é aquele cujo transmissor e receptor estão em paralelo, mas o acoplamento é nulo, ou seja, o receptor não capta o campo primário. E para isto, basta fazer um ângulo de aproximadamente 54,74° entre o plano do levantamento e o eixo do dipolo.

APÊNDICE B

Procedimentos Computacionais Adicionais para o Cálculo da Razão $\dfrac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)}$

De modo a averiguar o método que melhor resultado apresentasse, mais outros três foram testados, todos fornecidos por Abramowitz e Stegun (1970).

O primeiro deles sendo da forma:

$$\begin{aligned} I_{n+\frac{1}{2}}(z) = & \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,(2z)^{-1}\left[\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!\,(-2z)^k}\right)e^{z}-\right.\\ & \left.-(-1)^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!\,(2z)^k}\right)e^{-z}\right], \quad n\in\mathbb{N}^* \text{ e } z\in\mathbb{C} \end{aligned} \tag{B.1}$$

logo,

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} = \frac{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\overbrace{\frac{(n+k)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!\,(-2z)^k}}^{^1A_k}\right)-(-1)^n\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\overbrace{\frac{(n+k)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!\,(2z)^k}}^{^2A_k}\right)e^{-2z}}{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\underbrace{\frac{(n+k-1)\,!}{k\,!\,(n-k-1)\,!\,(-2z)^k}}_{^3A_k}\right)-(-1)^{n-1}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\underbrace{\frac{(n+k-1)\,!}{k\,!\,(n-k-1)\,!\,(2z)^k}}_{^4A_k}\right)e^{-2z}} \tag{B.2}$$

que por relações de recorrência:

$$\begin{aligned} {}^1A_1 &= \frac{n(n+1)}{-2z}\,; \quad {}^1A_k = \frac{(n-k+1)(n+k)}{-2kz}\ {}^1A_{k-1}\,, \quad k>1\\ {}^2A_1 &= \frac{n(n+1)}{2z}\,; \quad {}^2A_k = \frac{(n-k+1)(n+k)}{2kz}\ {}^2A_{k-1}\,, \quad k>1\\ {}^3A_1 &= \frac{n(n-1)}{-2z}\,; \quad {}^3A_k = \frac{(n+k-1)(n-k)}{-2kz}\ {}^3A_{k-1}\,, \quad k>1\\ {}^4A_1 &= \frac{n(n-1)}{2z}\,; \quad {}^4A_k = \frac{(n+k-1)(n-k)}{2kz}\ {}^4A_{k-1}\,, \quad k>1 \end{aligned} \tag{B.3}$$

E os outros dois utilizando-se da função de Bessel de primeira espécie e ordem $n+\frac{1}{2}$, sendo o primeiro:

$$I_{n+\frac{1}{2}}(z) = e^{-\frac{1}{2}\pi i(n+\frac{1}{2})}\,J_{n+\frac{1}{2}}(v)\,,\ \text{com } v = z\,e^{\frac{1}{2}\pi i}\,,\ -\pi<\arg z<\tfrac{1}{2}\pi\,,\ n\in\mathbb{Z} \text{ e } z\in\mathbb{C} \tag{B.4}$$

de forma que:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(v) = \left(\tfrac{1}{2}\,v\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\,v^2\right)^k}{k\,!\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)} \tag{B.5}$$

por conseguinte,

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} = \tfrac{1}{2}\,v\,e^{-\frac{1}{2}\pi i}\, \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\,v^2\right)^k}{k\,!\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)}}^{{}^1A_k}}{\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\,v^2\right)^k}{k\,!\,\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}}_{{}^2A_k}} \tag{B.6}$$

e sabendo-se que $n > 0$, então:

$$\begin{aligned} {}^1A_0 &= \frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\,\ldots\,\cdot(2n+1)\,\pi^{\frac{1}{2}}}\,; \quad {}^1A_k = \frac{-\frac{1}{4}\,v^2}{k\,\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}\ {}^1A_{k-1}\,,\quad k>0 \\ {}^2A_0 &= \frac{2^{n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\,\ldots\,\cdot(2n-1)\,\pi^{\frac{1}{2}}}\,; \quad {}^2A_k = \frac{-\frac{1}{4}\,v^2}{k\,\left(n+k-\frac{1}{2}\right)}\ {}^2A_{k-1}\,,\quad k>0 \end{aligned} \tag{B.7}$$

E o segundo, como:

$$j_n(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\,u}}\ J_{n+\frac{1}{2}}(u) \qquad n \in \mathbb{Z} \text{ e } u \in \mathbb{C} \tag{B.8}$$

onde:

$$\begin{aligned} & j_n(u) = f_n(u)\ \mathrm{sen}\,(u) + (-1)^{n+1} f_{-n-1}(u)\ \cos(u) \\ & \text{e} \begin{cases} f_0(u) = u^{-1}\,; \quad f_1(u) = u^{-2}\,; \\ f_n(u) = -f_{n-2}(u) + (2n-1)\,u^{-1} f_{n-1}(u) \end{cases} \end{aligned} \tag{B.9}$$

conseqüentemente (rever equação B.4):

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)} = e^{-\frac{1}{2}\pi i}\ \frac{f_n(v)\ \mathrm{sen}\,(v) + (-1)^{n+1} f_{-n-1}(v)\ \cos(v)}{f_{n-1}(v)\ \mathrm{sen}\,(v) + (-1)^{n} f_{-n}(v)\ \cos(v)} \tag{B.10}$$

Realizados os testes, verificou-se que esses três procedimentos tiveram as mesmas limitações dos métodos descritos na seção 3.1.1, equações 3.7 e 3.11, e como estes são mais adequados computacionalmente, já que precisam de menos operações para serem resolvidos, ou seja, do tipo e quantidade de etapas a serem realizadas, então elegemos estes para a mensuração da razão $\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(z)}{I_{n-\frac{1}{2}}(z)}$, após a sua junção.

Referências Bibliográficas

Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1970) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover Publications, New York.

Best, M. E. e Shammas, B. R. (1979) A general solution for a spherical conductor in a magnetic dipole field, Geophysics, **44**(4):781–800.

Frischknecht, F. C.; Labson, V. F.; Spies, B. R. e Anderson, W. L. (1991) Profiling methods using small sources, In: M. N. Nabighian, ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*, vol. 2, application, parts A and B de *Investigations in geophysics no. 3*, cap. 3, pp. 105–270, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.

Fuller, B. D. (1971) Electromagnetic response of a conductive sphere surrounded by a conductive shell, Geophysics, **36**(1):9–24.

Grant, F. S. e West, G. F. (1965) Interpretation theory in applied geophysics, McGraw-Hill, New York.

Guedes, C. D. (1979) Indução eletromagnética em um sistema de multi-camadas esféricas condutoras e permeáveis, separadas pelo vácuo, Dissert. de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Halliday, D.; Resnick, R. e Walker, J. (1996) Fundamentos de Física, vol. 3, LTC, Rio de Janeiro, Brasil.

Harrington, R. F. (1961) Time-harmonic electromagnetic fields, McGraw-Hill, New York.

Isola, V. e Martins, R. A. (2003) A história do eletromagnetismo, Relatório, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, [on line] [citado 15 julho 2007]. Available from World Wide Web: < http://www.ifi.unicamp.br/%7Elunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2003/992558ViniciusIsola-RMartins_F809_RF09_0.pdf >.

Lodha, G. S. e West, G. F. (1976) Practical airbone EM (AEM) interpretation using a sphere model, Geophysics, **41**(6A):1157–1169.

Nabighian, M. N. (1970) Quasi-static transient response of a conducting permeable sphere in a dipolar field, Geophysics, **35**(2):303–309.

Nabighian, M. N. (1971) Quasi-static transient response of a conducting permeable two-layer sphere in a dipolar field, Geophysics, **36**(1):25–37.

Palandi, J.; Figueiredo, D. B.; Porto, A. V. L.; Denardin, J. C. e Magnago, P. R. (2003) Eletromagnetismo, Notas de aula, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil, [on line] [citado 15 julho 2007]. Available from World Wide Web: < http://www.ufsm.br/gef/form_eletromag.html >.

Sampaio, E. E. S. (2006) Campo eletromagnético devido a uma linha de dipolos elétricos em um meio condutor, Editora da Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Sato, H. K. (2002) Métodos Elétricos, Notas de aula, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Sato, H. K. (2005) Métodos Potenciais, Notas de aula, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Singh, S. K. (1973) Electromagnetic transient response of a conducting sphere embedded in a conductive medium, Geophysics, **38**(5):864–893.

Smith, B. D. e Ward, S. H. (1974) On the computation of polarization ellipse parameters, Geophysics, **39**(6):867–869.

Thomas, G. L. (2003) Eletricidade e magnetismo: uma pequena cronologia, Curso eletrônico, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, [on line] [citado 15 julho 2007]. Available from World Wide Web: < http://www.if.ufrgs.br/fis/EMVirtual/crono/crono.htm >.

Wait, J. R. (1955) Mutual electromagnetic coupling of loops over a homogeneous ground, Geophysics, **20**(3):630–637.

Wait, J. R. e Spies, K. P. (1969) Quasi-static transient response of a conducting permeable sphere, Geophysics, **34**(5):789–792.

Ward, S. H. e Hohmann, G. W. (1988) Electromagnetic theory for geophysical applications, In: M. N. Nabighian, ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*, vol. 1, theory de *Investigations in geophysics no. 3*, cap. 4, pp. 131–311, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.

ANEXO I

Programa de Computador

```
      subroutine esfera(sig,u,f,a,h,x,y,l,mTx,thetaTx,phiTx,thetaRx,
     &   phiRx,nmax,HRx,ep,erro)
!     =================================================================
!     Calcula a impedância mútua (Z/Z0 e Z/Z0 - 1) e a elipticidade e o
!     "tilt angle" do eixo maior e menor da elipse de polarização para o
!     modelo de uma esfera condutora e permeável num meio infinitamente
!     resistivo sob a ação de um dipolo magnético oscilante no intervalo
!     da aproximação quase-estática.
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         sig      ->  condutividade elétrica da esfera (>0)
!         u        ->  permeabilidade magnética da esfera (>0)
!         f        ->  freqüência (>0)
!         a        ->  raio da esfera (>0)
!         h        ->  distância vertical (eixo z) do centro da esfera
!                        ao plano do levantamento (plano x-y) (>=a)
!         x        ->  posição do Tx (eixo x)
!         y        ->  distância perpendicular (eixo y) entre a linha do
!                        levantamento (eixo x) e a projeção do centro da
!                        esfera no plano x-y
!         l        ->  distância Tx-Rx (>0)
!         mTx      ->  momento magnético do Tx (>0)
!         thetaTx  ->  ângulo em graus entre o eixo da bobina Tx e o
!                        eixo z (vertical)
!         phiTx    ->  ângulo em graus entre a projeção do eixo da
!                        bobina Tx no plano x-y (plano do levantamento)
!                        e o eixo x (linha do levantamento)
!         thetaRx  ->  ângulo em graus entre o eixo da bobina Rx e o
!                        eixo z (vertical)
!         phiRx    ->  ângulo em graus entre a projeção do eixo da
!                        bobina Rx no plano x-y (plano do levantamento)
!                        e o eixo x (linha do levantamento)
!         nmax     ->  número máximo de multipolos (1<=nmax<=60)
!
!       Saída:
!
!         HRx      ->  impedância mútua
!                        HRx(1) -> razão do campo magnético secundário
!                          pelo primário (Z/Z0 - 1) (em %)
!                        HRx(2) -> razão do campo magnético total pelo
!                          primário (Z/Z0) (em %)
!         ep       ->  elipse de polarização
!                        ep(1) -> elipticidade
!                        ep(2) -> "tilt angle" do eixo maior (em graus)
!                        ep(3) -> "tilt angle" do eixo menor (em graus)
!         erro     ->  indicador de erro
```

```
!                    erro=0,  sem erro
!                    erro=1 à 59, indica que o valor máximo de
!                      multipolos não pode ser calculado, tendo sido
!                      até o valor igual ao do erro
!                    erro=61, valor indevido de pelo menos um dos
!                      parâmetros (sig,u,f,a,h,x,y,l,mTx)
!                    erro=62, erro na subrotina testar
!                    erro=63, erro na subrotina ordenar
!                      (t_rHr - termos do somatório radial Hradial)
!                    erro=64, erro na subrotina ordenar
!                      (t_rHt - termos do somatório radial Htheta)
!                    erro=65, erro na subrotina ordenar
!                      (t_tHt - termos do somatório transversal
!                      Htheta)
!                    erro=66, erro na subrotina ordenar
!                      (t_tHp - termos do somatório transversal Hphi)
!
!     -------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: testar, fc_resp, legendre, ordenar, somar
!     -------------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Grant, F.S.; West, G.F. (1965) Interpretation theory
!                    in applied geophysics. McGraw-Hill, USA.
!
!                  Sampaio, E.E.S. (2006) Campo eletromagnético devido
!                    a uma linha de dipolos elétricos em um meio
!                    condutor. 1a ed. Ed. EDUFBA, Salvador.
!
!     -------------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ===================================================================
      implicit none
      integer :: n,nmax,n_max,ikey,erro
      real(8) :: sig,u,f,w,a,h,x,y,l,mTx,thetaTx,phiTx,thetaRx,phiRx,
     &   r0,r,theta,alfaTx,alfaRx,tdec,presp,P0n_2,P0n_1,P0n,P1n_2,
     &   P1n_1,P1n,mr,mt,mp,beta,mx,my,mz,phix,phiy,phiz,Hx02,Hy02,Hz02,
     &   wt1,wt2,pi
      real(8),dimension(1:4,1:60) :: termo_leg
      real(8),dimension(1:3) :: ep
      real(8),allocatable :: tmp_r1(:),tmp_r2(:),tmp_i1(:),tmp_i2(:)
      complex(8) :: z,fresp,s_rHr,s_rHt,s_tHt,s_tHp,Hsr,Hst,Hsp,
     &   Hz,Hx,Hy,Hp,HpRx,HsRx
      complex(8),dimension(1:2) :: HRx
      complex(8),dimension(1:60) :: fresp_tdec,t_rHr,t_rHt,t_tHt,t_tHp
      erro=0
      termo_leg=0.D0
      fresp_tdec=(0.D0,0.D0)
      t_rHr=(0.D0,0.D0)
      t_rHt=(0.D0,0.D0)
      t_tHt=(0.D0,0.D0)
      t_tHp=(0.D0,0.D0)

      if (sig.le.0.or.u.le.0.or.f.le.0.or.a.le.0.or.h.lt.a.or.l.le.0.or.
     &   mTx.le.0.or.nmax.le.0.or.nmax.gt.60) then
         erro=61
         return
      end if

      pi=dacos(-1.D0)
      w=2.D0*pi*f
      z=a*cdsqrt(dcmplx(0.D0,sig*u*w))
      presp=sig*u*w*a*a
```

```
 r0=dsqrt(x**2.D0+h**2.D0+y**2.D0)
 r=dsqrt((x+l)**2.D0+h**2.D0+y**2.D0)
 alfaTx=180.D0/pi*datan2(dsqrt(h**2.D0+y**2.D0),dabs(x))
 alfaRx=180.D0/pi*datan2(dsqrt(h**2.D0+y**2.D0),dabs(x+l))
 theta=180.D0/pi*dacos((r0**2.D0+r**2.D0-l**2.D0)/(2.D0*r0*r))
 beta=180.D0/pi*datan2(dabs(y),h)

 mx=mTx*dsind(thetaTx)*dcosd(phiTx)
 my=mTx*dsind(thetaTx)*dsind(phiTx)
 mz=mTx*dcosd(thetaTx)

 if (x.le.0) then
    mr=-mx*dcosd(alfaTx)+my*dsind(alfaTx)*dsind(beta)+
&      mz*dsind(alfaTx)*dcosd(beta)
    mt=mx*dsind(alfaTx)+my*dcosd(alfaTx)*dsind(beta)+
&      mz*dcosd(alfaTx)*dcosd(beta)
 else
    mr=mx*dcosd(alfaTx)+my*dsind(alfaTx)*dsind(beta)+
&      mz*dsind(alfaTx)*dcosd(beta)
    mt=mx*dsind(alfaTx)-my*dcosd(alfaTx)*dsind(beta)-
&      mz*dcosd(alfaTx)*dcosd(beta)
 end if
 mp=my*dcosd(beta)-mz*dsind(beta)

 call testar(dcmplx((a/(r*r0))**3.D0),erro)
 if (erro.eq.0) then
    tdec=(a/(r*r0))**3.D0
 else
    erro=62
    return
 end if

 ikey=1
 n=1
 do while (ikey.eq.1.and.n.le.nmax)
    call fc_resp(z,n,u,presp,fresp,erro)
    if (erro.eq.0) then
       fresp_tdec(n)=fresp*tdec
       call testar(fresp_tdec(n),erro)
       tdec=tdec*((a**2.D0)/(r*r0))
       call testar(dcmplx(tdec),erro)
       n=n+1
    else
      ikey=0
    end if
 end do
 n_max=n-1

 erro=0
 n=1
 do while (n.le.n_max)
    call legendre(theta,n,P0n_2,P0n_1,P0n,P1n_2,P1n_1,P1n)
    P0n_2=P0n_1
    P0n_1=P0n
    P1n_2=P1n_1
    P1n_1=P1n
    termo_leg(1,n)=n*(n+1.D0)*P0n
    termo_leg(2,n)=n*P1n
    if (theta.ne.0.D0.and.theta.ne.180.D0) then
       termo_leg(3,n)=(n**2.D0*P0n)-
&         ((n*P1n*dcosd(theta))/(dsind(theta)*(n+1.D0)))
```

```
         termo_leg(4,n)=(n*P1n)/(dsind(theta)*(n+1.D0))
      else
         termo_leg(3,n)=(n**2.D0*P0n)
         termo_leg(4,n)=0.D0
      end if
      n=n+1
   end do

   t_rHr(1:n_max)=fresp_tdec(1:n_max)*termo_leg(1,1:n_max)
   t_rHt(1:n_max)=fresp_tdec(1:n_max)*termo_leg(2,1:n_max)
   t_tHt(1:n_max)=fresp_tdec(1:n_max)*termo_leg(3,1:n_max)
   t_tHp(1:n_max)=fresp_tdec(1:n_max)*termo_leg(4,1:n_max)

   allocate (tmp_r1(1:n_max),tmp_r2(1:n_max),
  &   tmp_i1(1:n_max),tmp_i2(1:n_max))

   tmp_r1(1:n_max)=dreal(t_rHr(1:n_max))
   tmp_i1(1:n_max)=dimag(t_rHr(1:n_max))

   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_r1,1,n_max,tmp_r2,erro)
   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_i1,1,n_max,tmp_i2,erro)

   if (erro.eq.2) then
      erro=63
      return
   end if

   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_r2,tmp_r1(1))
   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_i2,tmp_i1(1))

   s_rHr=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))

   tmp_r1(1:n_max)=dreal(t_rHt(1:n_max))
   tmp_i1(1:n_max)=dimag(t_rHt(1:n_max))

   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_r1,1,n_max,tmp_r2,erro)
   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_i1,1,n_max,tmp_i2,erro)

   if (erro.eq.2) then
      erro=64
      return
   end if

   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_r2,tmp_r1(1))
   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_i2,tmp_i1(1))

   s_rHt=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))

   tmp_r1(1:n_max)=dreal(t_tHt(1:n_max))
   tmp_i1(1:n_max)=dimag(t_tHt(1:n_max))

   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_r1,1,n_max,tmp_r2,erro)
   call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_i1,1,n_max,tmp_i2,erro)

   if (erro.eq.2) then
      erro=65
      return
   end if

   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_r2,tmp_r1(1))
   call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_i2,tmp_i1(1))
```

```
 s_tHt=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))

 tmp_r1(1:n_max)=dreal(t_tHp(1:n_max))
 tmp_i1(1:n_max)=dimag(t_tHp(1:n_max))

 call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_r1,1,n_max,tmp_r2,erro)
 call ordenar(1,n_max,1,n_max,tmp_i1,1,n_max,tmp_i2,erro)

 if (erro.eq.2) then
    erro=66
    return
 end if

 call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_r2,tmp_r1(1))
 call somar(1,n_max,1,n_max,tmp_i2,tmp_i1(1))

 s_tHp=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))

 deallocate (tmp_r1,tmp_r2,tmp_i1,tmp_i2)

 Hsr=-mr*s_rHr+mt*s_rHt
 Hst=-mr*s_rHt-mt*s_tHt
 Hsp=-mp*s_tHp

 if ((x+l).le.0.D0) then
    Hx=-Hsr*dcosd(alfaRx)+Hst*dsind(alfaRx)
    Hy=Hsr*dsind(alfaRx)*dsind(beta)+
&      Hst*dcosd(alfaRx)*dsind(beta)+Hsp*dcosd(beta)
    Hz=Hsr*dsind(alfaRx)*dcosd(beta)+
&      Hst*dcosd(alfaRx)*dcosd(beta)-Hsp*dsind(beta)
 else
    Hx=Hsr*dcosd(alfaRx)+Hst*dsind(alfaRx)
    Hy=Hsr*dsind(alfaRx)*dsind(beta)-
&      Hst*dcosd(alfaRx)*dsind(beta)+Hsp*dcosd(beta)
    Hz=Hsr*dsind(alfaRx)*dcosd(beta)-
&      Hst*dcosd(alfaRx)*dcosd(beta)-Hsp*dsind(beta)
 end if

 HsRx=Hz*dcosd(thetaRx)+Hx*dsind(thetaRx)*dcosd(phiRx)+
&   Hy*dsind(thetaRx)*dsind(phiRx)

 HpRx=(mTx*(2.D0*dcosd(phiTx)*dcosd(phiRx)-dsind(phiTx)*
&   dsind(phiRx))*dsind(thetaTx)*dsind(thetaRx)-
&   dcosd(thetaTx)*dcosd(thetaRx))/(l**3.D0)

 Hp=(mTx*(2.D0*dcosd(phiTx)-dsind(phiTx))*dsind(thetaTx)-
&   dcosd(thetaTx))/(l**3.D0)

 HRx(1)=HsRx/Hp*1.D2
 HRx(2)=(HsRx+HpRx)/Hp*1.D2

 Hx02=dreal(mx+Hx)**2.D0+dimag(mx+Hx)**2.D0
 Hy02=dreal(my+Hy)**2.D0+dimag(my+Hy)**2.D0
 Hz02=dreal(mz+Hz)**2.D0+dimag(mz+Hz)**2.D0

 phix=datan2(dimag(mx+Hx),dreal(mx+Hx))
 phiy=datan2(dimag(my+Hy),dreal(my+Hy))
 phiz=datan2(dimag(mz+Hz),dreal(mz+Hz))

 wt1=datan2(-(Hx02*dsin(2.D0*phix)+Hy02*dsin(2.D0*phiy)+
&   Hz02*dsin(2.D0*phiz)),(Hx02*dcos(2.D0*phix)+
&   Hy02*dcos(2.D0*phiy)+Hz02*dcos(2.D0*phiz)))/2.D0
```

```
      wt2=wt1+pi/2.D0

      ep(1)=dsqrt((Hx02*dcos(wt2+phix)**2.D0+Hy02*dcos(wt2+phiy)**2.D0+
     &   Hz02*dcos(wt2+phiz)**2.D0)/(Hx02*dcos(wt1+phix)**2.D0+
     &   Hy02*dcos(wt1+phiy)**2.D0+Hz02*dcos(wt1+phiz)**2.D0))

      ep(2)=180.D0/pi*datan2(dsqrt(Hz02)*dcos(wt1+phiz),
     &   dsqrt(Hx02*dcos(wt1+phix)**2.D0+Hy02*dcos(wt1+phiy)**2.D0))

      ep(3)=180.D0/pi*datan2(dsqrt(Hz02)*dcos(wt2+phiz),
     &   dsqrt(Hx02*dcos(wt2+phix)**2.D0+Hy02*dcos(wt2+phiy)**2.D0))

      if (n_max.ne.nmax) then
         erro=n_max
      end if

      return
      end subroutine esfera
!
!
!
      subroutine legendre(theta,n,P0n_2,P0n_1,P0n,P1n_2,P1n_1,P1n)
!     ===============================================================
!     Calcula o polinômio (ordem 0) e o polinômio associado (ordem 1) de
!     Legendre de primeira espécie, grau n e argumento cos(theta).
!
!     Para o polinômio de Legendre (ordem 0):
!
!         P_(0)[x] = 1 ;  P_(1)[x] = x
!
!                        (2*n-1)*x * P_(n-1)[x] - (n-1) * P_(n-2)[x]
!         P_(n)[x]  =  ---------------------------------------------
!                                             n
!
!     Para o polinômio associado de Legendre (ordem 1):
!
!         P1_(1)[x] = y ;  P1_(2)[x] = 3*x*y
!
!                          (2*n-1)*x * P1_(n-1)[x] - n * P1_(n-2)[x]
!         P1_(n)[x]  =  ---------------------------------------------
!                                             n-1
!
!       sendo:
!
!             x = cos(theta) ;  y = sen(theta)
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         theta  ->  ângulo em graus
!         n      ->  grau do polinômio (>0)
!         P0n_2  ->  polinômio de Legendre de ordem 0 e grau n-2
!         P0n_1  ->  polinômio de Legendre de ordem 0 e grau n-1
!         P1n_2  ->  polinômio de Legendre de ordem 1 e grau n-2
!         P1n_1  ->  polinômio de Legendre de ordem 1 e grau n-1
!
!       Saída:
!
!         P0n    ->  polinômio de Legendre de ordem 0 e grau n
!         P1n    ->  polinômio de Legendre de ordem 1 e grau n
```

```
!
!     Observações:
!       Esta subrotina foi construída de modo que o grau dos polinômios
!       requeridos fossem calculados seqüencialmente, de n=1,2,3,...,
!       dessa forma é necessário a inclusão dos comandos abaixo no
!       programa/subrotina que for chamar esta subrotina.
!
!         P0n_2=P0n_1
!         P0n_1=P0n
!         P1n_2=P1n_1
!         P1n_1=P1n
!
!     -----------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: nenhuma
!     -----------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Abramowitz, M.; Stegun, I.A. (1970) Handbook of
!                    mathematical functions with formulas, graphs and
!                    mathematical tables. Dover Publications, New York.
!
!     -----------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     =================================================================
      implicit none
      integer :: n
      real(8) :: theta,P0n_2,P0n_1,P0n,P1n_2,P1n_1,P1n
      if (n.eq.1) then
         P0n=dcosd(theta)
         P1n=dsind(theta)
      else if (n.eq.2) then
         P0n_2=1.D0
         P0n_1=dcosd(theta)
         P0n=((3.D0*dcosd(theta)**2.D0)-1.D0)/2.D0
         P1n=3.D0*dcosd(theta)*dsind(theta)
      else if (n.eq.3) then
         P0n=((5.D0*dcosd(theta)**2.D0)-3.D0)*dcosd(theta)/2.D0
         P1n_2=-dsind(theta)
         P1n_1=3.D0*dcosd(theta)*dsind(theta)
         P1n=((5.D0*dcosd(theta)**2.D0)-1.D0)*3.D0*dsind(theta)/2.D0
      else if (n.gt.3) then
         P0n=(((2.D0*n-1.D0)*dcosd(theta)*P0n_1)-((n-1.D0)*P0n_2))/n
         P1n=(((2.D0*n-1.D0)*dcosd(theta)*P1n_1)-(n*P1n_2))/(n-1.D0)
      end if
      return
      end subroutine legendre
!
!
!
      subroutine fc_resp(z,n,u,presp,fresp,erro)
!     =================================================================
!     Calcula a função resposta para o modelo de uma esfera condutora
!     num meio infinitamente resistivo:
!
!
!                 u0*z - [(n+1)*u + n*u0] * [I_(n+1/2)[z] / I_(n-1/2)[z]]
!     Xn+iYn  =  -------------------------------------------------------
!                     u0*z - n*(u-u0) * [I_(n+1/2)[z] / I_(n-1/2)[z]]
!
!       sendo:
!
!              z = k*a ;  k = (i*w*u*sig)^(1/2)
!
```

```
!            i    ->  (-1)^(1/2)
!            w    ->  freqüência angular (>0)
!            u    ->  permeabilidade magnética da esfera (>0)
!            sig  ->  condutividade elétrica da esfera (>0)
!            a    ->  raio da esfera (>0)
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         z      ->  vide descrição acima
!         n      ->  número do multipolo (1<=n<=60)
!         presp  ->  parâmetro resposta (= sig*u*w*a*a = |k^2 * a^2|)
!
!       Saída:
!
!         fresp  ->  função resposta (Xn+iYn)
!         erro   ->  indicador de erro
!                    erro=5, erro na subrotina rbessel1 ou rbessel2
!
!     ------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: rbessel1, rbessel2
!     ------------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Grant, F.S.; West, G.F. (1965) Interpretation theory
!                  in applied geophysics. McGraw-Hill, USA
!
!     ------------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ==================================================================
      implicit none
      integer :: n,erro
      real(8) :: pi,u0,u,presp,lm
      complex(8) :: z,rbessel,tmp1,tmp2,tmp3,fresp
      erro=0
      pi=dacos(-1.D0)
      u0=pi*4.D-7
      lm=0.0052755662538111*n**3.D0+3.0880786864353*n**2.D0+
     &   6.42799892759467*n
      if (presp.lt.lm) then
         call rbessel1(z,n,rbessel,erro)
      else
         call rbessel2(z,n,rbessel,erro)
      end if
      if (erro.ne.0) then
         erro=5
         return
      end if
      if (u.eq.u0) then
         tmp1=(2.D0*n+1.D0)/z
         fresp=1.D0-(tmp1*rbessel)
      else
         tmp1=u0*z
         tmp2=(n*u0)+((n+1.D0)*u)
         tmp3=n*(u-u0)
         fresp=(tmp1-(tmp2*rbessel))/(tmp1-(tmp3*rbessel))
      end if
      return
      end subroutine fc_resp
!
!
!
```

```
      subroutine rbessel1(z,n,rbessel,erro)
!     =================================================================
!     Faz o cálculo da razão entre as funções de Bessel modificada de
!     primeira espécia e ordens n+1/2 e n-1/2, sendo "n" um número
!     natural:
!
!                                inf.      ( 1/4 * z^(2) )^k
!                             SOMATÓRIO  ---------------------
!          I_(n+1/2)             k=0     k! Gamma(n + k + 1/2)
!          ---------  =  z/2  -----------------------------------
!          I_(n-1/2)             inf.      ( 1/4 * z^(2) )^k
!                             SOMATÓRIO  ---------------------
!                                k=0     k! Gamma(n + k + 1/2)
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         z        ->  argumento das funções de Bessel
!         n        ->  n+1/2 é a ordem da função de Bessel no numerador
!                        e n-1/2 a do denominador: I_(n+1/2) / I_(n-1/2)
!                        (>0)
!
!       Saída:
!
!         rbessel  ->  resultado da razão I_(n+1/2) / I_(n-1/2)
!         erro     ->  indicador de erro
!                      erro=0,  sem erro
!                      erro=31, erro na subrotina gamma
!                      erro=32, se só foi possível calcular um único
!                        termo no somatório do numerador
!                      erro=33, erro na subrotina ordenar (no cálculo do
!                        numerador)
!                      erro=34, se só foi possível calcular um único
!                        termo no somatório do denominador
!                      erro=35, erro na subrotina ordenar (no cálculo do
!                        denominador)
!                      erro=36, erro na subrotina testar
!                      erro=66, se só foi possível calcular um único
!                        termo no somatório do numerador e do
!                        denominador
!
!     -----------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: gamma, testar, ordenar, somar
!     -----------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Abramowitz, M.; Stegun, I.A. (1970) Handbook of
!                    mathematical functions with formulas, graphs and
!                    mathematical tables. Dover Publications, New York.
!
!     -----------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     =================================================================
      implicit none
      integer :: n,k,k_max1,k_max2,ikey,erro,erro1,erro2
      real(8) :: gm
      real(8),allocatable :: tmp_r1(:),tmp_r2(:),tmp_i1(:),tmp_i2(:)
      complex(8) :: z,sIn,sIn_1,rbessel
      complex(8),dimension(1:2,0:1000) :: termo
      termo=(0.D0,0.D0)
      rbessel=(0.D0,0.D0)
      erro=0
```

```
      erro1=0
      erro2=0

      call gamma(n+1,gm)
      if (gm.ne.0.D0) then
         termo(1,0)=1.D0/gm
      else
         erro=31
         return
      end if

      ikey=1
      k=1
      do while (ikey.eq.1.and.k.le.1000)
         call testar(termo(1,k-1),erro1)
         if (erro1.eq.0) then
            termo(1,k)=termo(1,k-1)*((0.25D0*z**2.D0)/(k*(n+k+0.5D0)))
         else
            ikey=0
         end if
         k=k+1
      end do
      k_max1=k-2

      erro1=0
      if (k_max1.le.0) then
         sIn=termo(1,0)
         erro1=32
      end if

      if (erro1.eq.0) then
         allocate (tmp_r1(0:k_max1),tmp_r2(0:k_max1),
     &      tmp_i1(0:k_max1),tmp_i2(0:k_max1))

         tmp_r1=0.D0
         tmp_r2=0.D0
         tmp_i1=0.D0
         tmp_i2=0.D0

         tmp_r1(0:k_max1)=dreal(termo(1,0:k_max1))
         tmp_i1(0:k_max1)=dimag(termo(1,0:k_max1))

         call ordenar(0,k_max1,0,k_max1,tmp_r1,0,k_max1,tmp_r2,erro1)
         call ordenar(0,k_max1,0,k_max1,tmp_i1,0,k_max1,tmp_i2,erro1)

         if (erro1.eq.2) then
            erro=33
            return
         end if

         call somar(0,k_max1,0,k_max1,tmp_r2,tmp_r1(1))
         call somar(0,k_max1,0,k_max1,tmp_i2,tmp_i1(1))

         sIn=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))
         if (sIn.eq.(0.D0,0.D0)) then
            sIn=dcmplx(sum(tmp_r2),sum(tmp_i2))
            if (sIn.eq.(0.D0,0.D0)) then
               sIn=sum(termo(1,0:k_max1))
            end if
         end if
         deallocate (tmp_r1,tmp_r2,tmp_i1,tmp_i2)
      end if
```

```
      call gamma(n,gm)
      termo(2,0)=1.D0/gm
      ikey=1
      k=1
      do while (ikey.eq.1.and.k.le.1000)
         call testar(termo(2,k-1),erro2)
         if (erro2.eq.0) then
            termo(2,k)=termo(2,k-1)*((0.25D0*z**2.D0)/(k*(n+k-0.5D0)))
         else
            ikey=0
         end if
         k=k+1
      end do
      k_max2=k-2

      erro2=0
      if (k_max2.le.0) then
         sIn_1=termo(2,0)
         erro2=34
      end if
      if (erro2.eq.0) then
         allocate (tmp_r1(0:k_max2),tmp_r2(0:k_max2),
     &      tmp_i1(0:k_max2),tmp_i2(0:k_max2))

         tmp_r1=0.D0
         tmp_r2=0.D0
         tmp_i1=0.D0
         tmp_i2=0.D0

         tmp_r1(0:k_max2)=dreal(termo(2,0:k_max2))
         tmp_i1(0:k_max2)=dimag(termo(2,0:k_max2))

         call ordenar(0,k_max2,0,k_max2,tmp_r1,0,k_max2,tmp_r2,erro2)
         call ordenar(0,k_max2,0,k_max2,tmp_i1,0,k_max2,tmp_i2,erro2)

         if (erro2.eq.2) then
            erro=35
            return
         end if

         call somar(0,k_max2,0,k_max2,tmp_r2,tmp_r1(1))
         call somar(0,k_max2,0,k_max2,tmp_i2,tmp_i1(1))

         sIn_1=dcmplx(tmp_r1(1),tmp_i1(1))
         if (sIn_1.eq.(0.D0,0.D0)) then
            sIn_1=dcmplx(sum(tmp_r2),sum(tmp_i2))
            if (sIn_1.eq.(0.D0,0.D0)) then
               sIn_1=sum(termo(2,0:k_max2))
            end if
         end if
         deallocate (tmp_r1,tmp_r2,tmp_i1,tmp_i2)
      end if

      call testar(((sIn/sIn_1)*(0.5D0*z)),erro)
      if (erro.ne.0) then
         erro=36
         return
      end if

      rbessel=(sIn/sIn_1)*(0.5D0*z)
      erro=erro1+erro2
```

```
      return
      end subroutine rbessel1
!
!
!
      subroutine rbessel2(z,n,rbessel,erro)
!     ===================================================================
!     Faz o cálculo da razão entre as funções de Bessel modificada de
!     primeira espécia e ordens n+1/2 e n-1/2, sendo "n" um número
!     inteiro:
!
!               I_(n+1/2)     g_(n)[z] * tanh[z] + g_(-n-1)[z]
!               ---------  =  --------------------------------
!               I_(n-1/2)     g_(n-1)[z] * tanh[z] + g_(-n)[z]
!
!       sendo:
!
!                                 1 - e^(-2z)
!               tanh[z]  =  -----------
!                                 1 - e^(-2z)
!
!               g_(0)[z]  =  z^(-1)
!               g_(1)[z]  =  -z^(-2)
!               g_(n)[z]  =  g_(n-2)[z] - (2n-1) * z^(-1) * g_(n-1)[z]
!
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         z         ->  argumento das funções de Bessel
!         n         ->  n+1/2 é a ordem da função de Bessel no numerador
!                         e n-1/2 a do denominador: I_(n+1/2) / I_(n-1/2)
!                         (>0)
!
!       Saída:
!
!         rbessel  ->  resultado da razão I_(n+1/2) / I_(n-1/2)
!         erro      ->  indicador de erro
!                       erro=0, sem erro
!                       erro=4, se "g_(n-1)[z] * tanh[z] + g_(-n)[z]" for
!                         igual à zero (partes real e imaginária)
!
!     -------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: nenhuma
!     -------------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Abramowitz, M.; Stegun, I.A. (1970) Handbook of
!                    mathematical functions with formulas, graphs and
!                    mathematical tables. Dover Publications, New York.
!
!     -------------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ===================================================================
      implicit none
      integer :: n,k,erro
      complex(8) :: z,gn_2,gn_1,gn,g_n1,g_n,g_n_1,tangh,rbessel
      erro=0
      tangh=(1.D0-cdexp(-2.D0*z))/(1.D0+cdexp(-2.D0*z))
      gn_2=(0.D0,0.D0)
      gn_1=z**(-1.D0)
      gn=-1.D0*z**(-2.D0)
```

```
      g_n1=z**(-1.D0)
      g_n=(0.D0,0.D0)
      g_n_1=z**(-1.D0)
      k=2
      do while (k.le.n)
         gn_2=gn_1
         gn_1=gn
         g_n1=g_n
         g_n=g_n_1
         gn=gn_2-(((2.D0*k-1.D0)/z)*gn_1)
         g_n_1=g_n1-(((2.D0*k-1.D0)/z)*g_n)
         k=k+1
      end do
      if (((gn_1*tangh)+g_n).eq.(0.D0,0.D0)) then
         erro=4
         return
      end if
      rbessel=((gn*tangh)+g_n_1)/((gn_1*tangh)+g_n)
      return
      end subroutine rbessel2
!
!
!
      subroutine somar(ini,fim,l_in,u_in,in,out)
!     ===================================================================
!     Soma os valores de um vetor, já previamente ordenados.
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         ini    ->  posição do início da soma
!         fim    ->  posição do final da soma
!         l_in   ->  dimensão mínima do vetor de entrada (in)
!         u_in   ->  dimensão máxima do vetor de entrada (in)
!         in     ->  vetor de entrada com dimensão (l_in:u_in)
!
!       Saída:
!
!         out    ->  resultado da soma
!
!     -------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: nenhuma
!     -------------------------------------------------------------------
!
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ===================================================================
      implicit none
      integer :: i,ini,fim,l_in,u_in,tmp(1)
      real(8),dimension(l_in:u_in) :: in
      real(8) :: tmp1,tmp2,out
      tmp1=0.D0
      tmp2=0.D0
      out=0.D0
      tmp=maxloc(in(ini:fim),mask=in(ini:fim).lt.0.D0)+(l_in-1)
      if (tmp(1).le.fim) then
         do i=tmp(1),0,-1
            tmp1=tmp1+in(i)
         end do
      end if
      tmp=minloc(in(ini:fim),mask=in(ini:fim).gt.0.D0)+(l_in-1)
      if (tmp(1).le.fim) then
```

```
      do i=tmp(1),fim
         tmp2=tmp2+in(i)
      end do
   end if
   out=tmp1+tmp2
   return
   end subroutine somar
!
!
!
   subroutine ordenar(ini,fim,l_in,u_in,in,l_out,u_out,out,erro)
!  ===============================================================
!  Ordena os valores em ordem crescente de um vetor.
!
!  Parâmetros:
!
!    Entrada:
!
!      ini    ->  posição do início do ordenamento
!      fim    ->  posição do final do ordenamento
!      l_in   ->  dimensão mínima do vetor de entrada (in)
!      u_in   ->  dimensão máxima do vetor de entrada (in)
!      in     ->  vetor de entrada com dimensão (l_in:u_in)
!      l_out  ->  dimensão mínima do vetor de saída (out)
!      u_out  ->  dimensão máxima do vetor de saída (out)
!
!    Saída:
!
!      out    ->  vetor de saída com os valores ordenados e de
!                   dimensão (l_out:u_out)
!      erro   ->  indicador de erro
!                 erro=2, se "ini" for menor que "l_in" ou "fim"
!                   maior que "u_in" ou ainda se o comprimento do
!                   vetor de saída (u_out-l_out+1) for menor que o do
!                   ordenamento (fim-ini+1)
!                 erro não é alterado, caso contrário
!
!  Observações:
!    Nenhum valor do vetor de entrada entre as posições "ini" e "fim"
!    devem ser >=10^308
!
!  ---------------------------------------------------------------
!  Subrotinas requeridas: nenhuma
!  ---------------------------------------------------------------
!
!  Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!  ===============================================================
   implicit none
   integer :: i,ini,fim,l_in,u_in,l_out,u_out,erro
   real(8),dimension(l_in:u_in) :: in,tmp
   real(8),dimension(l_out:u_out) :: out
   if ((ini.ge.l_in).and.(fim.le.u_in).and.
  &   ((u_out-l_out).ge.(fim-ini))) then
      tmp=in
      do i=ini,fim
         out(i-ini+l_out)=minval(tmp(ini:fim))
         tmp(minloc(tmp(ini:fim))+(l_in-1))=1.D308
      end do
   else
      erro=2
   end if
   return
```

```
      end subroutine ordenar
!
!
!
      subroutine testar(termo,erro)
!     ==================================================================
!     Testa se as partes real e/ou imaginária de um número complexo
!     pertencem ao intervalo (em *):
!
!           *******             ****** ******             *******
!           ------|-------------|-----|-----|-------------|------
!              -10^300      -10^-300  0   10^-300       10^300
!
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         termo  ->  valor a ser testado
!
!       Saída:
!
!         erro   ->  indicador de erro
!                    erro=1, se pertence ao intervalo
!                    erro não é alterado, se não pertence.
!
!     ------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: nenhuma
!     ------------------------------------------------------------------
!
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ==================================================================
      implicit none
      integer :: erro
      complex(8) :: termo
      if (((dreal(termo).le.(-1.D+300)).or.
     &   (dreal(termo).ge.(-1.D-300)).and.
     &   (dreal(termo).lt.(+0.D+000)).or.
     &   (dreal(termo).gt.(+0.D+000)).and.
     &   (dreal(termo).le.(+1.D-300)).or.
     &   (dreal(termo).ge.(+1.D+300))).or.
     &   ((dimag(termo).le.(-1.D+300)).or.
     &   (dimag(termo).ge.(-1.D-300)).and.
     &   (dimag(termo).lt.(+0.D+000)).or.
     &   (dimag(termo).gt.(+0.D+000)).and.
     &   (dimag(termo).le.(+1.D-300)).or.
     &   (dimag(termo).ge.(+1.D+300)))) then
         erro=1
      end if
      return
      end subroutine testar
!
!
!
      subroutine gamma(a,gm)
!     ==================================================================
!     Faz o cálculo da função gamma do tipo: Gamma(a+1/2), sendo "a" uma
!     constante inteira positiva:
!
!                               1 * 3 * 5 * ... * (2a-1)
!             Gamma(a+1/2) = ------------------------ * pi^(1/2)
!                                         2^a
!
```

```
!     Parâmetros:
!
!       Entrada:
!
!         a   ->  número natural menor que 170
!
!       Saída:
!
!         gm  ->  resultado da função Gamma(a+1/2)
!
!     Observações:
!       Devido à precisão numérica: 0<=a<=169.
!       Se 0>a>169, gm=0 (indicando que este resultado não é válido)
!
!     ------------------------------------------------------------------
!     Subrotinas requeridas: nenhuma
!     ------------------------------------------------------------------
!
!     Referências: Abramowitz, M.; Stegun, I.A. (1955) Handbook of
!                  mathematical functions with formulas, graphs and
!                  mathematical tables. Dover Publications, New York.
!
!     ------------------------------------------------------------------
!     Desenvolvido por: Eduardo N. A. Urasaki
!     ==================================================================
      implicit none
      integer :: a,i
      real(8) :: gm,gm12,pi,denom
      pi=dacos(-1.D0)
      gm12=pi**0.5D0
      gm=1.D0
      if (a.ge.0.and.a.le.169) then
         denom=2**(real(a))
         gm=1/denom
         do i=1,(2*a-1),2
            gm=gm*i
         end do
         gm=(gm*gm12)
      else
         gm=0.D0
      end if
      return
      end subroutine gamma
```