



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

ESTIMATIVAS DA DISTRIBUIÇÃO DA
DENSIDADE NO INTERIOR DA TERRA USANDO
A EQUAÇÃO DE ADAMS-WILLIAMSON

ERONILDO DE JESUS SOUZA

SALVADOR – BAHIA

ABRIL – 2013

Estimativas da Distribuição da Densidade no Interior da Terra usando a
Equação de Adams-Williamson

por

ERONILDO DE JESUS SOUZA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

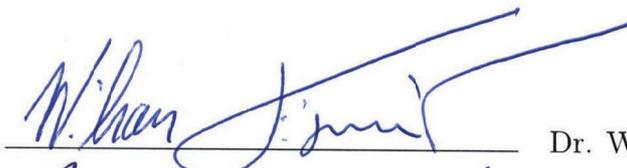
DO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora



Dr. Wilson Mouzer Figueiró (UFBA) - Orientador



Dr. Roberto Max de Argollo (UFBA)



Dr. Eduardo Telmo Fonseca Santos (UFBA)

Data da aprovação: 25/04/2013

Dedicado a
Leda Carine Santos Costa.

Inferências sobre o interior da Terra, longe de serem inferiores as das ‘ciências exatas’, vão desde aquelas que são fracamente consistentes até inferências que agora estão bem estabelecidas como resultados comuns na Física padrão.

K. E. Bullen, The Earth's Density (1975).

RESUMO

A determinação de perfis de densidade das rochas em função da profundidade (ou do raio na Terra) é um problema de grande interesse geofísico, pois muitas propriedades do interior terrestre dependem do parâmetro densidade. Neste trabalho determinam-se perfis de densidade em função da profundidade (ou do raio) no interior da Terra. Para isso, utilizam-se dados das velocidades das ondas sísmicas P e S do modelo ak135-f do PREM, uma aproximação de Taylor de primeira ordem da densidade e a equação de Adams-Williamson em sua forma analítica, o que permite construir uma fórmula numérico-iterativa que possibilita o tratamento computacional do problema aliado a diversos métodos de interpolação das velocidades.

Interpola-se os dados das velocidades das ondas P e S por funções: polinomiais, irracionais, linear por partes e *spline* cúbica. Produz-se perfis de velocidades e de densidade para cada um dos métodos interpoladores e comparam-se seus resultados com os dados do PREM.

Os resultados mostram que a aproximação de Taylor utilizada forneceu bons resultados para algumas técnicas interpoladoras até a base do manto terrestre (interface manto-núcleo). Duas delas exibiram resultados aceitáveis para o topo do núcleo externo. Entretanto, nenhum dos métodos interpoladores usados forneceu bons resultados para o interior do núcleo terrestre e concluiu-se que a aproximação proposta, utilizando a equação de Adams-Williamson, não é suficiente para descrever a variação da densidade no núcleo da Terra. Isto provavelmente, devido às fortes restrições impostas pelo modelo de autocompressão.

ABSTRACT

Determination of rock density profiles in function of depth (or radius) is a geophysical problem of great interest, because many Earth interior properties depend on the density parameter. In this work, Earth density profiles are determined in function of depth or radius. For this, seismic velocities functions interpolated from PREM data are used inside Adams-Williamson equation.

A numerical iterative version of this equation is constructed using a first order Taylor approximation of it. It allows a computational treatment of the problem with help of some interpolation methods of velocities. The used interpolation techniques of velocities from PREM data were functions such as: polynomials, irrationals, piecewise linear and cubic splines. It was produced velocities and density profiles for each interpolation method.

All techniques show satisfactory results for the mantle. Two of them produced acceptable results for the beginning of the external core. For the inner core all results were unacceptable relatively to the PREM and they ground that the proposed approximation using the Adams-Williamson equation is not sufficient to describe the variation of density in the Earth's core. This is probably due to the severe restrictions imposed by the self-compression model.

ÍNDICE

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE	vi
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 A densidade no interior da Terra	3
1.1 A massa da Terra	4
1.2 O momento de inércia da Terra	5
1.3 Modelos da Terra	6
1.4 <i>Preliminary Reference Earth Model</i> (PREM)	7
CAPÍTULO 2 A equação de Adams-Williamson	9
2.1 Dedução da equação de Adams-Williamson	9
2.2 Equação numérico-iterativa da densidade	13
CAPÍTULO 3 Interpolações dos dados de velocidades	16
3.1 Interpolação das velocidades por polinômios	16
3.2 Interpolação das velocidades por funções irracionais	18
3.3 Interpolação das velocidades por função linear por partes	19
3.4 Interpolação das velocidades por <i>spline</i> cúbica	19
CAPÍTULO 4 Resultados	21
4.1 Resultados para a interpolação por polinômios	21
4.2 Resultados para a interpolação por funções irracionais	22
4.3 Resultados usando interpolação linear por partes	22
4.4 Resultados usando interpolação por <i>spline</i> cúbica	22
4.5 Comparação das densidades obtidas usando diferentes técnicas interpoladoras	23
4.6 Cálculo de erros na densidade	23
CAPÍTULO 5 Conclusões	41

Agradecimentos	42
Referências Bibliográficas	43
APÊNDICE A Modelo Preliminar de Referência da Terra considerada Esfericamente Simétrica	44
APÊNDICE B <i>Spline</i> cúbica	48

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Satélite em órbita circular em torno da Terra e as forças: centrífuga (\mathbf{F}_{cg}), centrípeta (\mathbf{F}_c) e gravitacional (\mathbf{F}_g).	5
1.2	Perfil das velocidades das ondas P e S em função do raio da Terra obtidos dos dados do PREM (modelo ak135-f).	8
1.3	Perfil de densidade em função do raio da Terra obtido dos dados do PREM (modelo ak135-f).	8
2.1	Modelo da Terra para a aplicação da Equação de Adams-Williamson.	11
2.2	Modelo da Terra para aplicação da versão numérico iterativa da Equação de Adams-Williamson.	15
4.1	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 4 dos dados do PREM.	24
4.2	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 4.	24
4.3	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 5 dos dados do PREM.	25
4.4	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 5.	25
4.5	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 6 dos dados do PREM.	26
4.6	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 6.	26
4.7	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 7 dos dados do PREM.	27
4.8	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 7.	27
4.9	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 8 dos dados do PREM.	28

4.10	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 8.	28
4.11	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 9 dos dados do PREM.	29
4.12	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 9.	29
4.13	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 10 dos dados do PREM.	30
4.14	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 10.	30
4.15	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 3, 5 dos dados do PREM.	31
4.16	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 3, 5.	31
4.17	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 4, 5 dos dados do PREM.	32
4.18	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 4, 5.	32
4.19	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 5, 5 dos dados do PREM.	33
4.20	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 5, 5.	33
4.21	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 6, 5 dos dados do PREM.	34
4.22	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 6, 5.	34
4.23	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 7, 5 dos dados do PREM.	35
4.24	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 7, 5.	35

4.25	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 8,5 dos dados do PREM.	36
4.26	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 8,5.	36
4.27	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 9,5 dos dados do PREM.	37
4.28	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 9,5.	37
4.29	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação linear por partes dos dados do PREM.	38
4.30	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando velocidades P e S interpoladas por funções lineares por partes.	38
4.31	Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por <i>splines</i> cúbicas dos dados do PREM.	39
4.32	Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por <i>splines</i> cúbicas.	39
4.33	Perfis das densidades obtidos usando diferentes técnicas de interpolação dos dados das velocidades do PREM aplicadas na Equação de Adams-Williamson comparados com o perfil de densidades diretamente fornecidas pelo PREM.	40

LISTA DE SÍMBOLOS

- V : velocidade das ondas sísmicas de corpo
- α ou V_P : velocidade da onda P (ou compressional)
- β ou V_S : velocidade da onda S (ou cisalhante)
- ρ : densidade das rochas na Terra
- E : módulo de Young
- σ : razão de Poisson
- K : módulo de compressibilidade
- μ : módulo de cisalhamento
- λ : constante de Lamé
- M_T : massa total da Terra
- F : força
- G : constante gravitacional universal
- g : aceleração da gravidade
- R : raio médio da Terra
- T : período de translação
- \mathbf{F}_{cg} : força centrífuga
- \mathbf{F}_c : força centrípeta
- \mathbf{F}_g : força gravitacional
- m : massa
- $v = |\mathbf{v}|$: velocidade
- ω : velocidade angular
- $\bar{\rho}$: densidade média
- I : momento de inércia da Terra
- P : pressão

U : volume

r : raio na Terra

z : profundidade na Terra

Φ : parâmetro sísmico

M_r : massa da esfera de raio r

M_{C_i} : massa da coroa esférica

INTRODUÇÃO

O conhecimento da distribuição de densidade no interior da Terra é de fundamental importância para o entendimento da sua estrutura interna, pois muitas outras propriedades de seu interior dela dependem. Por exemplo: velocidades de propagação das ondas sísmicas, pressão, gravidade, módulos elásticos, constituição litológica, etc. Além disso, a distribuição de densidade é uma informação importante nas equações que expressam a cinemática e a dinâmica: de propagação das ondas sísmicas, nas oscilações livres da Terra, nas equações das marés, do fluxo de convecção no manto e no núcleo da Terra. A densidade afeta, também, a dinâmica de rotação da Terra e representa a distribuição das fontes dos campos de gravidade internos e externos. Acrescenta-se ainda que ela é um dos parâmetros de estado que controla a termodinâmica do interior da Terra. Desse modo, a distribuição da densidade pode ser derivada de observações originadas em diversas áreas, tais como: geofísica, geodésia e astronomia; e pode ser determinada a partir da combinação de dados delas provenientes.

Estimativas bastante precisas da densidade média da Terra são conhecidas desde o tempo de Newton (1642-1727) que, a este tempo, foi dada entre 5,0 e 6,0 g/cm³. Cavendish (1731-1810) usou a constante universal da gravitação e determinou, em 1798, uma densidade média de 5,5 g/cm³ para a Terra, o que é quase o dobro das rochas comuns encontradas na superfície (2,7 a 3,3 g/cm³). Ficou evidente, portanto, que a densidade deve aumentar com a profundidade na Terra. Para provar isto, foi preciso esperar a evolução do conhecimento sobre a estrutura estratificada da Terra, o que se deu somente após as medições dos tempos de trânsito das velocidades sísmicas. Tentativas anteriores foram feitas no sentido de descrever a variação da densidade Terra adentro: supondo alguma fórmula que mostrasse um aumento contínuo da densidade com a profundidade ou postulando-se cascas de densidades constantes, sendo a mais profunda, a mais densa. Uma vez que o conceito de Wiechert (1861-1928) de um núcleo de ferro foi aceito, era óbvio que a maior parte da variação da densidade era resultado da existência de um núcleo mais denso do que o manto (Bullen, 1975).

Em um artigo seminal, Williamson e Adams (1923), propuseram um modelo de Terra que ficou conhecido como “modelo de autocompressão” (*self-compression model*). Eles consideraram a Terra esférica e formada por finas cascas esféricas concêntricas homogêneas e assumiram que “a densidade no interior da Terra aumenta com a profundidade somente por causa da compressão devida ao peso do material que está acima”, desconsiderando outras influências, tais como: gradiente de temperatura e mudança de composição dos materiais. Com isto, deduziram uma equação que mostra como a densidade varia em relação à profundidade na Terra, conhecida como equação de Adams-Williamson. O modelo e a equação

de Adams-Williamson são uma grande contribuição para o estudo estimativas da densidade terrestre.

Compreendendo a importância de estudos sobre a densidade terrestre, neste trabalho, busca-se responder à seguinte pergunta:

Conhecendo-se a densidade das rochas na superfície da Terra, é possível determinar a distribuição da densidade em função da profundidade (ou do raio) da Terra em todo o seu interior?

Existem variantes a respeito do tema desta pergunta, como por exemplo: pode-se calcular a densidade média da Terra e a distribuição de densidade no interior da Terra usando sua massa total e seu momento de inércia? Essa pergunta foi respondida mas, sabe-se, que com os referidos parâmetros, a determinação da densidade é feita de modo limitado.

O presente trabalho utiliza dados das velocidades das ondas sísmicas P e S do *Preliminary Reference Earth Model* (PREM, Apêndice A); a equação de Adams-Williamson em sua forma analítica, Eq. (2.11), e na sua versão versão numérico-iterativa, Eq. (2.21); e diversos métodos interpoladores das velocidades fornecidas pelo PREM, visando inferir a distribuição radial de densidade das rochas no interior da Terra.

CAPÍTULO 1

A densidade no interior da Terra

Neste capítulo apresenta-se um breve comentário sobre algumas grandezas físicas, modelos e desenvolvimentos que estão relacionados com a determinação da distribuição da densidade terrestre.

A sismologia tem dito muito a respeito da estrutura estratificada da Terra, mas pouco acerca das propriedades físicas e químicas dessas camadas. A velocidade, V , das ondas sísmicas de corpo dependem dos módulos elásticos $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = (E, \sigma, K, \mu, \lambda)$ e da densidade ρ segundo uma expressão da forma:

$$V = \sqrt{\frac{f_{i,j}(\xi_i, \xi_j)}{\rho}}, \quad (1.1)$$

onde V pode ser substituída por α ou por β , caso represente a velocidade compressional ou cisalhante, respectivamente; $f_{i,j}$ é uma função que depende de ξ_i e $\xi_j \in \{E, \sigma, K, \mu, \lambda\}$, tais que $\xi_1 = E$ (módulo de Young), $\xi_2 = \sigma$ (razão de Poisson), $\xi_3 = K$ (módulo de compressibilidade), $\xi_4 = \mu$ (módulo de cisalhamento), e $\xi_5 = \lambda$ (constante de Lamé). Para cada $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $i < j$, a função $f_{i,j}$, além de mudar de variáveis, muda também de forma. Por exemplo, para $V = \alpha$: $f_{1,2}(\xi_1, \xi_2) = f_{1,2}(E, \sigma) = \frac{E(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$ e $f_{3,5}(\xi_3, \xi_5) = f_{3,5}(K, \lambda) = 3K - 2\lambda$.

A única possibilidade não contemplada pela Eq. (1.1) é aquela tal que $i = 1$ e $j = 5$, pois não foi encontrado na literatura consultada (Sheriff, 2002), α ou β dependentes apenas de E e λ . Para o caso no qual $i = 3$ e $j = 4$, tem-se:

$$\alpha = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (1.2)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.3)$$

Utilizando-se apenas as velocidades das ondas P e S, as Eqs. (1.2) e (1.3), isoladamente,

não faz-se possível determinar as três incógnitas que nelas comparecem. Os períodos das oscilações livres da Terra fornecem equações extras que, em princípio, auxiliam a resolver as Eqs. (1.2) e (1.3) para ρ , K e μ ; mas seu uso é limitado (Brown e Mussett, 1981). Para resolver este problema, necessita-se de duas outras quantidades que dependem da densidade na Terra, a saber: sua massa total e seu momento de inércia.

1.1 A massa da Terra

Determina-se a massa da Terra, M_T , do campo gravitacional que é produzido. A lei da gravidade de Newton estabelece que a (intensidade da) força atrativa F entre duas massas pontuais m_1 e m_2 é dada por:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.4)$$

onde r é a distância entre as duas massas e G é a constante gravitacional universal. Se esta equação é aplicada a todas as partículas contidas numa casca esférica, pode-se mostrar que a força que a casca exerce em qualquer ponto externo à casca é igual àquela causada por um único corpo de igual massa situado no centro da casca. Portanto, um corpo que consiste de finas camadas concêntricas com densidade homogênea (como a Terra, para uma boa aproximação) tem uma atração externa que é angularmente invariante e decai com o inverso do quadrado da distância a seu centro. É conveniente considerar tal atração em um ponto qualquer sobre uma unidade de massa pontual. Se fizermos $m_1 = 1$ e $m_2 = M_T$, temos a aceleração devido à gravidade terrestre dada por:

$$g_r = G \frac{M_T}{r^2}. \quad (1.5)$$

Uma maneira de determinar M_T é medir $g_r = g$ na superfície da Terra pela cronometragem da queda livre de uma massa no vácuo. A quantidade r é substituída do R (raio médio da Terra) e é determinada por técnica geométrico-astronômica e G é conhecida na literatura científica, pois foi calculada, pela primeira vez, por Cavendish em 1798 (Brown e Mussett, 1981), que foi o primeiro a calcular a massa da Terra.

Um segundo método para calcular a massa da Terra é medir o período de translação de um satélite dela. Por simplicidade, considere-se que o satélite está numa órbita circular (Figura 1.1), as intensidades das forças centrífuga \mathbf{F}_{cg} e gravitacional \mathbf{F}_g se igualam e são opostas em sentido, isto é:

$$G \frac{M_T m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (1.6)$$

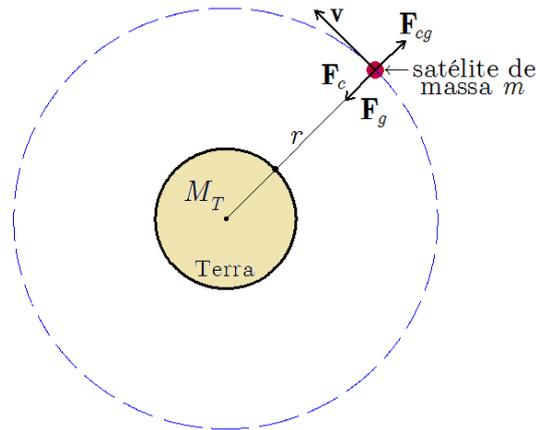


Figura 1.1: Satélite em órbita circular em torno da Terra e as forças: centrífuga (\mathbf{F}_{cg}), centrípeta (\mathbf{F}_c) e gravitacional (\mathbf{F}_g).

ou seja,

$$M_T = \frac{v^2 r}{G}, \quad (1.7)$$

onde m é a massa do satélite e $v = |\mathbf{v}|$ sua velocidade. Seja T o período de translação do satélite, então:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.8)$$

onde ω é a velocidade angular do satélite, dada por: $\omega = \frac{v}{r}$. Assim,

$$M_T = \frac{r^3}{G} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (1.9)$$

O período T pode ser facilmente calculado e o raio r medido por radar ou *laser*. O valor determinado para M_T foi $5,98 \times 10^{24}$ kg. Como conhece-se o raio da Terra, pode-se calcular seu volume aproximado e obter uma densidade média de $\bar{\rho} = 5,5$ g/cm³. A densidade da maioria das rochas na superfície variam de 2,7 a 3,3 g/cm³ (Stacey e Davis, 2008). Isto significa que em partes internas da Terra as rochas podem ser bem mais densas que em outras partes. Qualquer rearranjo de camadas concêntricas de diferentes densidades, conservando a mesma massa total, produz um mesmo campo gravitacional externo. Assim, não é possível deduzir como o campo gravitacional varia com a densidade radial de um corpo esférico.

1.2 O momento de inércia da Terra

O momento de inércia da Terra é outra quantidade que depende de como a massa está distribuída no seu interior. O momento de inércia da Terra é de $8,07 \times 10^{37}$ kg · m² (Brown

e Mussett, 1981). Isto é somente 83% do valor que deveria ter se a densidade da Terra fosse uniforme. No entanto, isto faz mais que confirmar a conclusão que é feita a partir da massa da Terra, porque o momento de inércia depende da variação radial de densidade enquanto que a massa total não. A massa da Terra, M_T , e seu momento de inércia, I , respectivamente, são dados por:

$$M_T = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (1.10)$$

e

$$I = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (1.11)$$

Desse modo, nenhuma dessas quantidades pode ser usada para deduzir em detalhes como a densidade varia radialmente (Kennett, 1998). Cada uma dessas equações é capaz de excluir muitos perfis de densidade e juntas elas descartam muito mais perfis do que separadas. São, portanto, restrições úteis para confirmar ou validar perfis de densidade.

1.3 Modelos da Terra

É tradicional e conveniente considerar separadamente a estrutura da Terra nos seguintes modelos: sismológico, térmico e composicional (ou mineralógico). Evidentemente, essas abordagens interagem fortemente e, para conclusões mais apuradas, não podem ser consideradas de forma isolada.

Os modelos sismológicos são baseados em perfis detalhados de velocidades sísmicas determinados a partir das curvas de tempo de trânsito *versus* ângulo epicentral para ondas sísmicas e em períodos das oscilações livres da Terra. O sucesso dos modelos sismológicos deve-se bastante aos cientistas H. Jeffreys (1891-1989) e K. Bullen (1906-1976), que usaram um grande volume de dados coletados em estações sismológicas (gerados por terremotos) e criaram um modelo padrão da Terra, produzindo assim as tabelas sismológicas de Jeffreys-Bullen em 1940 (Stacey e Davis, 2008). Eles mostraram que a Terra é esfericamente simétrica (varia apenas radialmente), quase esférica e com apenas algumas descontinuidades. Também mostraram que a interface manto-núcleo separa um manto sólido de um núcleo líquido. Devido ao desenvolvimento da rede mundial de sismógrafos de três componentes de banda larga, há cada vez mais dados e de melhor qualidade (Bullen, 1975).

Modelos térmicos necessariamente dependem de parâmetros termodinâmicos determinados experimentalmente, assim como de observações de fluxo de calor e variações geomagnéticas. O perfil de temperatura em profundidade (geotérmico) tem uma forte influência sobre os modelos de composição, onde é preciso saber a temperatura a uma dada pressão para inferir, a partir dos diagramas de fase determinados experimentalmente, quais os minerais são estáveis.

Os modelos de composição (ou de fase), inferidos pela densidade e por perfis de velocidade, a partir de modelos sismológicos, por sua vez, interagem com os modelos térmicos, ancorando o geotérmico e permitindo (ou proibindo) camadas convectivas, tornando a introdução de camadas limite térmicas necessárias ou não (Poirier, 2000).

1.4 *Preliminary Reference Earth Model (PREM)*

Modelos sismológicos da Terra normalmente usam os perfis de velocidade versus profundidade e uma equação de estado relacionando ρ e K para obter perfis de pressão, densidade e módulos elásticos. Por iniciativa da Associação Internacional de Sismologia e Física do Interior da Terra (*International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior*, IASPEI), um Modelo Preliminar de Referência da Terra (*Preliminary Reference Earth Model*, PREM) foi criado (Dziewonski e Anderson, 1981). Embora novas tabelas com valores de tempos de trânsito globais e modelos de velocidade estejam sempre sendo atualizadas e divulgadas, o PREM ainda é, na prática, o modelo mais utilizado atualmente como referência de dados globais de sismologia.

As tabelas de dados do modelo ak135-f divulgadas por Kennett, Engdahl e Buland (1998), representam uma atualização das tabelas de tempo de trânsito *iasp 91* para tentar igualar o comportamento de uma ampla gama de fases. A produção do modelo ak135-f foi baseada em novas tabelas de tempos de trânsito empíricos obtidos deslocando eventos usando o modelo *iasp 91*. Tal como o seu antecessor, ak135-f é um modelo de velocidade radial estratificado e as tabelas de tempo de trânsito são derivadas deste modelo, de modo que existe uma base consistente para todas as fases. Os tempos de trânsito da onda P são muito semelhantes aos do *iasp 91*, mas as alterações mais significativas são introduzidas para a onda S e, particularmente, as fases principais.

Os dados utilizados neste trabalho foram coletados no sítio da rede mundial de computadores que tem o seguinte endereço: <http://www.iris.edu/dms/products/emc/models/PREM.htm> e podem ser encontrados na Tabela A apresentada no Apêndice A.

Nas Figuras 1.2 e 1.3, são exibidos o perfil das velocidades das ondas P e S e o perfil da distribuição de densidades baseados no modelo ak135-f.

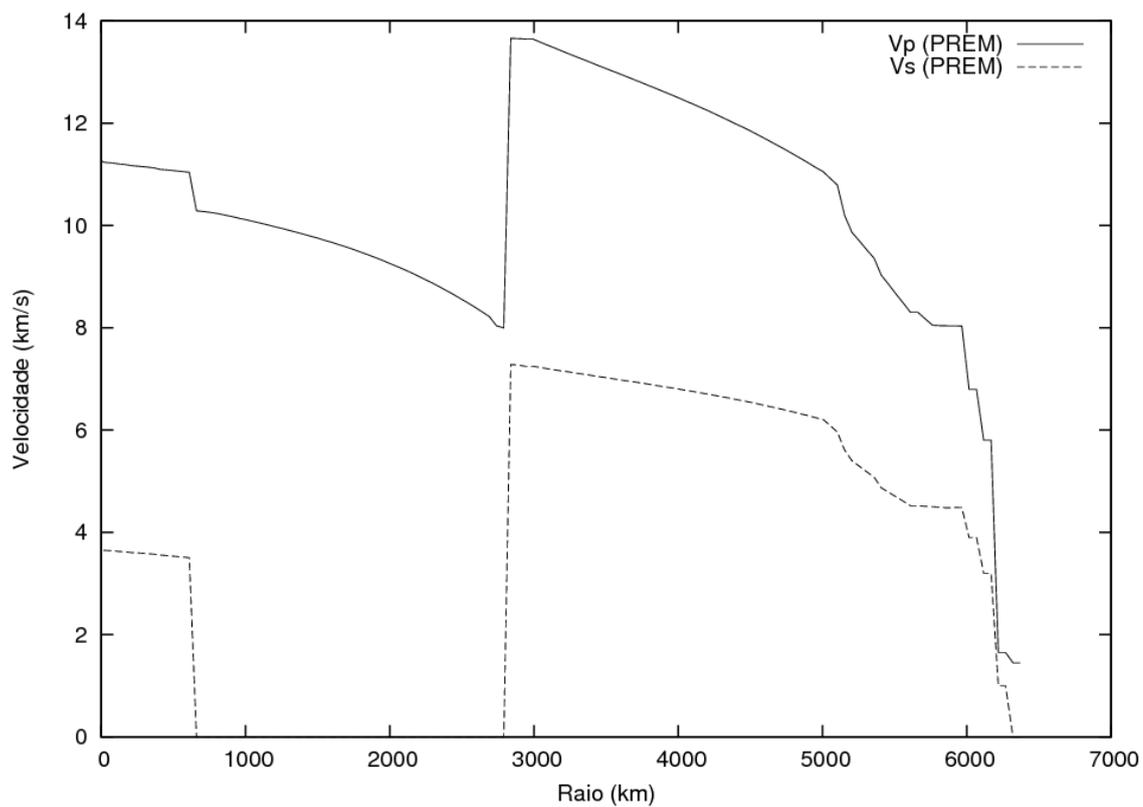


Figura 1.2: Perfil das velocidades das ondas P e S em função do raio da Terra obtidos dos dados do PREM (modelo ak135-f).

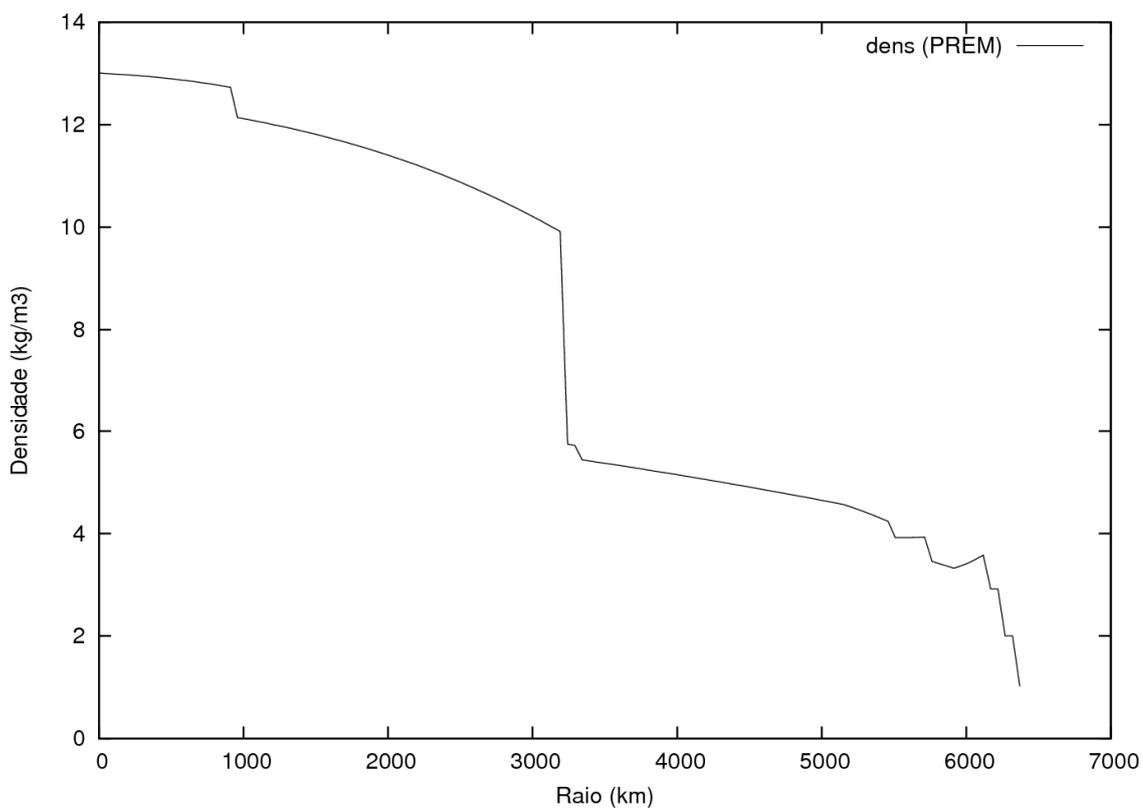


Figura 1.3: Perfil de densidade em função do raio da Terra obtido dos dados do PREM (modelo ak135-f).

CAPÍTULO 2

A equação de Adams-Williamson

Este capítulo apresenta uma dedução da equação de Adams-Williamson, discute-se brevemente o modelo de autocompressão e faz-se a construção de uma equação numérico-iterativa para o cálculo da densidade na Terra.

As Eqs. (1.2) e (1.3) envolvem três variáveis desconhecidas: ρ , K e μ . Uma terceira relação independente entre essas variáveis se faz necessária, mas, infelizmente, ela não existe. Para deduzir a densidade é preciso contornar este obstáculo e o que se fez, primeiro, foi simplesmente assumir uma relação ou tentar descobrir uma relação empírica.

Erskine D. Williamson (1886-1923) e Leason H. Adams (1887-1969), em 1923, fizeram uma abordagem de forma analítica (Williamson e Adams, 1923). Eles assumiram a hipótese de que a densidade no interior da Terra aumenta com a profundidade somente por causa da compressão devida ao peso do material acima e não, por exemplo, por causa da mudança de composição. Este modelo ficou conhecido como *modelo de autocompressão*.

2.1 Dedução da equação de Adams-Williamson

A quantidade que define a mudança de densidade devido à pressão é o módulo de compressibilidade, K , dada por:

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta U/U} = \frac{dP}{dU/U}, \quad (2.1)$$

onde ΔP é a variação de pressão e $\Delta U/U$ é a variação relativa de volume.

Como o volume e a densidade estão inversamente relacionados, pode-se escrever

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dU}{U}. \quad (2.2)$$

Então,

$$K = -\rho \frac{dP}{d\rho}. \quad (2.3)$$

A pressão exercida sobre a parte inferior de uma fina casca esférica de espessura dr (Figura 2.1), devido ao seu peso, é:

$$dP = -\rho(r)g(r)dr, \quad (2.4)$$

(o sinal negativo é porque a pressão P aumenta quando o raio r diminui). Claro, $\rho(r)$ e $g(r)$ não são absolutamente uniformes dentro da referida casca, mas mudam muito lentamente em comparação com P . Fazendo-se a casca infinitamente fina (cálculo de limite), o erro em assumir $\rho(r)$ e $g(r)$ uniformes pode ser considerado pequeno e é desprezado. A densidade aumenta, produzida pelo aumento na pressão, e é determinada substituindo-se a Eq. (2.3) na Eq. (2.4). O resultado pode ser rearranjado e, para cada r , obtém-se:

$$\frac{K}{\rho} = -\rho(r)g(r)\frac{dr}{d\rho}. \quad (2.5)$$

Note que a Eq. (2.5) está bem estabelecida, dado que $\frac{dr}{d\rho} < 0$, pois enquanto o valor do raio diminui, o da densidade aumenta.

A informação sobre as velocidades sísmicas nas Eqs. (1.2) e (1.3) são combinadas para gerar:

$$\alpha^2(r) - \frac{4}{3}\beta^2(r) = \frac{K}{\rho}. \quad (2.6)$$

Então, a Eq. (2.5) pode ser reescrita como:

$$\alpha^2(r) - \frac{4}{3}\beta^2(r) = -\rho(r)g(r)\frac{dr}{d\rho}. \quad (2.7)$$

Os módulos elásticos, assim como a densidade, devem aumentar com a profundidade. Isto tem que ser assim porque um aumento de densidade por si só produziria uma diminuição das velocidades sísmicas (Eqs. (1.2) e (1.3)) com a profundidade, entretanto, sabe-se que as velocidades aumentam com ela. Isto pode ser visto como uma contradição: que o módulo elástico, usualmente considerado constante, possa variar com a profundidade. De fato, os módulos elásticos são somente aproximadamente constantes, suas variações não aparecem nos limites usuais de esforços usados em laboratórios ou encontrados na engenharia. Portanto, o aumento de ρ com a profundidade deve ser compensado com simultâneos aumentos de K e μ .

A Eq. (2.7) ainda contém $g(r)$ que é desconhecida e, portanto, deve ser substituída. Isto pode ser feito porque $g(r)$ depende da variação radial da densidade. Sabe-se que, fora da casca, a atração gravitacional é a mesma como se toda massa estivesse concentrada no centro (Seção 1.1). Pode-se mostrar, também, que em qualquer ponto da região delimitada pela

casca a atração gravitacional é nula. Então, a aceleração devido à gravidade produzida por uma casca de raio r é tal como se toda massa interna, compreendida entre 0 e r , estivesse concentrada no centro. A massa compreendida entre r e R deve ser ignorada, isto é:

$$g(r) = \frac{G}{r^2} M_r, \quad (2.8)$$

onde M_r é a porção da massa terrestre compreendida entre seu centro e a casca de raio r . Ou seja, a soma das massas de todas as cascas com raio inferior a r . Assim:

$$g(r) = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi\rho(u)u^2 du, \quad (2.9)$$

onde $4\pi\rho(u)u^2 du$ é o volume de cada casca a uma distância u do centro da Terra, e $\rho(u)$ é a densidade a esta mesma distância.

Finalmente, substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.7) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{G\rho(r)}{r^2 [\alpha^2(r) - \frac{4}{3}\beta^2(r)]} \int_0^r 4\pi\rho(u)u^2 du. \quad (2.10)$$

A Eq. (2.10) é a chamada Equação de Adams-Williamson. Ela pode ser reescrita como:

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}\rho(r), \quad (2.11)$$

onde $\Phi(r) = \alpha^2(r) - \frac{4}{3}\beta^2(r)$ é conhecido como parâmetro sísmico. O modelo proposto pela Eq. (2.11) pode ser resumido na Figura 2.1.

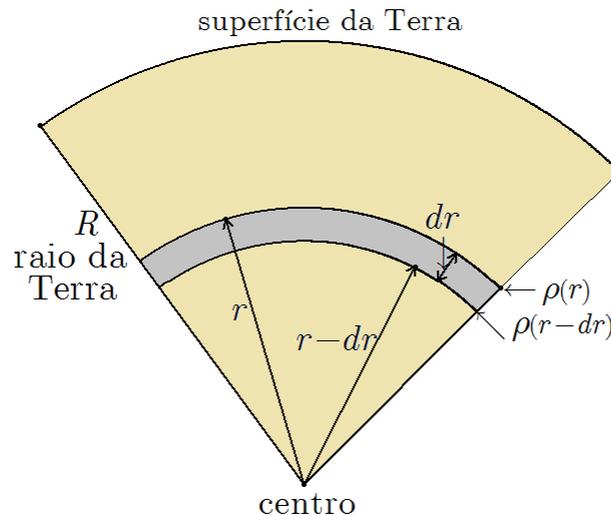


Figura 2.1: Modelo da Terra para a aplicação da Equação de Adams-Williamson.

A massa no interior da região esférica delimitada pelo raio r é dada por:

$$M_r = \int_0^r 4\pi\rho(u)u^2 du. \quad (2.12)$$

Nota-se que essa massa pode ser calculada por:

$$M_r = M_T - \int_r^R 4\pi\rho(u)u^2 du. \quad (2.13)$$

A integral na Eq. (2.13) dá a massa da coroa esférica externa de raios r e R .

A Eq. (2.11) é uma equação diferencial de difícil resolução analítica mas pode ser resolvida por integração numérica. Tomando-se o intervalo $[R, r]$, tem-se:

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}\rho(r) \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho(r)} = -\frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}dr \Rightarrow \ln \left[\frac{\rho(r)}{\rho(R)} \right] = -\int_R^r \frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}dr, \quad (2.14)$$

onde $\rho(R)$ é a densidade na superfície. Portanto:

$$\rho(r) = \rho(R)\exp \left[-\int_R^r \frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}dr \right]. \quad (2.15)$$

A Eq. (2.11) (ou a Eq. (2.15)) pode ajudar a determinar uma distribuição da densidade no interior da Terra do seguinte modo:

- (i) Na superfície da Terra, conhece-se os valores de ρ , r , Φ , e da integral que comparece na Eq. (2.13) que é zero, fazendo com que $M_r = M_T$, justamente a massa total da Terra. Portanto, pode-se calcular o lado direito da Eq. (2.11) na superfície da Terra;
- (ii) Sabe-se (do PREM) os valores das velocidades sísmicas α e β para alguns r , Terra adentro. Pode-se utilizar alguma aproximação ou interpolação com esses dados para obter os valores das velocidades em outras profundidades; e
- (iii) A Eq. (2.11) diz como a densidade aumenta com a profundidade (ou diminui com o raio). Assim, pode-se calcular a densidade a uma pequena distância abaixo da superfície, isto é, na base de uma fina casca superficial. O lado direito da Eq. (2.11) pode, então, ser calculado para um valor de r ligeiramente menor, $r = R - \Delta r$.

Estes procedimentos podem ser repetidos para profundidades maiores, em direção ao centro da Terra.

Observações:

(a) No presente trabalho, inicia-se a determinação da densidade na superfície ($r = R$). Isto é aproximado, porque é conhecido que a crosta é uma camada de espessura e densidade variável, sua massa é mais usada para auxiliar nas conclusões. Utiliza-se como densidade da casca mais externa, a densidade média das rochas encontradas na superfície da Terra.

(b) Uma outra abordagem (Poirier, 2000) sugere que a integração seja iniciada no topo do manto, para o qual uma densidade em torno de $3,3 \text{ g/cm}^3$ é escolhida, baseada em amostras advindas do manto, e, então a densidade é calculada em todas as profundidades superiores àquela relativa ao contato crosta-manto.

(c) Na interface manto-núcleo pode-se não esperar bons resultados do modelo autocompressivo porque informações da sismologia sugerem que ocorrem mudanças bruscas na composição dos materiais, que não pode ser devido apenas à compressão (Fowler, 2005).

2.2 Equação numérico-iterativa da densidade

Nesta seção, constrói-se uma equação numérico-iterativa para a determinação radial da densidade. Diferentemente do que foi feito para obter a Eq. (2.15), propõe-se substituir a Eq. (2.11) numa aproximação de Taylor de primeira ordem da densidade.

Considere a Terra esférica e simétrica formada por cascas esféricas concêntricas de raio r . A derivada da densidade $\frac{d\rho}{dr}$ para cada casca na Terra pode ser dada pela equação de Adams-Williamson:

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}\rho(r),$$

onde

- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ é a constante universal da gravitação;
- $\Phi(r) = \alpha^2(r) - \frac{4}{3}\beta^2(r)$;
- $0 \leq r \leq R$ ($r = R$ corresponde à superfície da Terra e $r = 0$ ao seu centro); e
- $M_r = \int_0^r 4\pi\rho(u)u^2 du$ é a massa da região esférica de raio r .

Considerando o raio $r \in [0, R]$, onde R é o raio da Terra, toma-se uma partição do intervalo $[0, R]$ na qual cada subintervalo tem tamanho Δr . Usando-se a expansão de Taylor até a primeira ordem para $\rho(r)$ e para um Δr suficientemente pequeno, tem-se:

$$\rho(r - \Delta r) = \rho(r) - \frac{d\rho(r)}{dr} \Delta r. \quad (2.16)$$

Substituindo-se a Eq. (2.11) na Eq. (2.16), tem-se:

$$\rho(r - \Delta r) = \left[1 + \frac{GM_r}{r^2\Phi(r)}\Delta r \right] \rho(r). \quad (2.17)$$

A Eq. (2.17) é uma equação numérico iterativa de Adams-Williamson numa versão (ainda) analítica. Isto significa que conhecendo-se a densidade $\rho(r)$ numa casca esférica de raio r , pode-se, via Eq. (2.17), determinar a densidade $\rho(r - \Delta r)$ numa casca de raio $r - \Delta r$. Então, em cada estágio de cálculo, trabalhando da superfície para dentro da Terra, todos os termos do lado direito da Eq. (2.17) referem-se a propriedades do material externo à esfera para cujo raio já foram determinadas em iterações já realizadas.

A partir dos ítems (i), (ii) e (iii) da Seção (2.1) e da Eq. (2.17), segue-se o algoritmo:

- I. Conhece-se a densidade das rochas na superfície, ou seja, para $r = R$;
- II. A uma pequena distância abaixo da superfície, isto é, na base de uma fina casca superficial, da Eq. (2.17) tem-se que:

$$\rho(R - \Delta r) = \left[1 + \frac{GM_R}{R^2\Phi(R)}\Delta r \right] \rho(R). \quad (2.18)$$

- III. O lado direito da Eq. (2.17) pode, então, ser novamente calculado para um valor de r menor que $R - \Delta r$, onde $M_{R-\Delta r}$ será igual à massa da Terra menos a da casca mais externa, cuja densidade é conhecida. Isto é,

$$\rho(R - 2\Delta r) = \left[1 + \frac{GM_{R-\Delta r}}{(R - \Delta r)^2\Phi(R - \Delta r)}\Delta r \right] \rho(R - \Delta r). \quad (2.19)$$

- IV. Os procedimentos anteriores podem ser repetidos para profundidades maiores, em direção ao centro da Terra. Tal como:

$$\rho[R - (N - 1)\Delta r] = \left\{ 1 + \frac{GM_{R-(N-2)\Delta r}}{[R - (N - 2)\Delta r]^2\Phi[R - (N - 2)\Delta r]}\Delta r \right\} \rho[R - (N - 2)\Delta r], \quad (2.20)$$

onde N é um inteiro positivo e Δr deve ser escolhido de tal modo que $(N - 1)\Delta r = R$.

Para implementação computacional, conforme considerações anteriores, pode-se fazer a distância radial corresponder ao intervalo $[0, R]$. Tomando-se uma partição $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ desse intervalo onde $r_1 = R$ e $r_N = 0$. Assim, tem-se um segmento constituído de $N - 1$ partes de tamanhos $\Delta r_i = r_i - r_{i+1}$ e $R = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta r_i$.

O objetivo é a determinação da densidade numa casca de raio r_{i+1} a partir do conhecimento de informações da casca anterior, ou seja, informações da casca de raio r_i (Figura 2.2). Nestes termos, reescreve-se a Eq. (2.17) na forma:

$$\rho(r_{i+1}) = \left(1 + \frac{GM_{r_i}}{r_i^2 \Phi_i} \Delta r_i \right) \rho(r_i), \quad (2.21)$$

onde $\Phi_i = \Phi(r_i) = \alpha_i^2 - \frac{4}{3}\beta_i^2$ é chamado parâmetro sísmico com $\alpha_i = \alpha(r_i)$ e $\beta_i = \beta(r_i)$. A Eq. (2.21) é a equação numérico iterativa de Adams-Williamson em sua versão computacional.

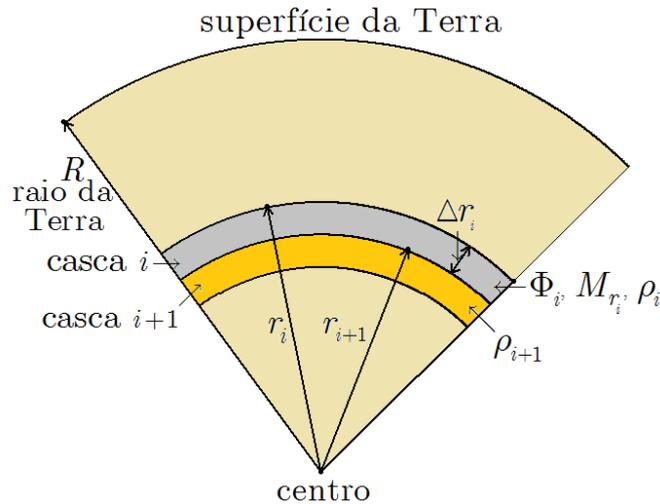


Figura 2.2: Modelo da Terra para aplicação da versão numérico iterativa da Equação de Adams-Williamson.

A massa M_{r_i} será determinada fazendo $M_{r_i} = M_T - M_{C_i}$, sendo que $M_T = 5,98736 \times 10^{24}$ kg é conhecida de estudos sobre os períodos de rotação de satélites e de medidas diretas da gravidade, e M_{C_i} é a massa da coroa circular, C_i , limitada entre as esferas de raios R e r_i . Calcula-se M_{C_i} por:

$$M_{C_i} = \bar{\rho}_{C_i} V_{C_i}, \quad (2.22)$$

onde $\bar{\rho}_{C_i}$ é a densidade média e V_{C_i} o volume da coroa C_i , respectivamente, calculados por:

$$\bar{\rho}_{C_i} = \frac{1}{R - r_{i+1}} \sum_{k=1}^i \rho_k \Delta r_k \quad (2.23)$$

e

$$V_{C_i} = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r_i^3), \quad (2.24)$$

onde o valor do raio da Terra é dado por $R = 6.371$ km e $\Delta r = 0,1$ km.

CAPÍTULO 3

Interpolações dos dados de velocidades

Este capítulo apresenta a teoria e os métodos numéricos utilizados na geração de funções de densidade produzidas pela aproximação de Taylor da densidade usando a equação de Adams-Williamson.

Neste trabalho, utilizam-se os dados do PREM, mais especificamente, os dados do modelo ak135-f, para as velocidades das ondas P e S. Essas velocidades foram interpoladas pelos seguintes tipos de função:

- (i) polinômios;
- (ii) irracionais (polinômios de graus fracionários);
- (iii) linear por partes; e
- (iv) *spline* cúbica.

As velocidades obtidas por interpolação são inseridas na Eq. (2.21) para gerar valores da densidade em função do raio (ou da profundidade) via implementação computacional para, posteriormente, comparar os perfis obtidos com aqueles presentes na Tabela A, de dados do PREM.

A implementação computacional foi feita em linguagem FORTRAN 95 e os resultados são apresentados nas seções do Capítulo 4. Em todas as interpolações foi utilizado um espaçamento de $\Delta r = 0,1$ km.

3.1 Interpolação das velocidades por polinômios

Considere que as velocidades das ondas P e S em cada casca de raio r sejam dadas em função de r por:

$$\alpha(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_nr^n \quad (3.1)$$

e

$$\beta(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + \dots + b_nr^n. \quad (3.2)$$

Determina-se os coeficientes a_i e b_i para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ utilizando os dados do raio e das

velocidades das ondas P e S do PREM.

Para os dados da onda P, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \cdots + a_n r_1^n \\ \alpha_2 = a_0 + a_1 r_2 + a_2 r_2^2 + \cdots + a_n r_2^n \\ \alpha_3 = a_0 + a_1 r_3 + a_2 r_3^2 + \cdots + a_n r_3^n \\ \vdots \\ \alpha_m = a_0 + a_1 r_m + a_2 r_m^2 + \cdots + a_n r_m^n \end{cases}, \quad (3.3)$$

que em termos matriciais assume a forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \cdots & r_2^n \\ 1 & r_3 & r_3^2 & \cdots & r_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & r_m & r_m^2 & \cdots & r_m^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Similarmente, para os dados da onda S, tem-se:

$$\begin{cases} \beta_1 = b_0 + b_1 r_1 + b_2 r_1^2 + \cdots + b_n r_1^n \\ \beta_2 = b_0 + b_1 r_2 + b_2 r_2^2 + \cdots + b_n r_2^n \\ \beta_3 = b_0 + b_1 r_3 + b_2 r_3^2 + \cdots + b_n r_3^n \\ \vdots \\ \beta_m = b_0 + b_1 r_m + b_2 r_m^2 + \cdots + b_n r_m^n \end{cases}, \quad (3.5)$$

e

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \cdots & r_2^n \\ 1 & r_3 & r_3^2 & \cdots & r_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & r_m & r_m^2 & \cdots & r_m^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

As Eqs. (3.4) e (3.6) são sistemas lineares sobredeterminados (existem mais equações linearmente independentes que incógnitas) e pode-se, então, utilizar o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para resolvê-los. Desse modo, fazendo

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \cdots & r_2^n \\ 1 & r_3 & r_3^2 & \cdots & r_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & r_m & r_m^2 & \cdots & r_m^n \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

pode-se reescrever a Eq. (3.4) como $[\boldsymbol{\alpha}]_{m \times 1} = [\mathbf{R}]_{m \times (n+1)} [\mathbf{a}]_{(n+1) \times 1}$. Então,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.9)$$

Em síntese:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{A} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T$. Note que \mathbf{A} é uma matriz de ordem $(n+1) \times m$.

De modo similar, para a Eq. (3.6), pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}^T \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T, \quad (3.11)$$

e, então, $[\boldsymbol{\beta}]_{m \times 1} = [\mathbf{R}]_{m \times (n+1)} [\mathbf{b}]_{(n+1) \times 1}$. Assim,

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{R}^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\beta}. \quad (3.12)$$

Sinteticamente,

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}. \quad (3.13)$$

Como foi dito, as Eqs. (3.10) e (3.13) foram resolvidas pelo MMQ e utilizou-se o método do Conjugado Gradiente para a determinação dos coeficientes. Este trabalho utilizou polinômios de graus $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ para interpolação das velocidades sísmicas.

3.2 Interpolação das velocidades por funções irracionais

Observando-se os perfis obtidos usando interpolação polinomial das velocidades, percebe-se que alguns resultados de velocidades e densidade podem ser melhor representadas por polinômios que tem grau em torno de 9. Assim, resolve-se determinar as velocidades P e S utilizando funções dadas por potências fracionárias de r , ou seja, funções irracionais. Significa o seguinte, a dependência das velocidades em função do raio com potência fracionária será dada por equações do tipo:

$$\alpha(r) = a_0 + a_1 r^{0,5} + a_2 r^{1,5} + \dots + a_n r^{n-0,5} \quad (3.14)$$

e

$$\beta(r) = b_0 + b_1 r^{0,5} + b_2 r^{1,5} + \dots + b_n r^{n-0,5}, \quad (3.15)$$

onde os coeficientes a_i e b_i são obtidos utilizando-se o MMQ. De modo geral, considere q um número não inteiro, poderia assumir as potências do raio r como do tipo r^{n-q} ou até r^{q-n} e seguir na determinação dos coeficientes usando o MMQ.

3.3 Interpolação das velocidades por função linear por partes

Neste tipo de interpolação, as velocidades α e β serão representadas por segmentos lineares. Considerando-se, agora, que r é a profundidade e os valores conhecidos das velocidades (PREM) $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ nos pontos com índice $i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ tais que $\alpha(r_i) = \alpha_i$ e $\beta(r_i) = \beta_i$, tem-se n intervalos entre pontos consecutivos r_i e r_{i+1} com r_{n+1} o maior de todos, pois $r_i < r_{i+1}$. A maneira mais simples de unir estes pontos por uma linha contínua é traçar uma reta entre cada dois pontos consecutivos. Deste modo, as equações de $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ serão dadas, respectivamente por:

$$\alpha(r) = \alpha_i + (r - r_i) \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{r_{i+1} - r_i}, \text{ para } r \in [r_i, r_{i+1}] \quad (3.16)$$

e

$$\beta(r) = \beta_i + (r - r_i) \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{r_{i+1} - r_i}, \text{ para } r \in [r_i, r_{i+1}]. \quad (3.17)$$

Alternativamente,

$$\alpha(r) = \alpha_i + (r - r_i) \frac{\Delta\alpha_i}{\Delta r_i} \quad (3.18)$$

e

$$\beta(r) = \beta_i + (r - r_i) \frac{\Delta\beta_i}{\Delta r_i}, \quad (3.19)$$

onde $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ e $\Delta\beta_i = \beta_{i+1} - \beta_i$.

Os valores dessas velocidades interpoladas foram utilizados na equação numérico iterativa de Adams-Williamson, Eq. (2.21), para fornecer um perfil da distribuição de densidade das rochas no interior da Terra.

3.4 Interpolação das velocidades por *spline* cúbica

Uma apresentação mais detalhada do método de interpolação por *spline* cúbica é feita no Apêndice B. Na *spline* cúbica, interpola-se as velocidades α e β utilizando um polinômio

de terceiro grau por partes para ligar cada par de pontos consecutivos. Então, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, com r ainda significando profundidade, tem-se um intervalo $I_i = [r_i, r_{i+1}]$, $h_i = r_{i+1} - r_i$, $g_i = y_{i+1} - y_i$ onde $y_i = \alpha_i$ ou $y_i = \beta_i$. Então, para todo $r \in [r_i, r_{i+1}]$ tem-se o polinômio dado por:

$$p_i(r) = a_i (r - r_i)^3 + b_i (r - r_{i+1})^3 + c_i (r - r_i) + d_i (r - r_{i+1}). \quad (3.20)$$

onde as constantes a_i, b_i, c_i e d_i são determinadas de forma que sejam satisfeitas algumas propriedades. Essas mesmas propriedades são utilizadas para calcular as derivadas da Eq. (3.20) nos pontos dados. Mostra-se que é necessário resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & e_2 & h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h_{n-3} & e_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-2} & e_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1'' \\ p_2'' \\ p_3'' \\ \vdots \\ p_{n-1}'' \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde $e_i = 2(h_{i-1} + h_i)$ e $f_i = 6 \left(\frac{g_i}{h_i} - \frac{g_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$ e completam o sistema as condições adicionais $p_0''(r_0) = p_{n-1}''(r_n) = 0$. A matriz dos coeficientes é tridiagonal e o sistema pode ser resolvido rapidamente pelo método da fatoração LU. De propriedades estabelecidas sobre a Eq. (3.20) e a solução da Eq. (3.21) tem-se:

$$\begin{cases} a_i = \frac{p_{i+1}''}{6h_i} \\ b_i = -\frac{p_i''}{6h_i} \\ c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i p_{i+1}''}{6} \\ d_i = \frac{h_i p_i''}{6} - \frac{y_i}{h_i} \end{cases} \quad (3.22)$$

Assim, o polinômio na Eq. (3.20) é plenamente determinado e, daí, obtém-se por interpolação aos valores do PREM as velocidades sísmicas α e β e elas são substituídas na equação numérico iterativa de Adams-Williamson, Eq. (2.21), para obter um perfil da distribuição das densidades no interior da Terra.

CAPÍTULO 4

Resultados

Este capítulo apresenta e compara os perfis de velocidades e densidade gerados pelas interpolações numéricas propostas no capítulo anterior.

Para isto, segue-se o algoritmo simplificado:

1º **passo**) Entrada dos dados do PREM: r, z, V_p, V_s ;

2º **passo**) Escolhe-se um método interpolador das velocidades V_p e V_s :

- (i) polinomial,
- (ii) irracional,
- (iii) linear por partes, e
- (iv) *spline* cúbico;

3º **passo**) Calculam-se as velocidades interpoladas α e β ;

4º **passo**) Insere-se α e β na equação numérico iterativa de Adams-Williamson, Eq. (2.21);

5º **passo**) Calculam-se os valores das densidades ρ em função do raio (ou da profundidade) na Terra; e

6º **passo**) Geram-se os perfis das velocidades interpoladas e das densidades calculadas.

4.1 Resultados para a interpolação por polinômios

As velocidades α e β são interpoladas por polinômios de graus 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 em função do raio r (Figuras 4.1, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.11 e 4.13) e obtém-se, através da Equação de Adams-Williamson em sua forma numérico iterativa, Eq. (2.21), os perfis de densidade exibidos nas Figuras 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, 4.12 e 4.14.

A maioria dos resultados só foi satisfatória até a interface manto-núcleo. Nenhum dos polinômios testados forneceu valores satisfatórios da densidade para profundidades abaixo da interface manto-núcleo. Observa-se que, dentre todos os polinômios utilizados, a velocidade interpolada por um polinômio de grau 9 forneceu a melhor aproximação para a densidade.

4.2 Resultados para a interpolação por funções irracionais

Apresentam-se os resultados para a interpolação das velocidades sísmicas por funções irracionais. Nas Figuras 4.15, 4.17, 4.19, 4.21, 4.23, 4.25 e 4.27 são mostrados os perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas interpolando tais dados por funções irracionais. As distribuições de densidade obtidas são mostradas nas Figuras 4.16, 4.18, 4.20, 4.22, 4.24, 4.26 e 4.28.

Observa-se que, dentre todas as funções irracionais utilizadas, a melhor aproximação da densidade para os dados do PREM (pelo menos até a metade superior do núcleo externo) foi produzida quando usou-se a função irracional de grau 7,5. Comparativamente ao caso da interpolação polinomial, nenhuma das funções irracionais utilizadas forneceu valores de densidade satisfatórios para profundidades superiores àquela da interface manto-núcleo.

4.3 Resultados usando interpolação linear por partes

Nesta seção são exibidos resultados obtidos utilizando uma interpolação linear por partes para as velocidades sísmicas P e S (Figura 4.29) que foram depois utilizadas na equação numérica iterativa de Adams-Williamson para produzir a distribuição de densidades no interior da Terra, Figura 4.30.

Observa-se que a interpolação linear gera os dados de velocidades do PREM com perfeição (exato). Entretanto, isso não se refletiu na obtenção de um perfil de densidade idêntico àquele fornecido pelo PREM, apesar de, em termos globais, ter ocorrido uma melhora significativa com respeito às interpolações polinomial e irracional.

4.4 Resultados usando interpolação por *spline* cúbica

Nesta seção são exibidos resultados obtidos utilizando-se interpolação por *spline* cúbica para as velocidades sísmicas P e S dadas pelo PREM (Figura 4.31) e que foram depois utilizadas na equação numérica iterativa de Adams-Williamson para produzir o perfil de densidades no interior da Terra, Figura 4.32.

Nota-se que a interpolação dos dados do PREM das velocidades P e S por *spline* cúbica gera os dados de velocidades do PREM com quase perfeição, exibindo pequenos erros nas interfaces (um efeito parecido com o de Gibbs). Assim como no método linear por partes, não produziu os mesmos valores de densidades do PREM. No entanto, dentre todos os métodos aqui utilizados, em termos globais, foi o método que forneceu os melhores resultados para densidade.

4.5 Comparação das densidades obtidas usando diferentes técnicas interpoladoras

Na Figura 4.33 são exibidos os melhores perfis de distribuição de densidade obtidos pelas técnicas interpoladoras propostas nas seções anteriores. Observando-se que até no manto e no início do núcleo externo as interpolações das velocidades por polinômios ou funções irracionais fornecem melhores aproximações para densidade do que quando utiliza-se as interpolações linear por partes ou *spline* cúbica, isto também pode ser visto no cálculo de erros na Tabela de Erros a seguir. No núcleo externo, os métodos de interpolação por polinômios e funções irracionais não se mostraram úteis para o cálculo da densidade pois exibiram oscilações extremas. Para esta região da Terra, os métodos de interpolação linear por partes e *spline* cúbica fornecem resultados mais próximos dos valores do PREM.

4.6 Cálculo de erros na densidade

Para avaliar o erro na densidade calculada para cada técnica interpoladora utilizada na Eq. (2.21) e aquela dos dados do PREM, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$E = \frac{1}{L} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^L [\rho_m(r_i) - \rho_c(r_i)]^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^L \rho_m^2(r_i)}} \times 100, \quad (4.1)$$

onde E é dado em %, r_i são os valores dos raios (pontos) nos quais as densidades são calculadas, L é o número de amostras, ρ_c é a densidade calculada pela técnica interpoladora com a Eq. (2.21) e ρ_m é a densidade do PREM.

Considerando o número de amostras total, L , como a quantidade de valores utilizados do modelo PREM ($L = 133$ amostras), o cálculo dos erros na densidade calculada pelas técnicas interpoladoras utilizadas na Eq. (2.21) forneceu os resultados seguintes: Linear por partes: $E = 0,326$; *Spline* cúbica: $E = 0,361$. Nota-se, pelos resultados obtidos para profundidades até a metade superior do núcleo externo que é desnecessário calcular os erros para as técnicas interpoladoras de funções polinomiais e irracionais. Entretanto, pelos resultados discutidos na Seção 4.5 e análise da Figura 4.33, calculou-se os erros devido a aplicação das técnicas interpoladoras até as profundidades (raios) indicadas na Tabela de Erros seguinte.

Tabela de Erros		
Técnica interpoladora	Erro (E%)	raio (km)
polinomial	0,277	2344
irracional	0,283	2146
linear por partes	0,634	2245
<i>spline</i> cúbica	0,478	2245

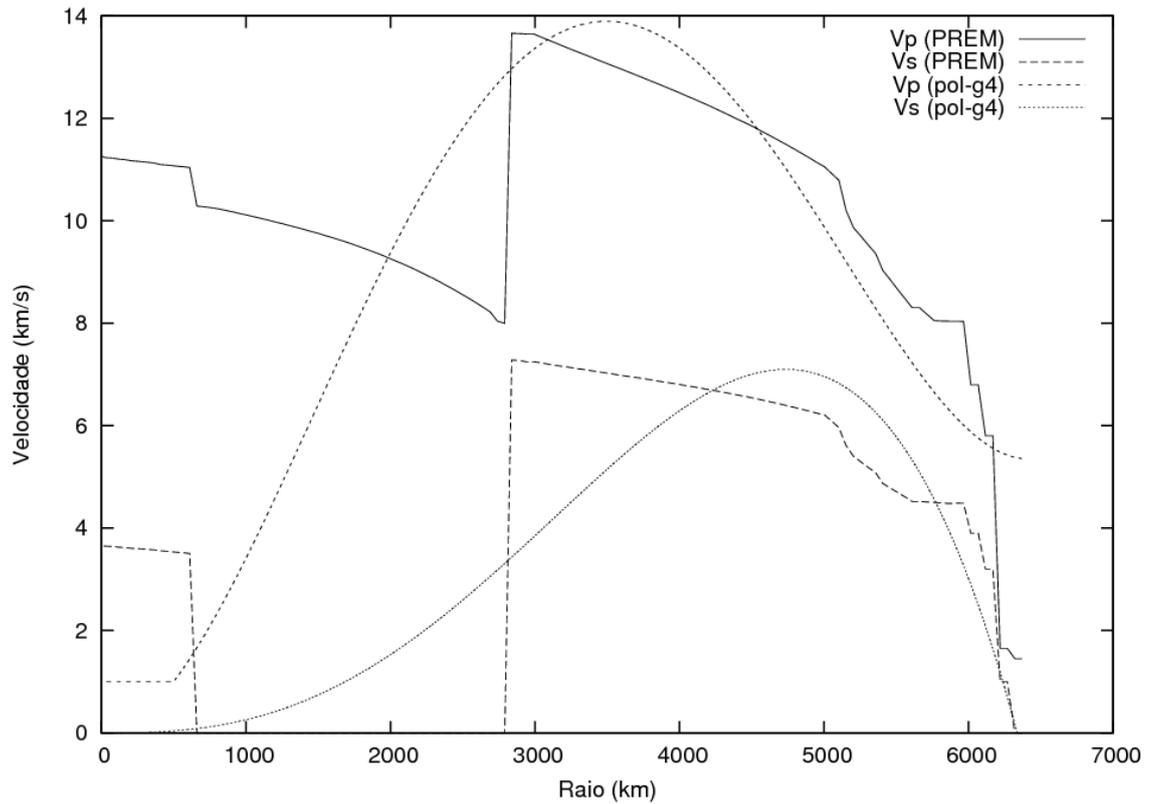


Figura 4.1: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 4 dos dados do PREM.

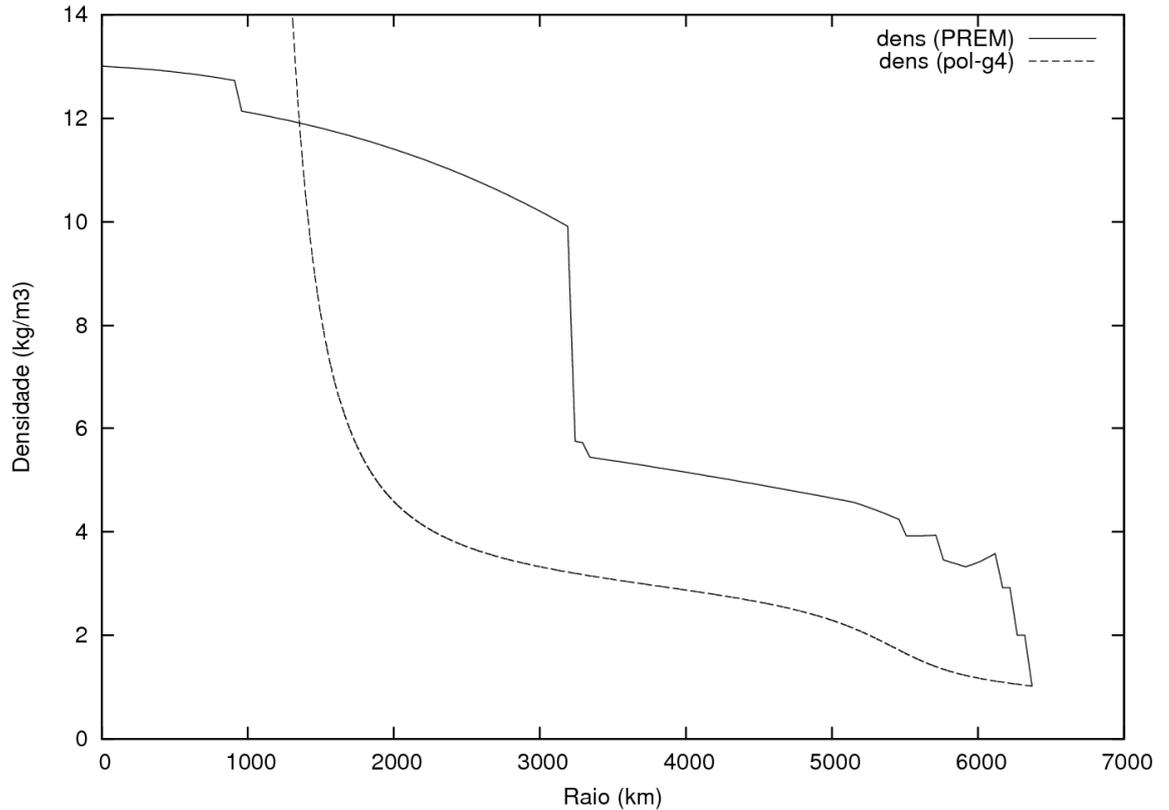


Figura 4.2: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 4.

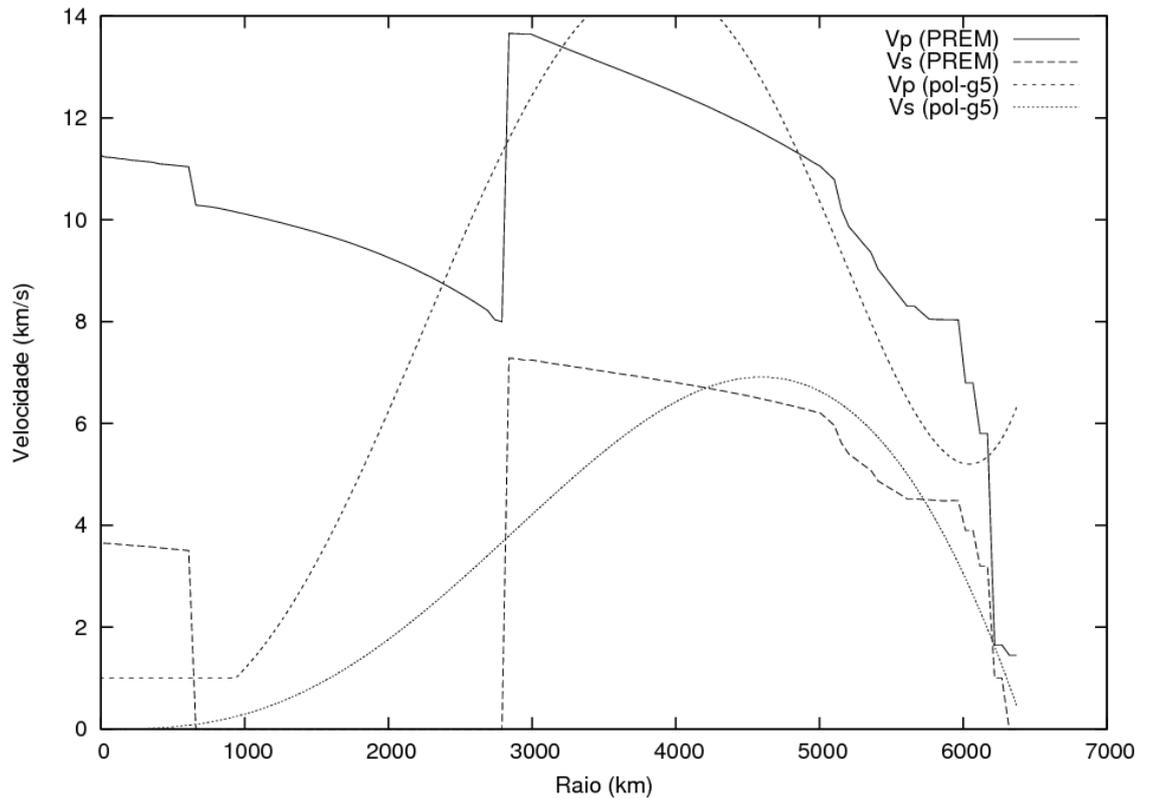


Figura 4.3: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 5 dos dados do PREM.

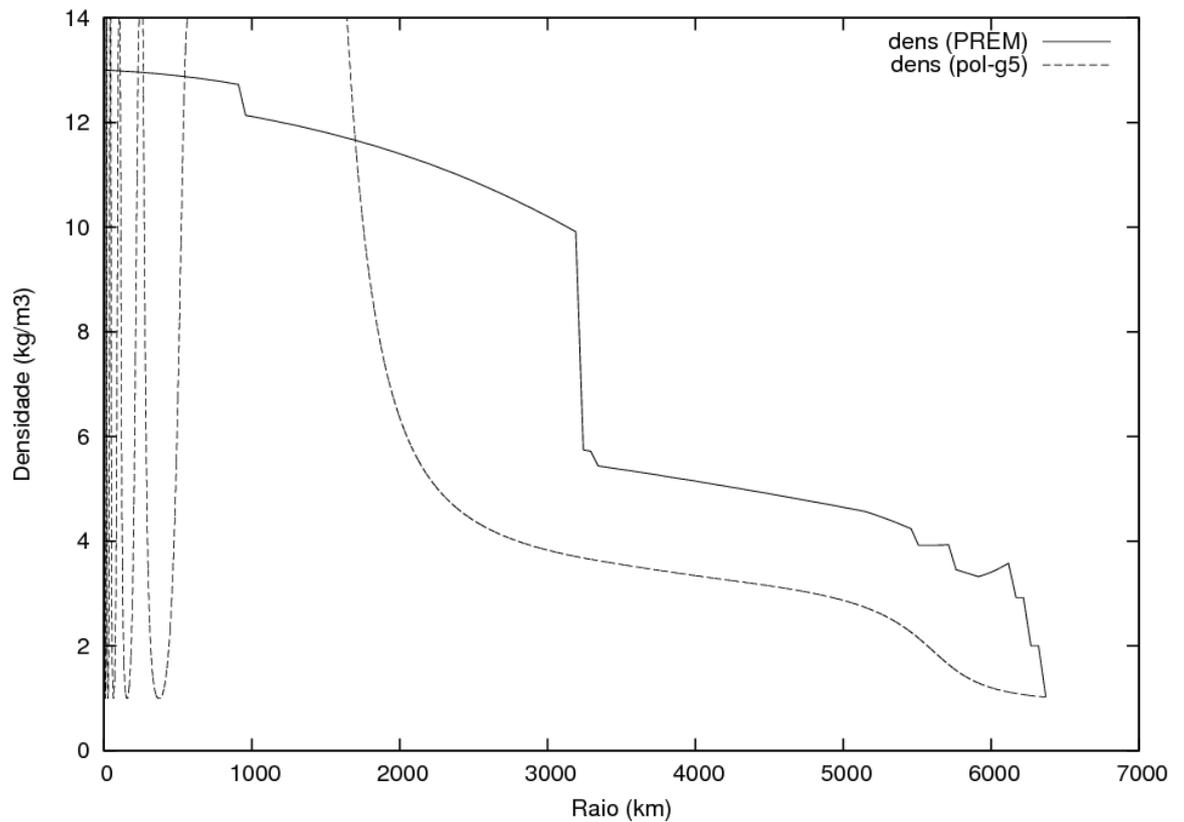


Figura 4.4: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 5.

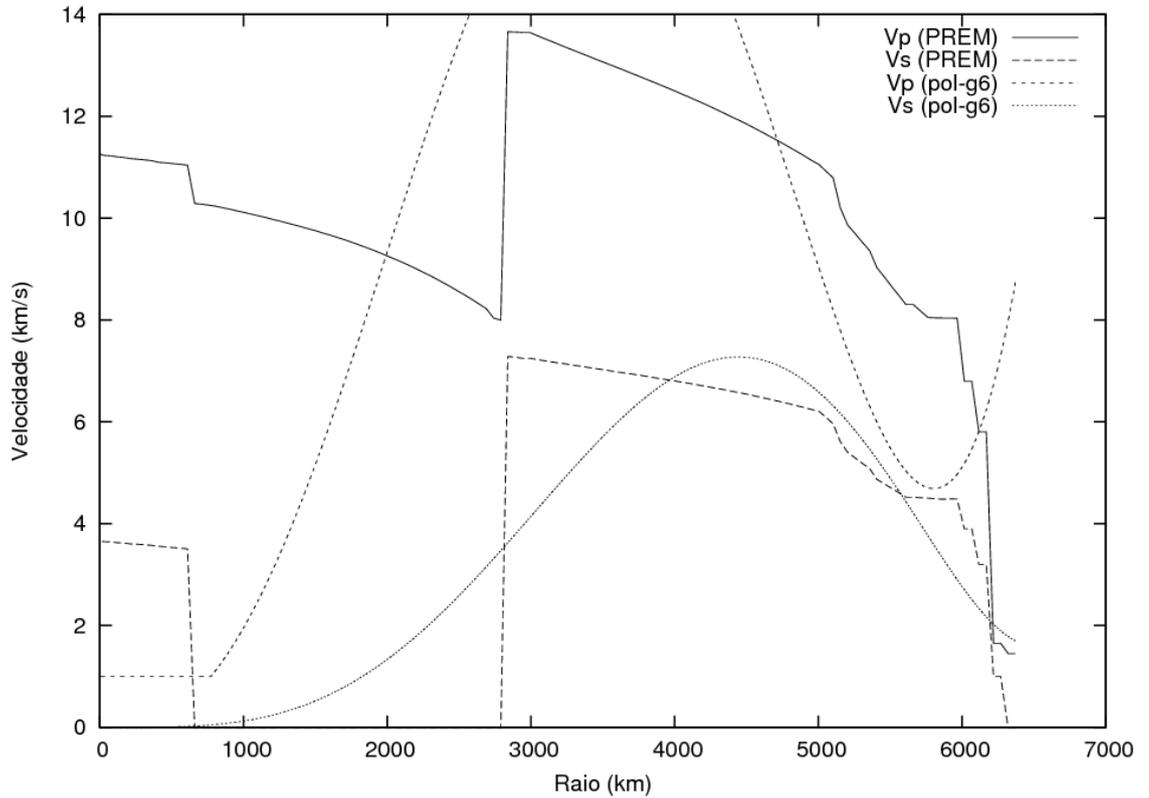


Figura 4.5: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 6 dos dados do PREM.

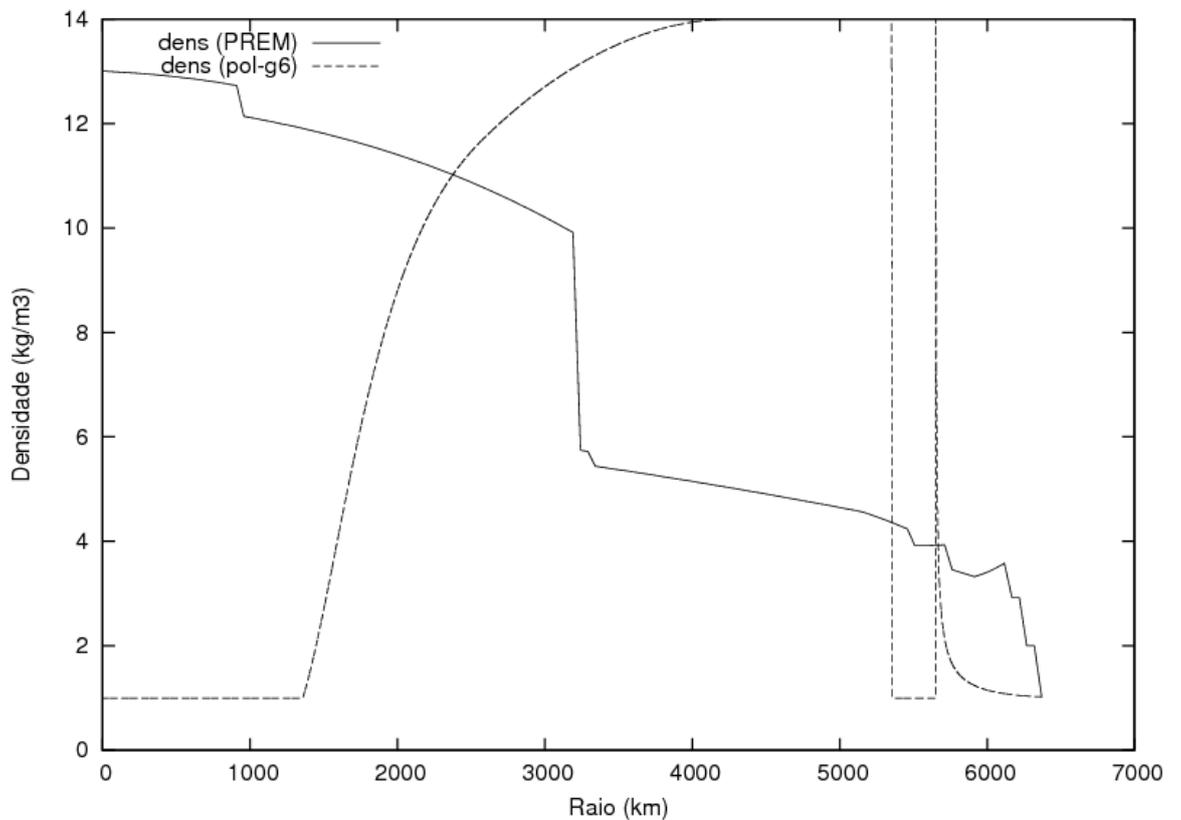


Figura 4.6: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 6.

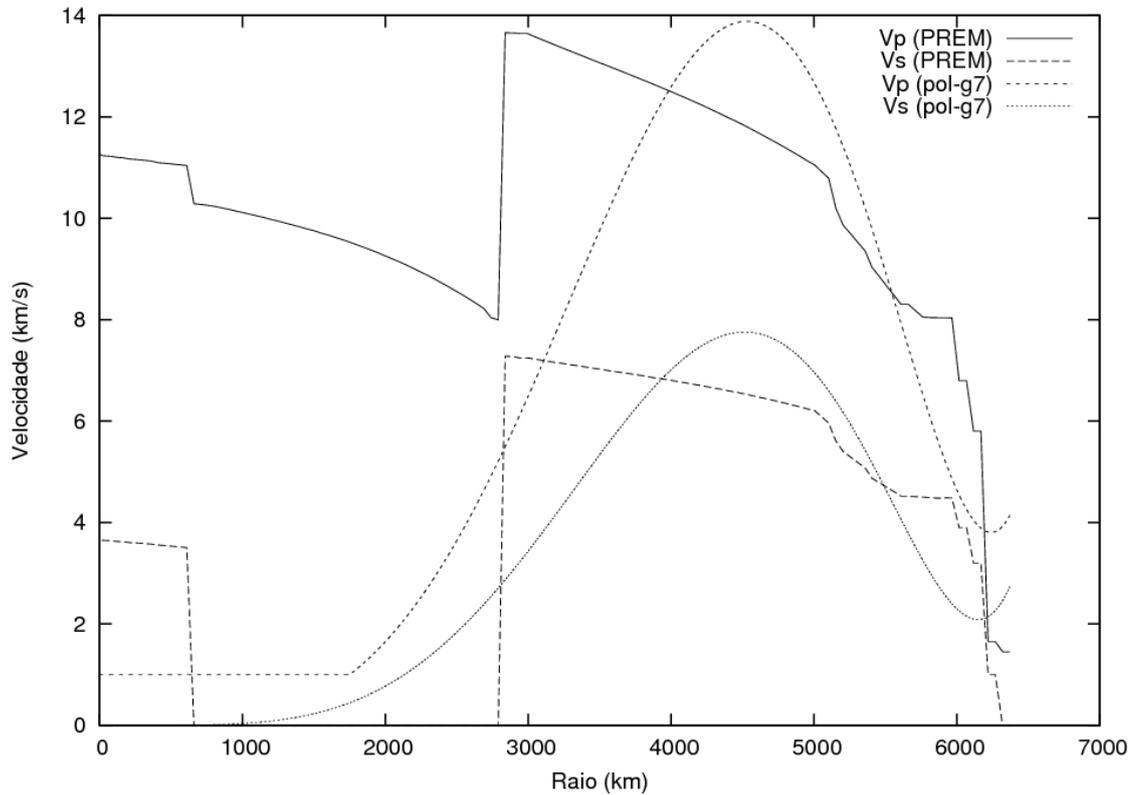


Figura 4.7: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 7 dos dados do PREM.

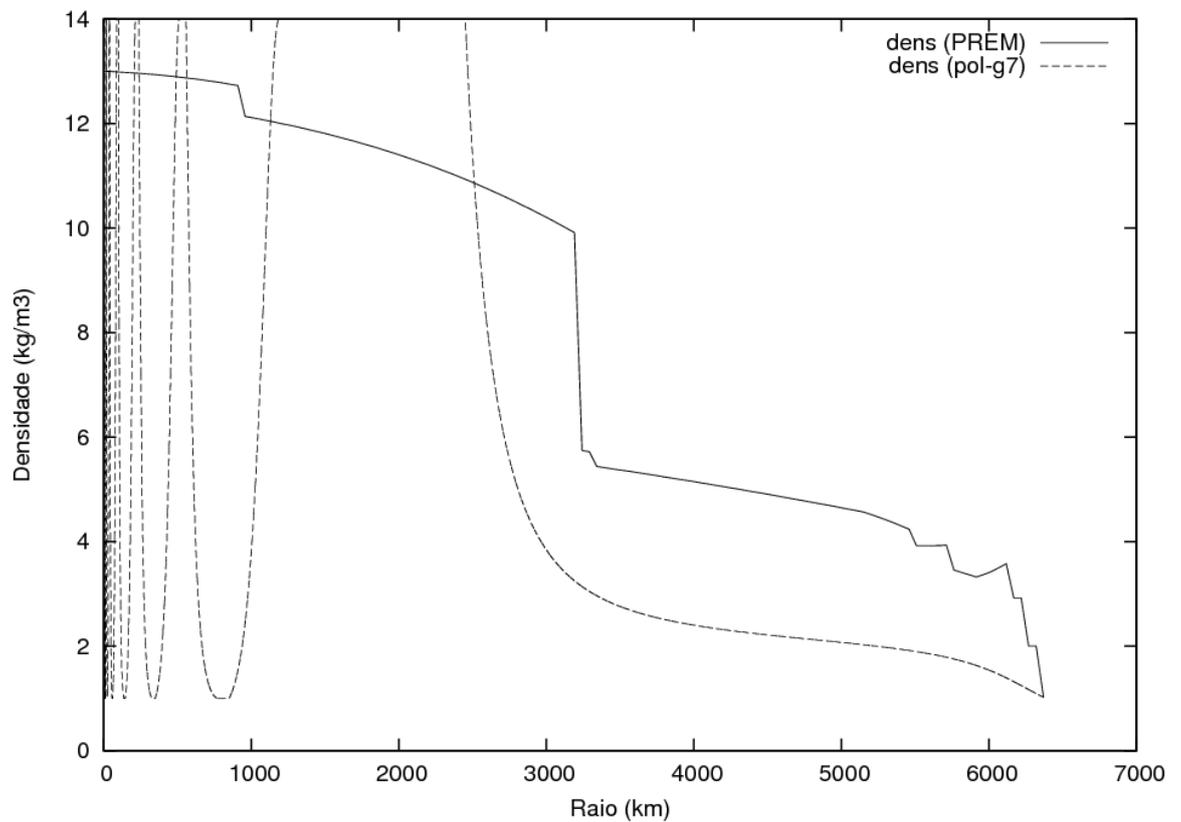


Figura 4.8: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 7.

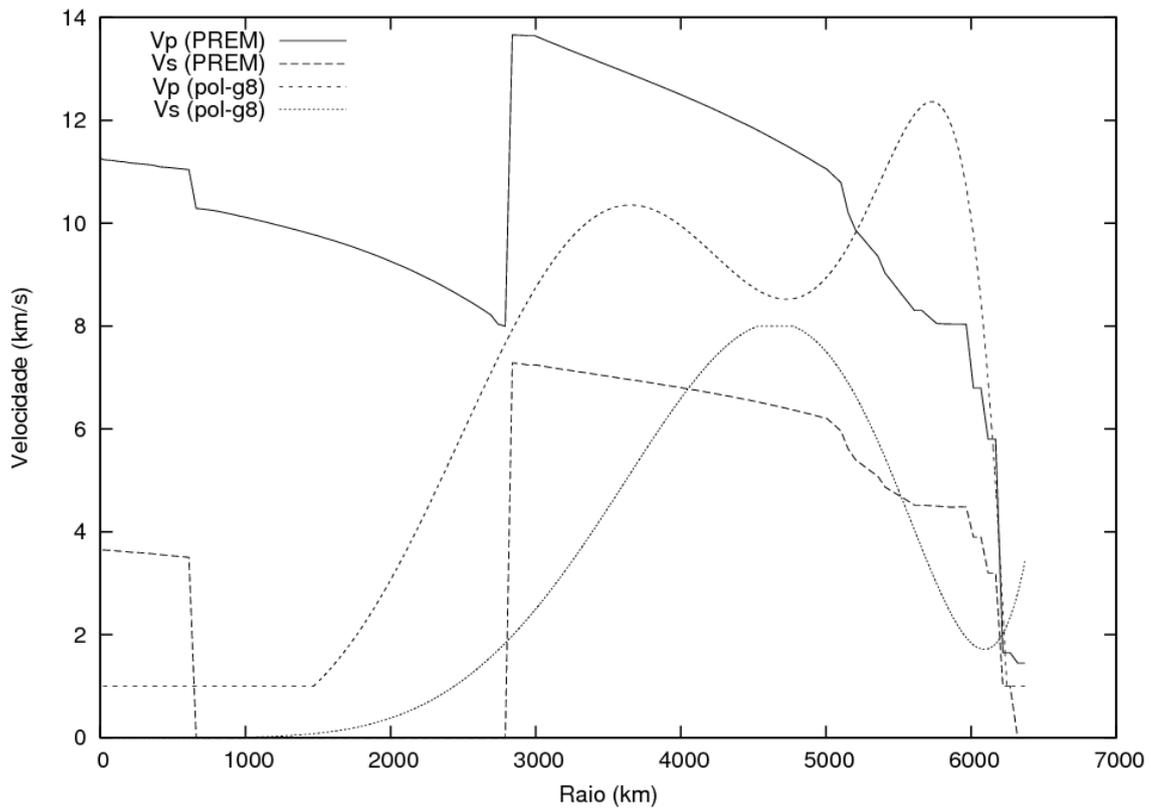


Figura 4.9: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 8 dos dados do PREM.

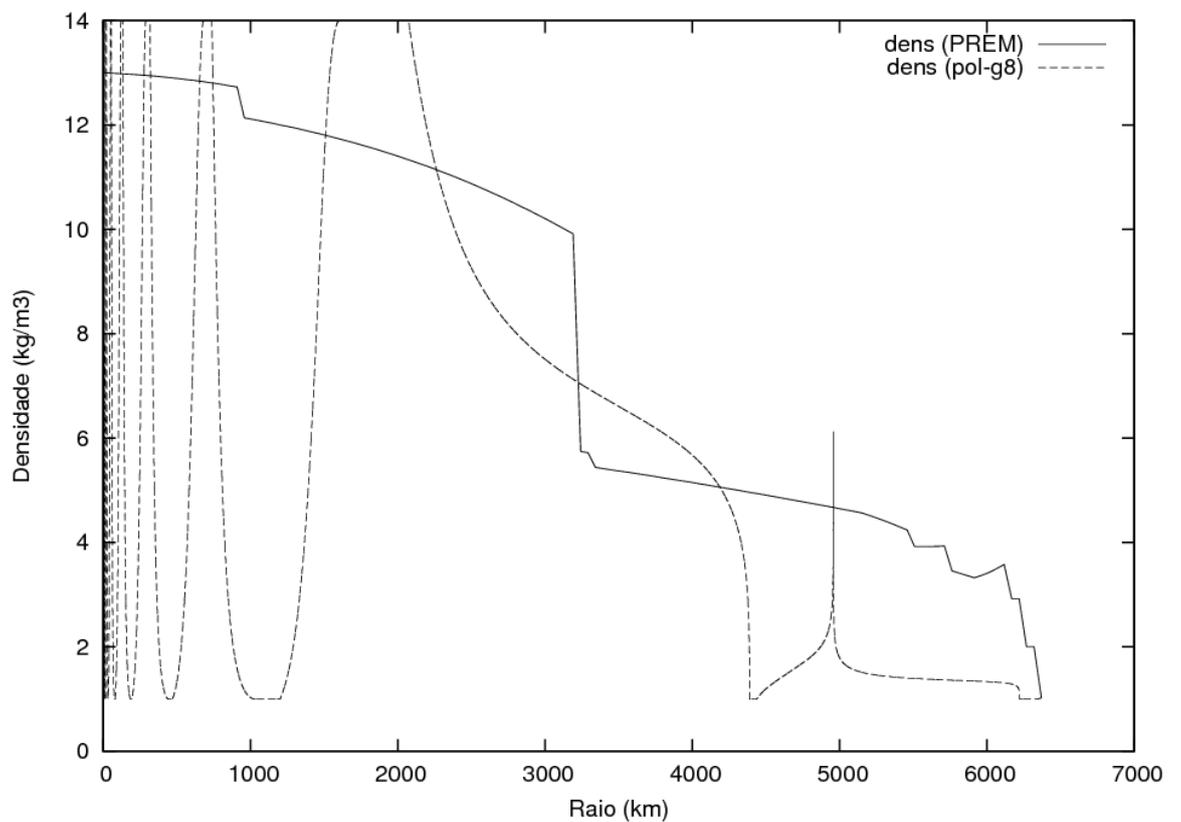


Figura 4.10: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 8.

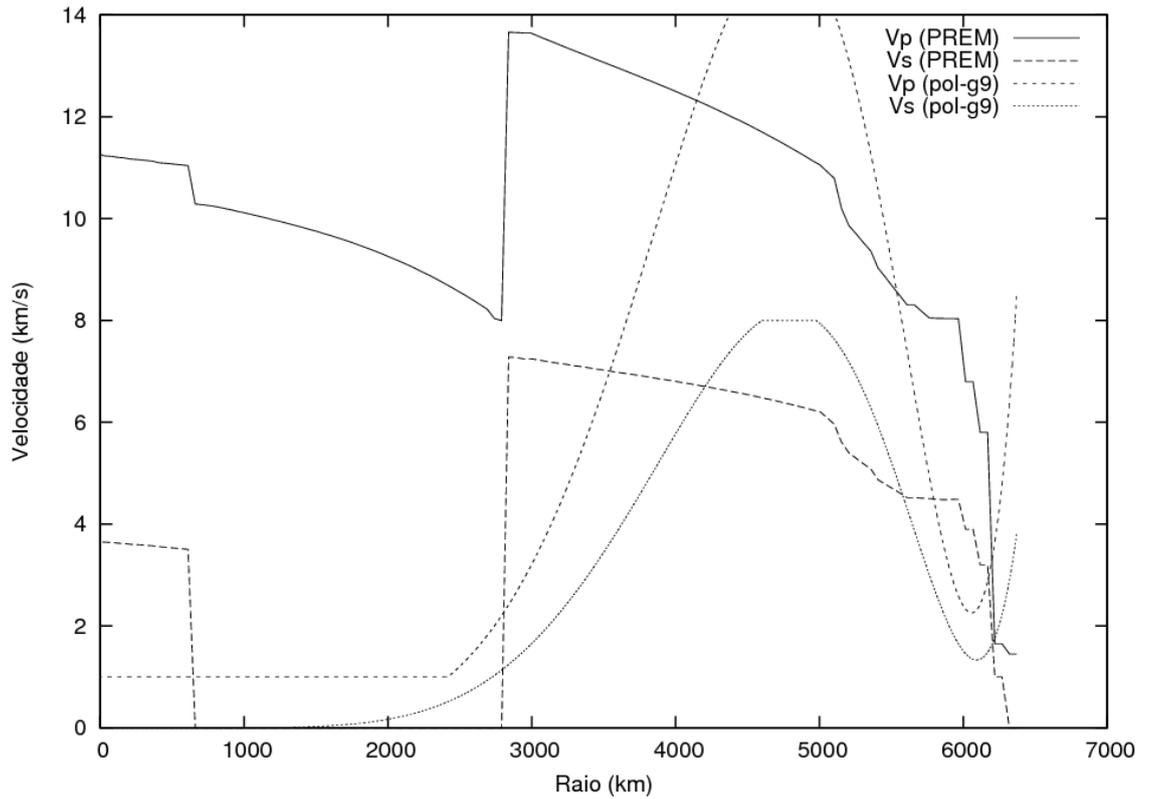


Figura 4.11: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 9 dos dados do PREM.

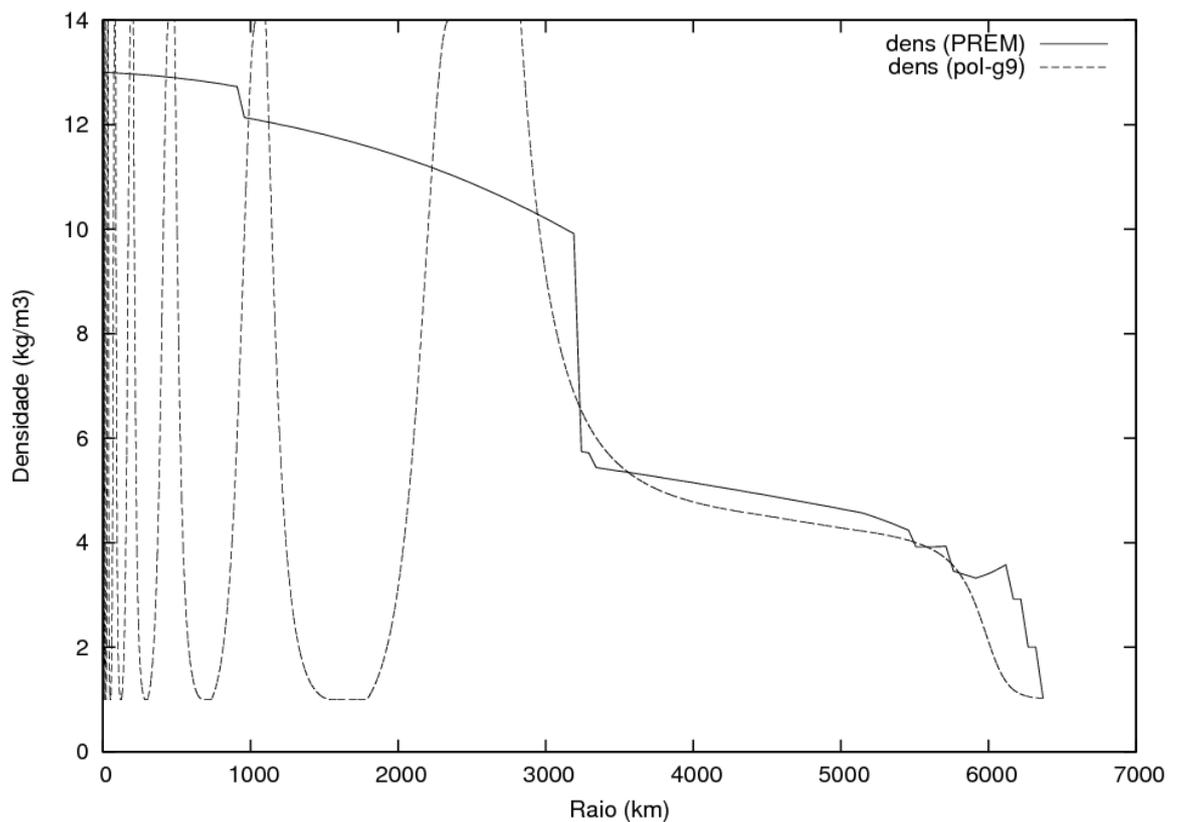


Figura 4.12: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 9.

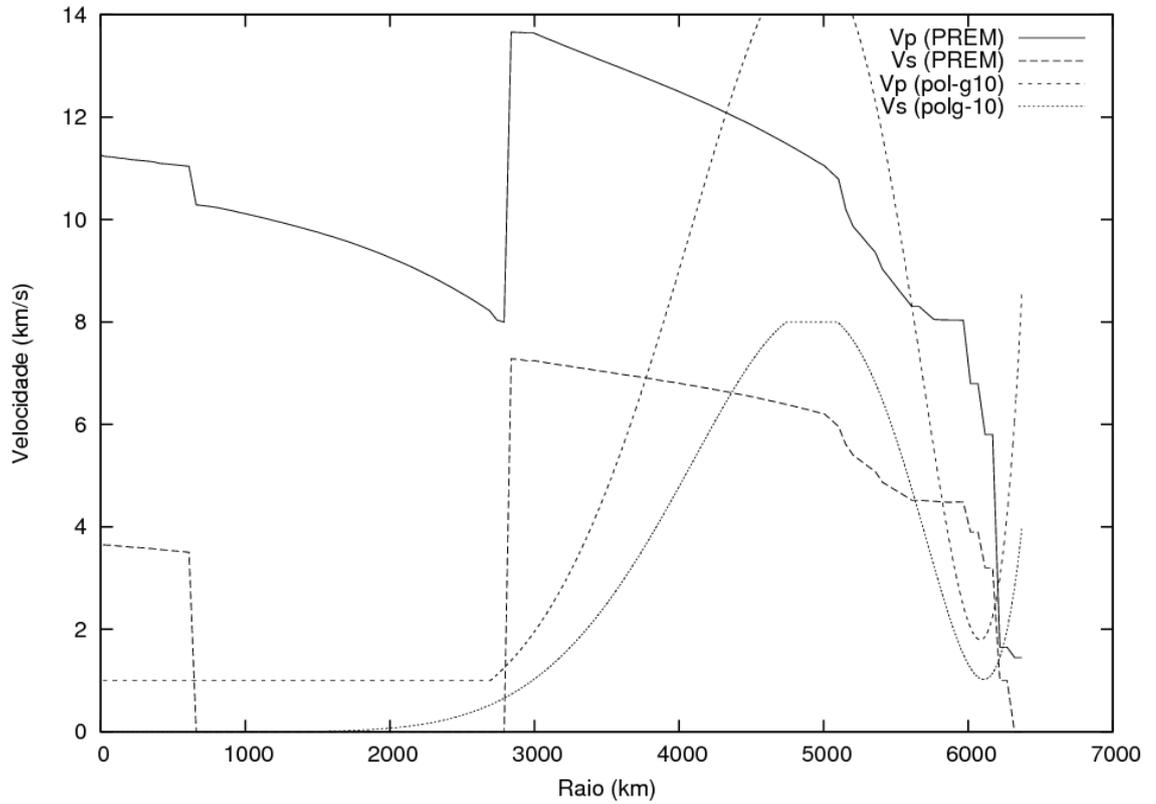


Figura 4.13: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por polinômios de grau 10 dos dados do PREM.

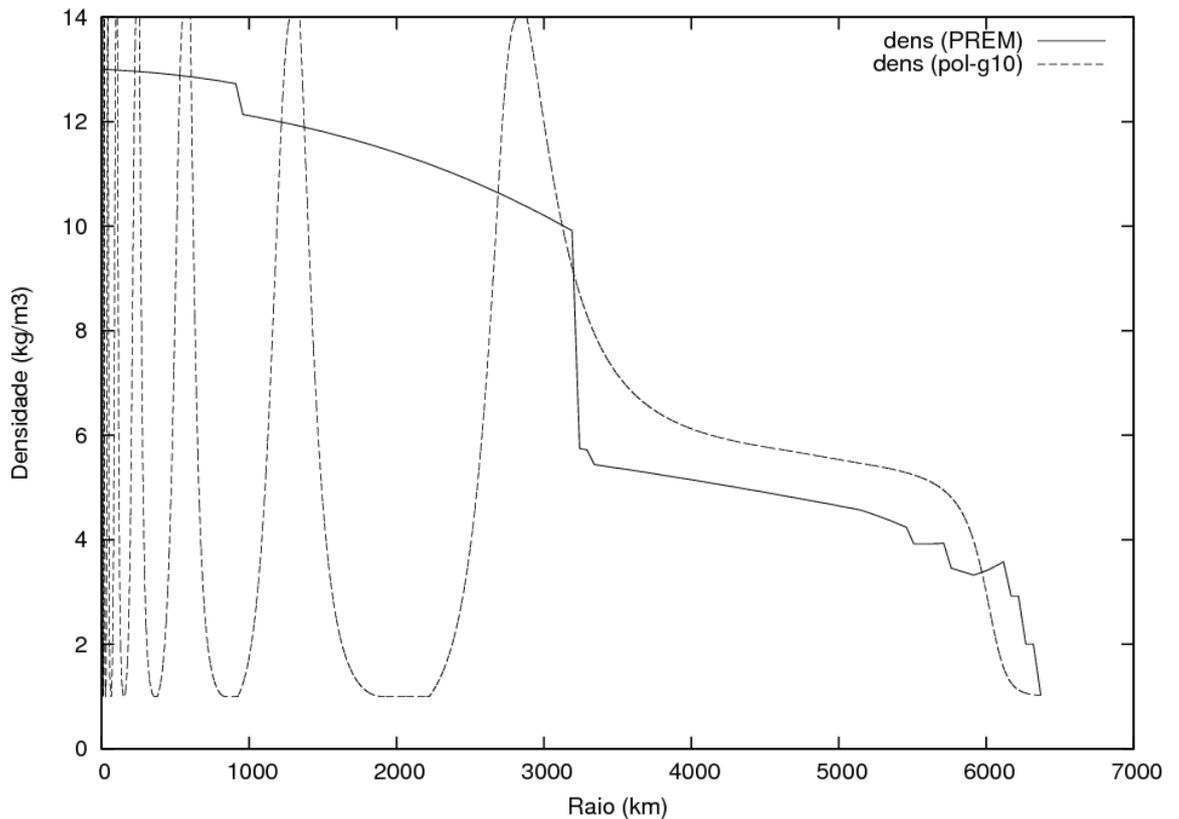


Figura 4.14: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por polinômios de grau 10.

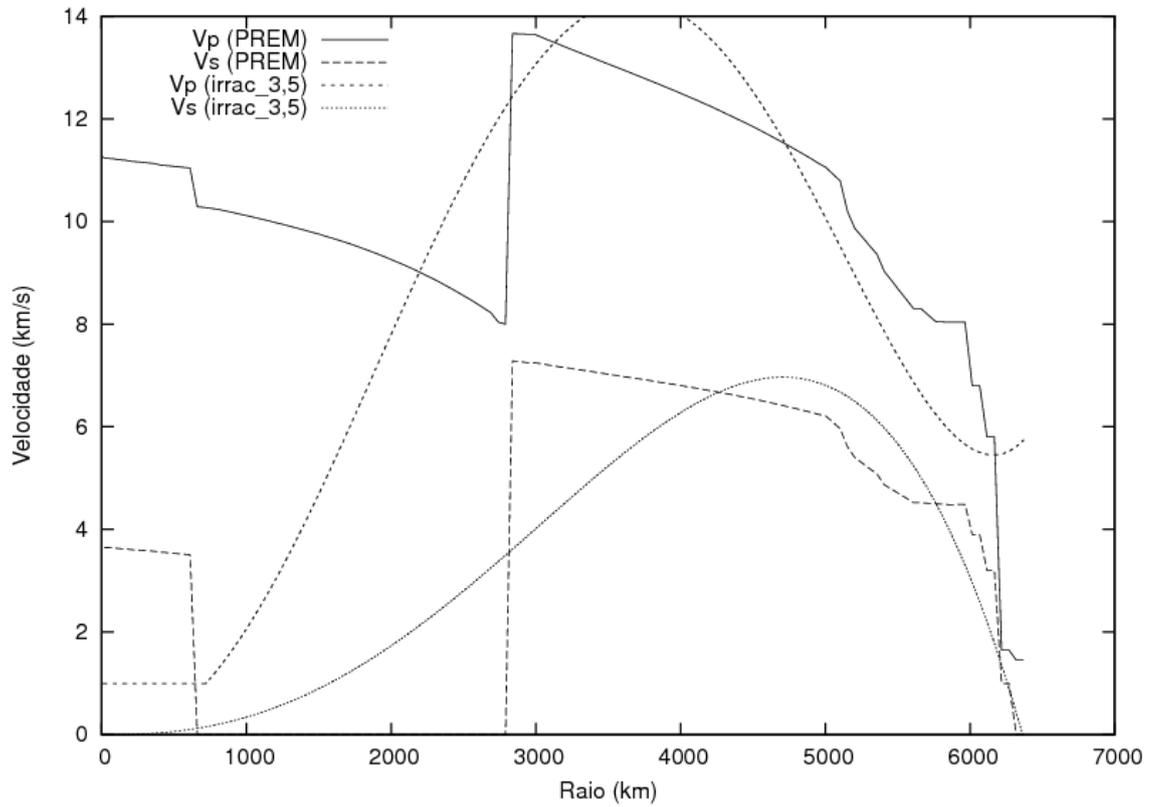


Figura 4.15: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 3, 5 dos dados do PREM.

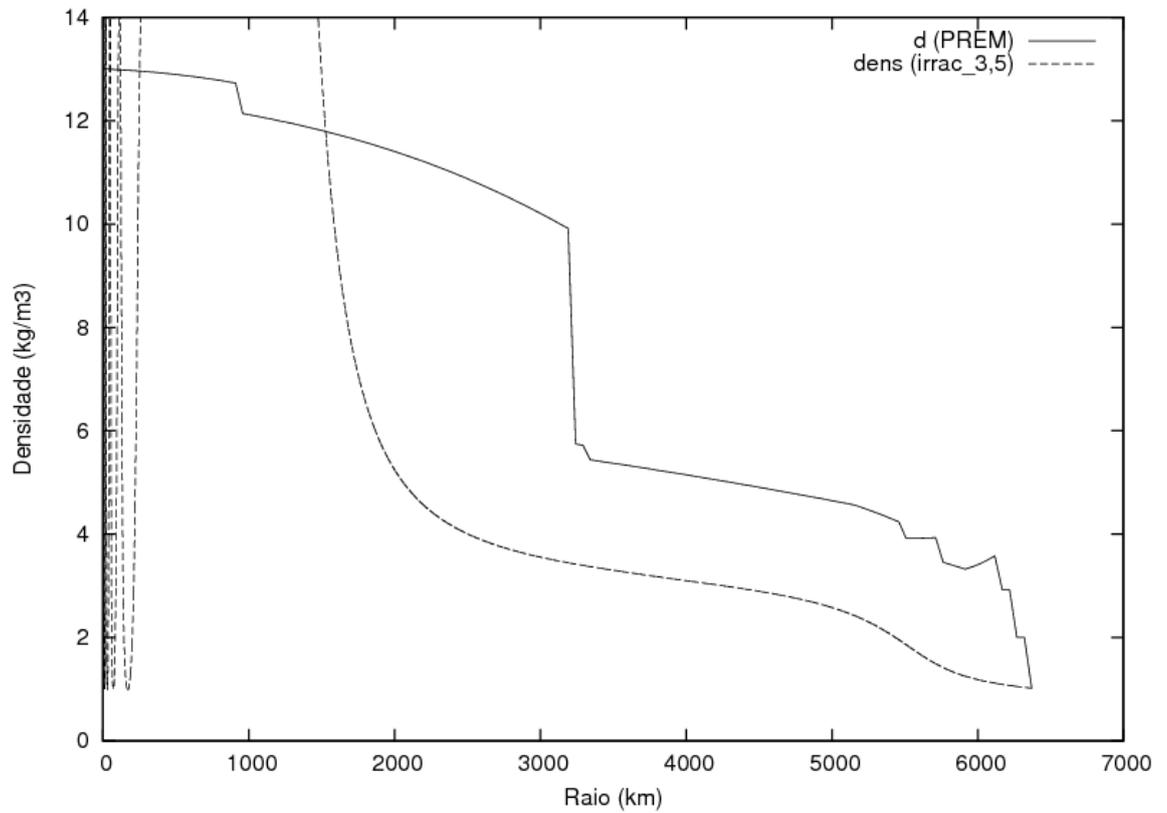


Figura 4.16: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 3, 5.

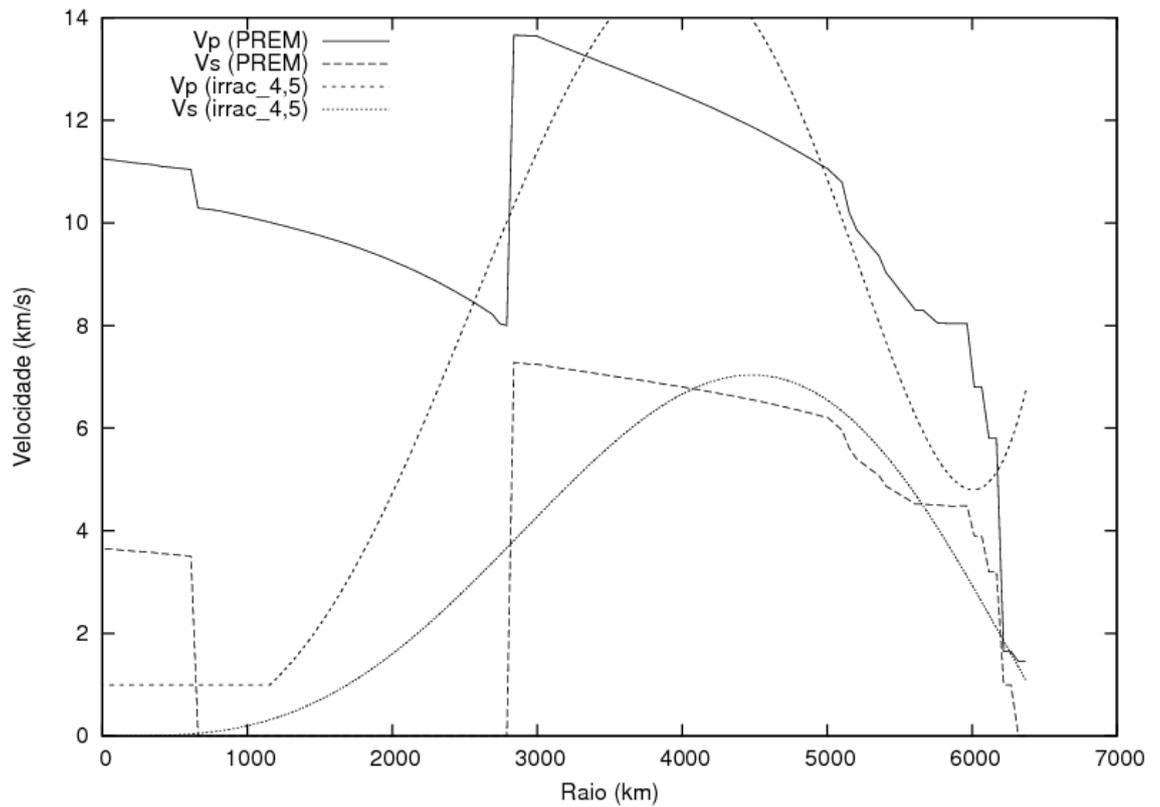


Figura 4.17: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 4, 5 dos dados do PREM.

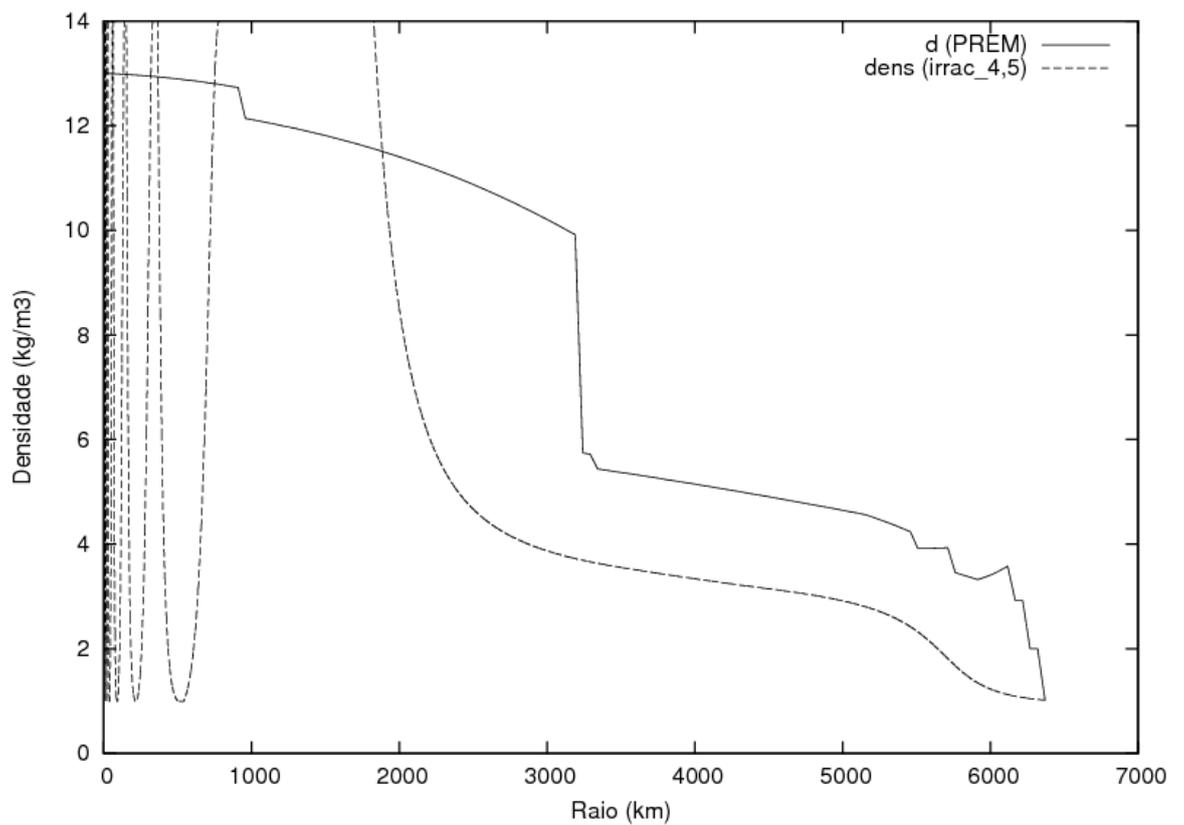


Figura 4.18: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 4, 5.

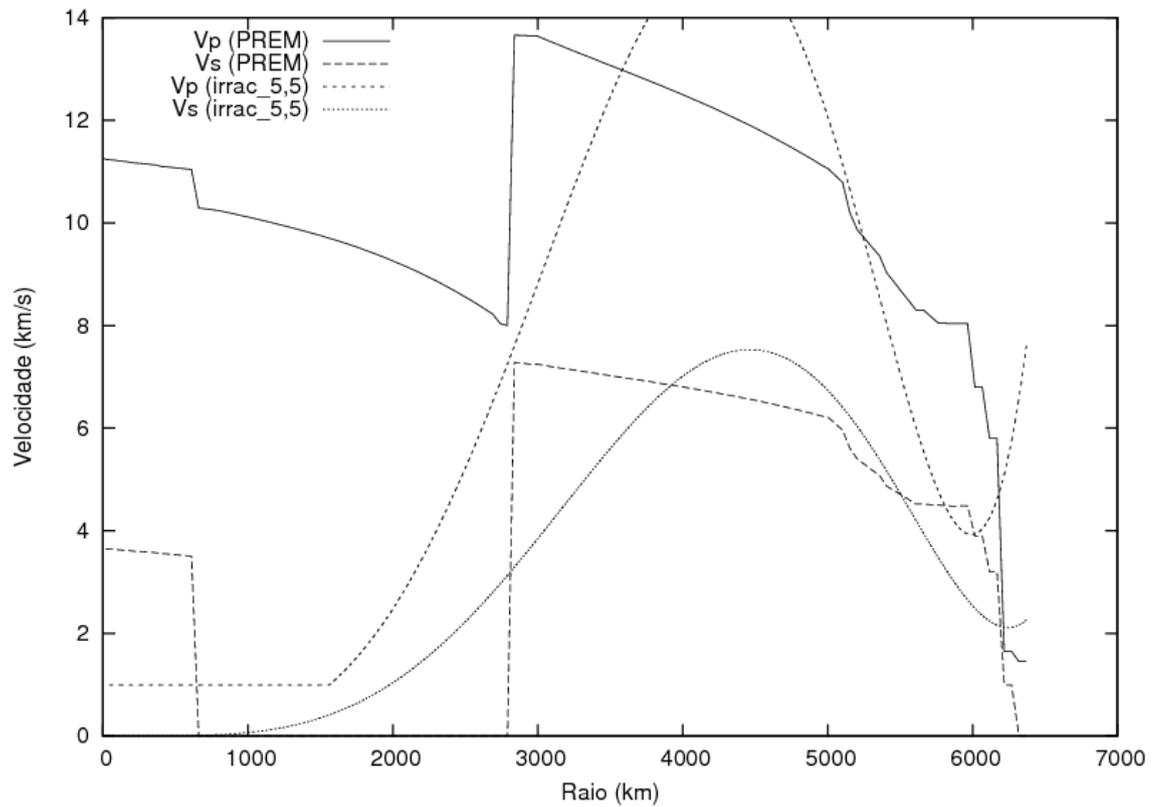


Figura 4.19: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 5, 5 dos dados do PREM.

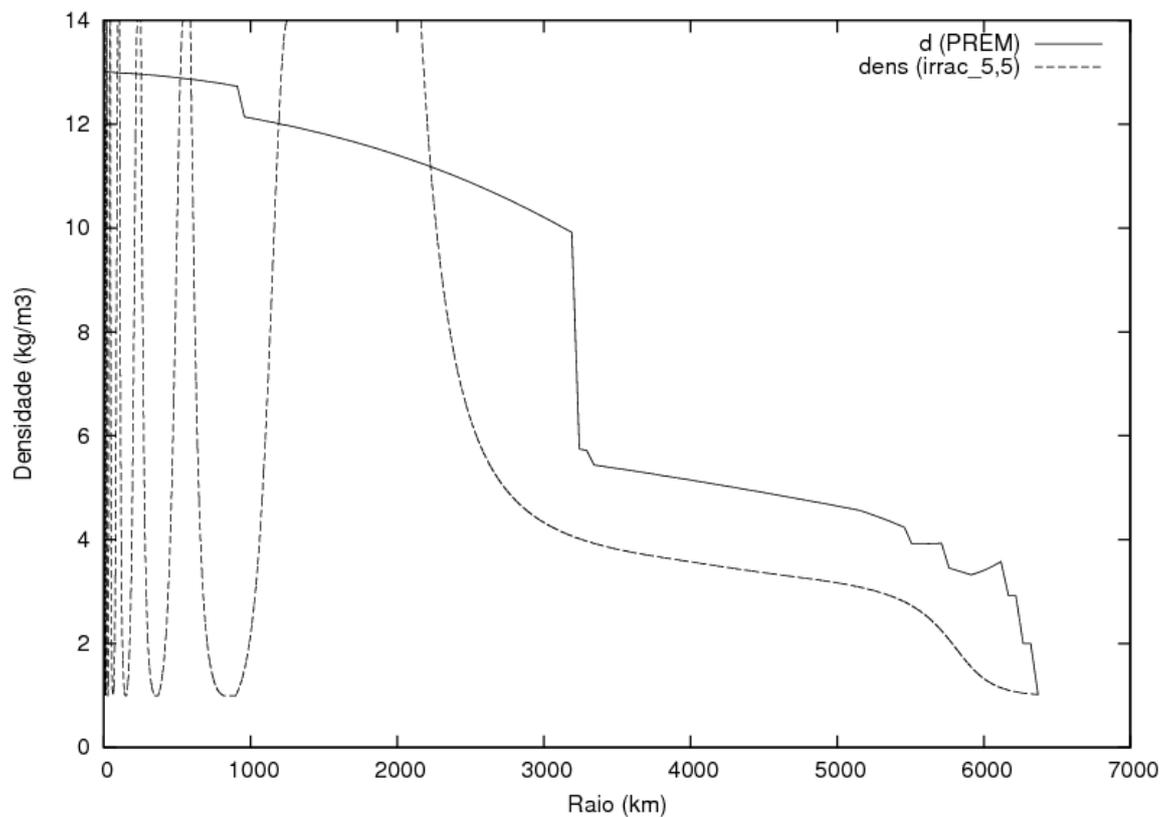


Figura 4.20: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 5, 5.

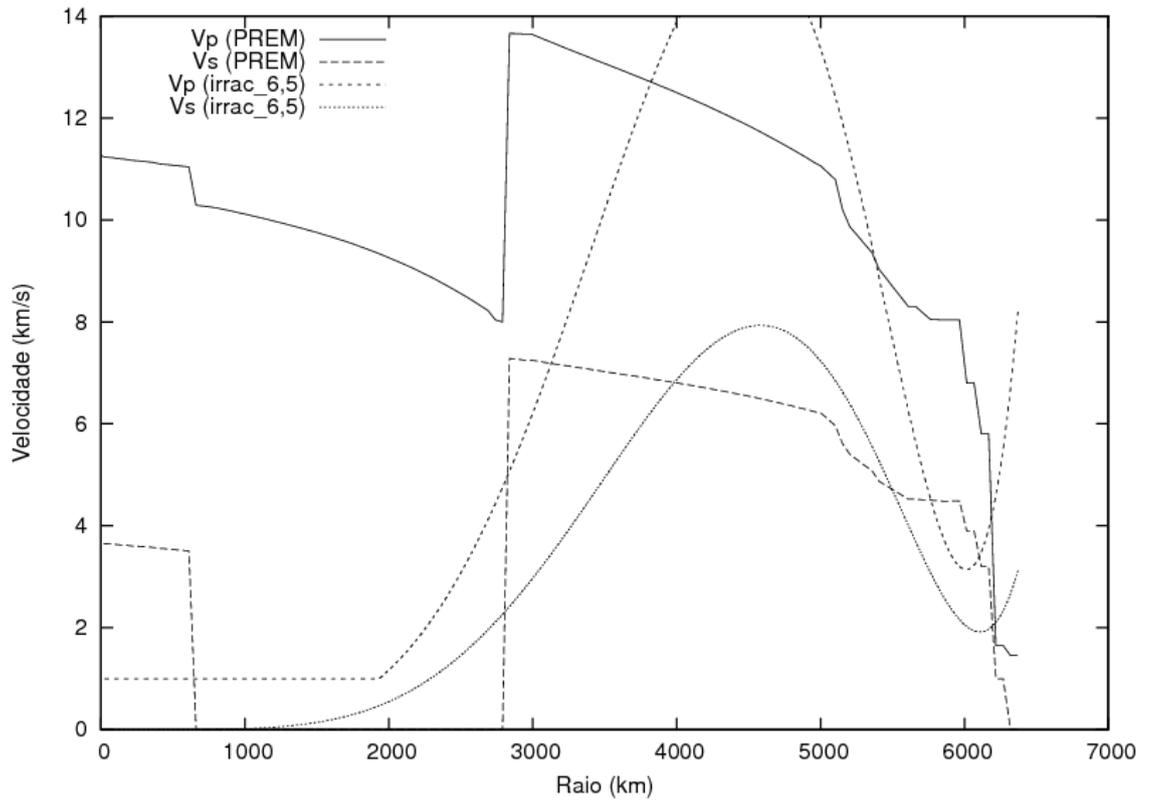


Figura 4.21: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 6, 5 dos dados do PREM.

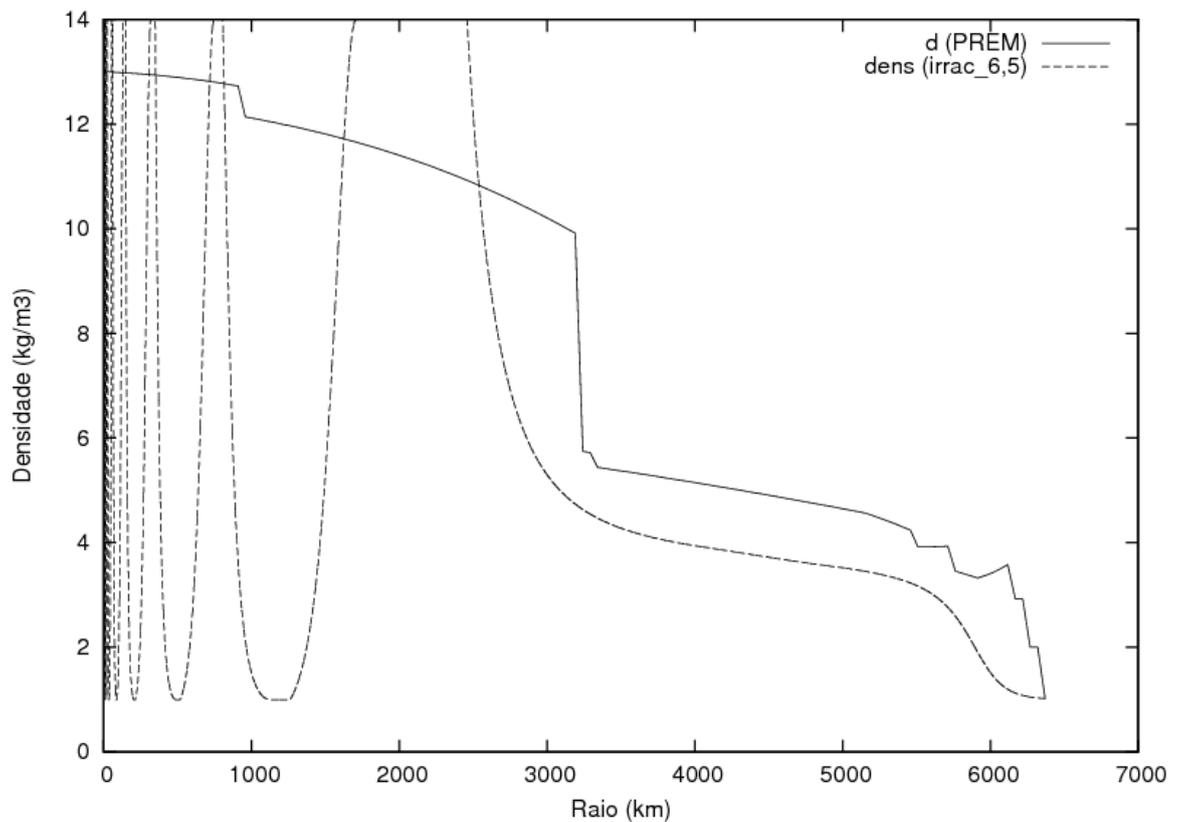


Figura 4.22: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 6, 5.

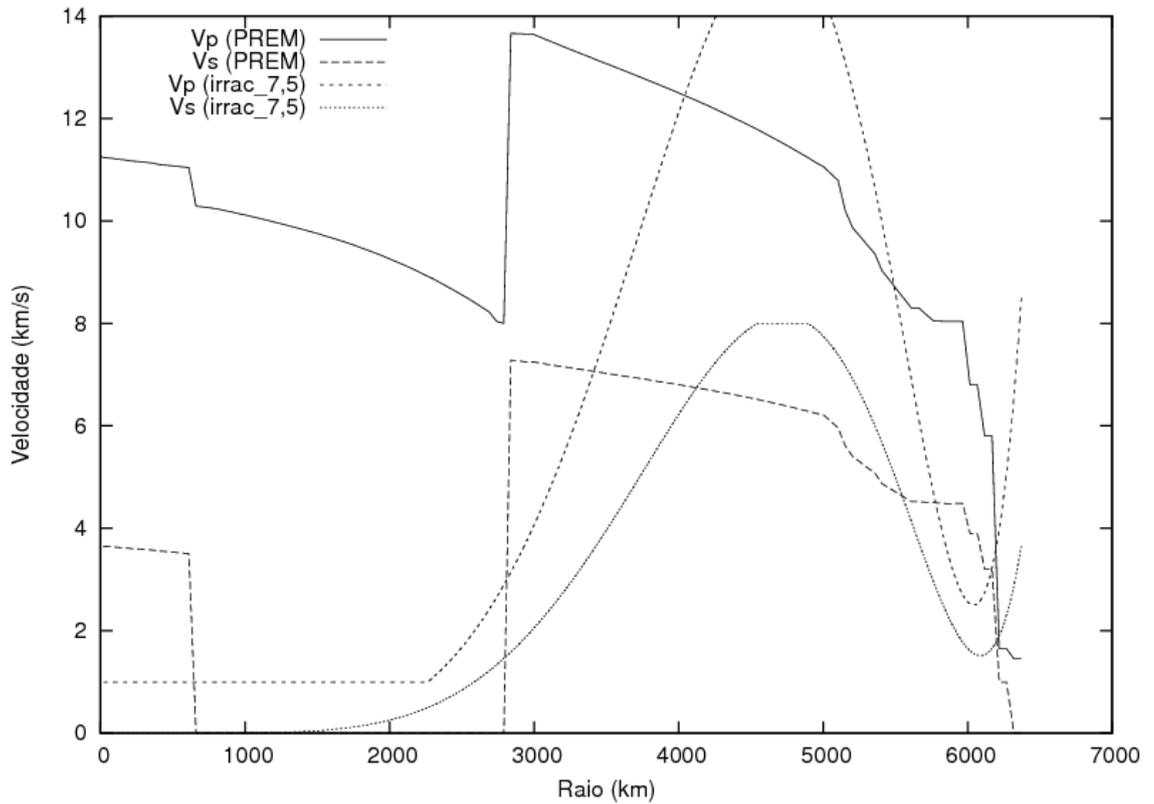


Figura 4.23: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 7, 5 dos dados do PREM.

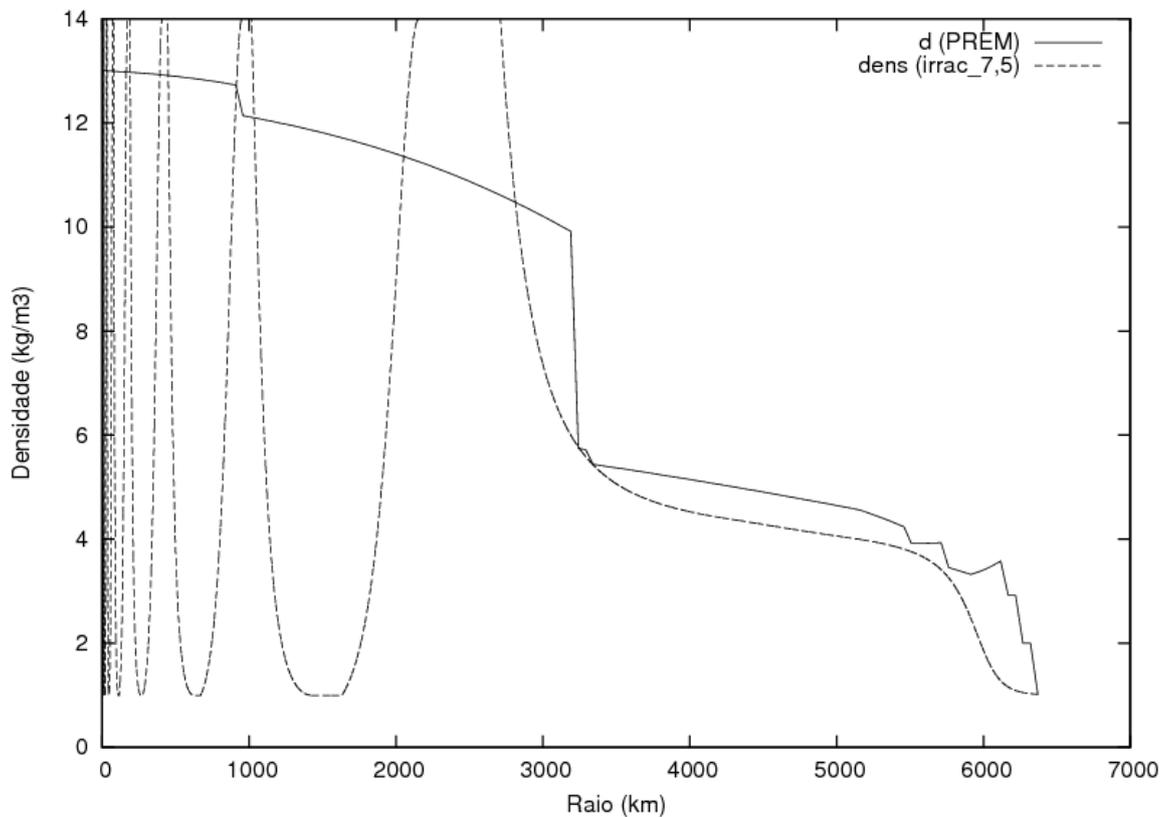


Figura 4.24: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 7, 5.

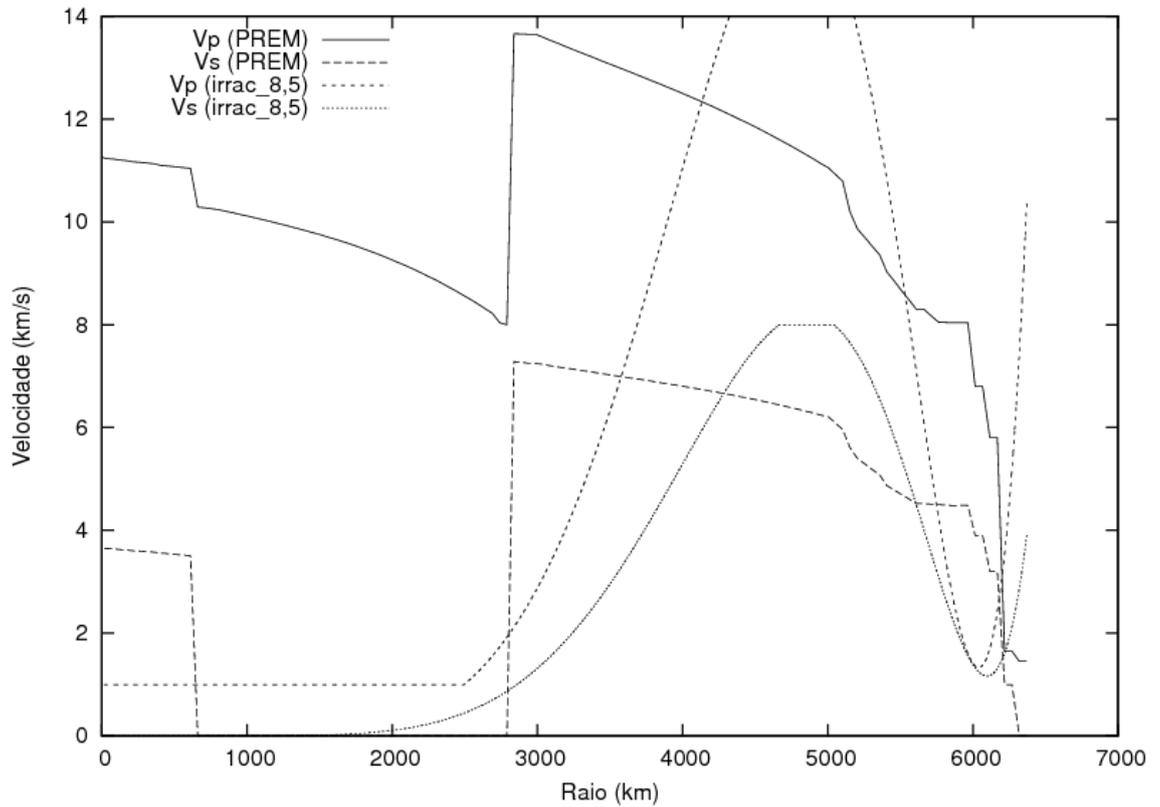


Figura 4.25: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 8, 5 dos dados do PREM.

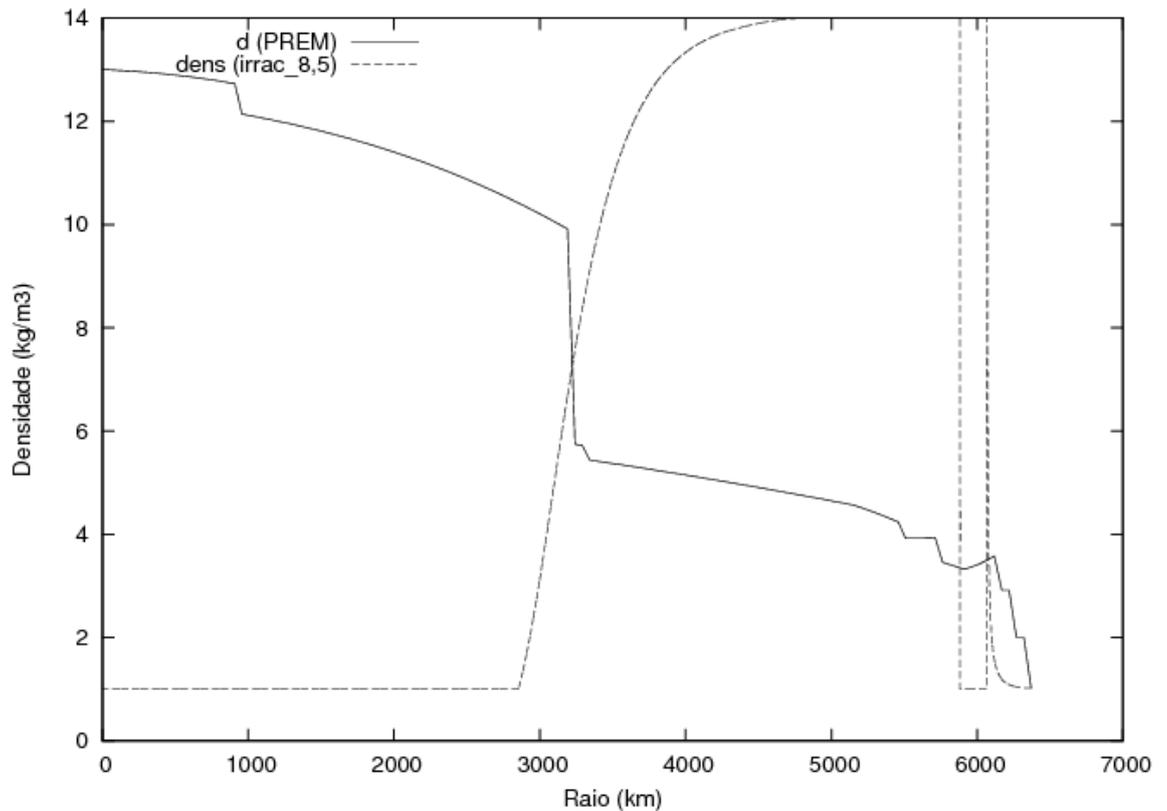


Figura 4.26: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 8, 5.

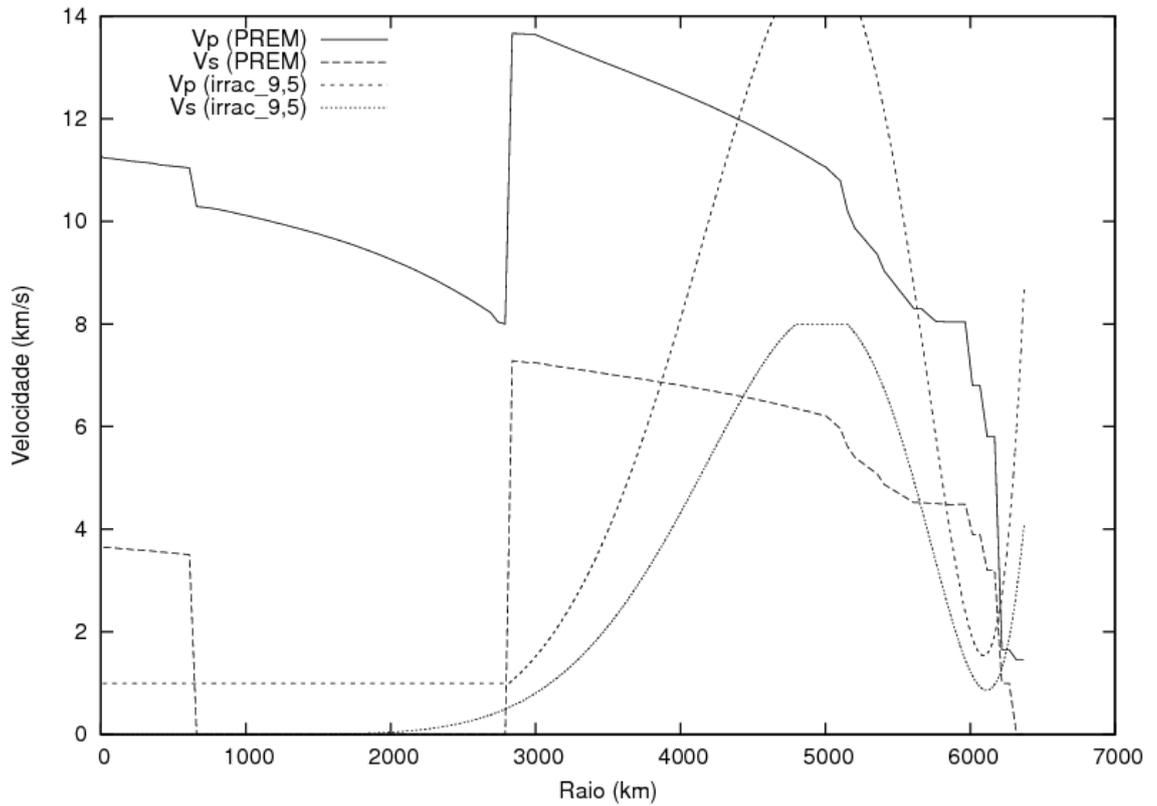


Figura 4.27: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por funções irracionais de grau 9, 5 dos dados do PREM.

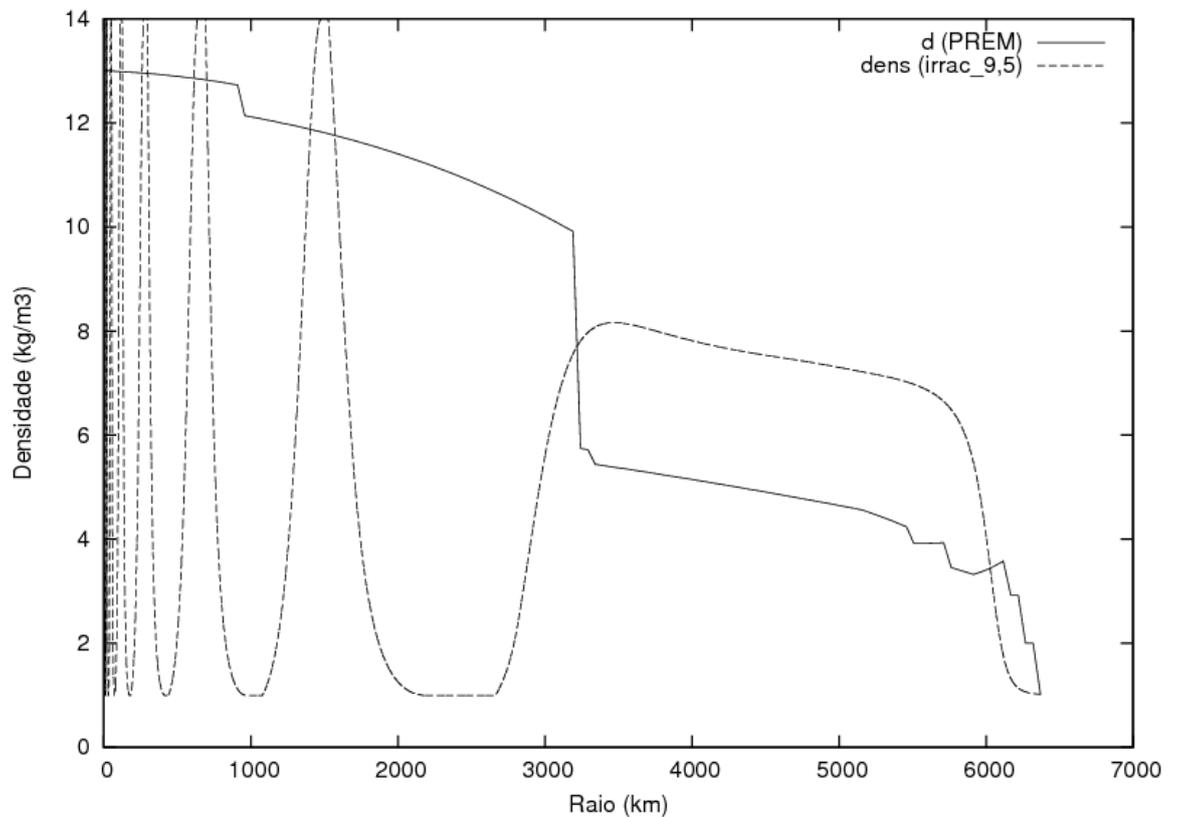


Figura 4.28: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por funções irracionais de grau 9, 5.

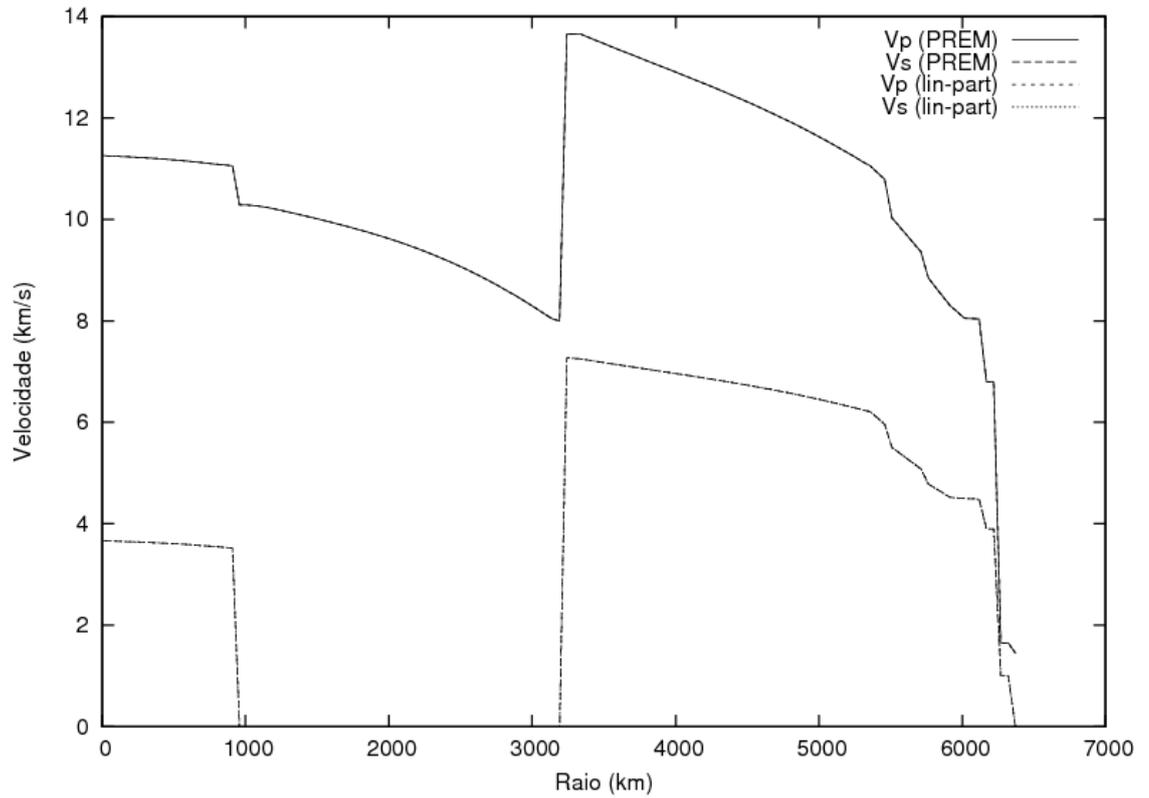


Figura 4.29: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação linear por partes dos dados do PREM.

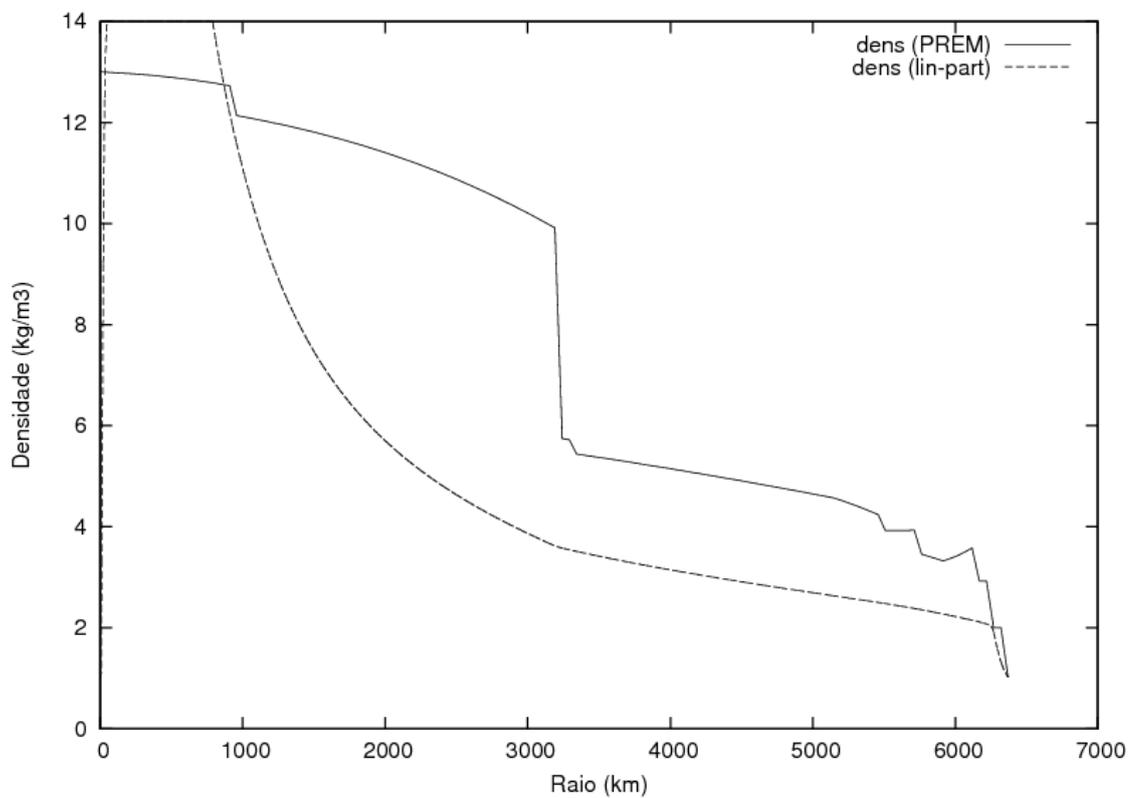


Figura 4.30: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando velocidades P e S interpoladas por funções lineares por partes.

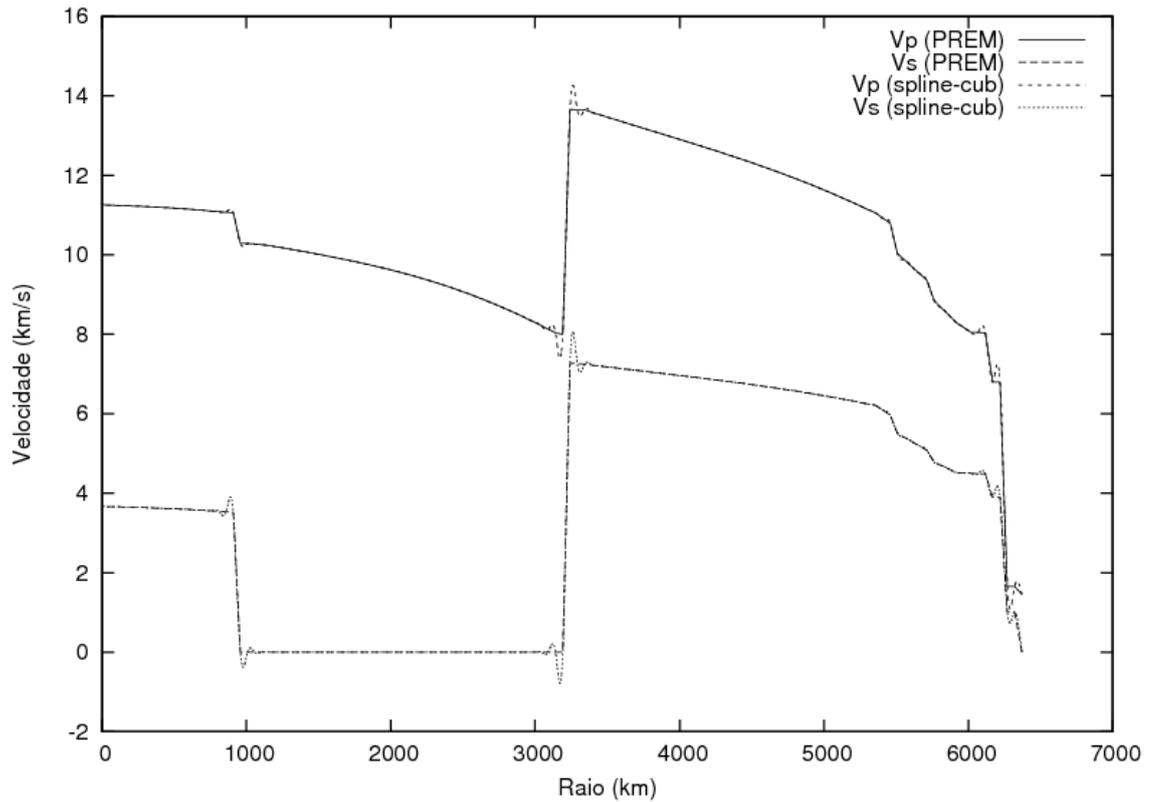


Figura 4.31: Perfis das velocidades das ondas P e S fornecidas pelo PREM e aquelas obtidas pela interpolação por *splines* cúbicas dos dados do PREM.

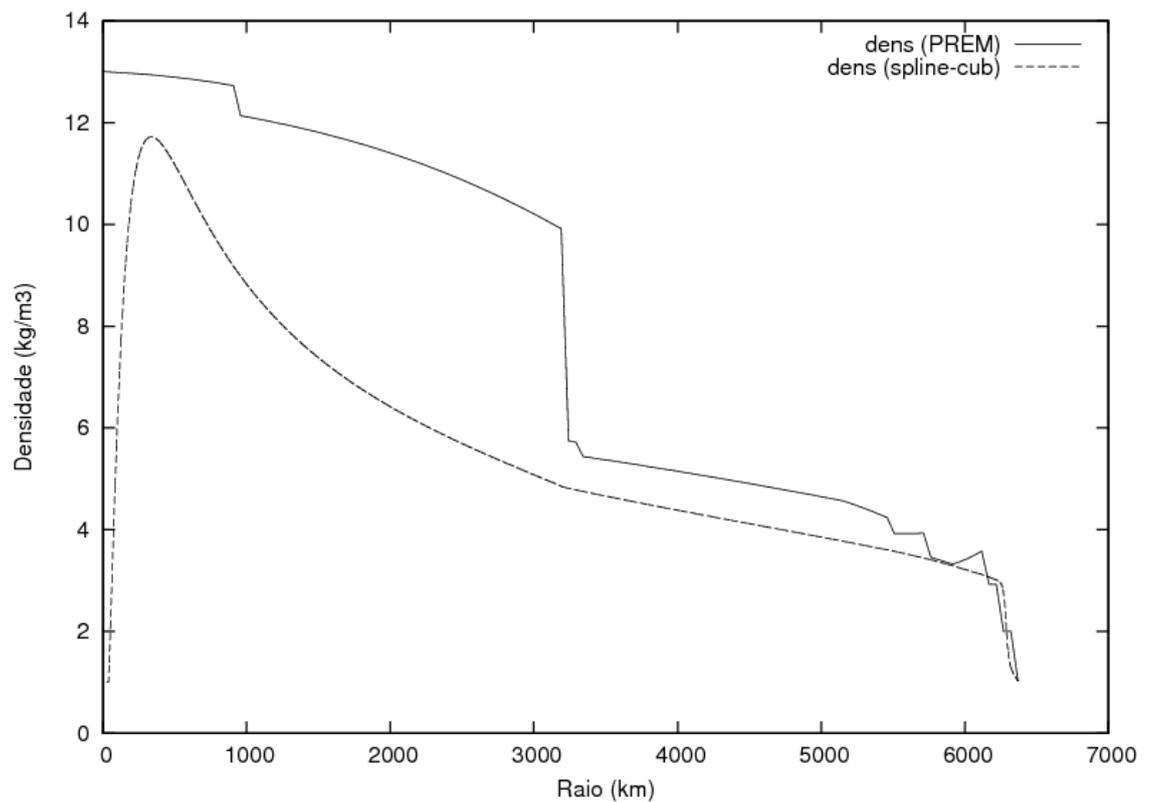


Figura 4.32: Perfil de densidade fornecido pelo PREM e aquele obtido pela Equação de Adams-Williamson usando as velocidades P e S interpoladas por *splines* cúbicas.

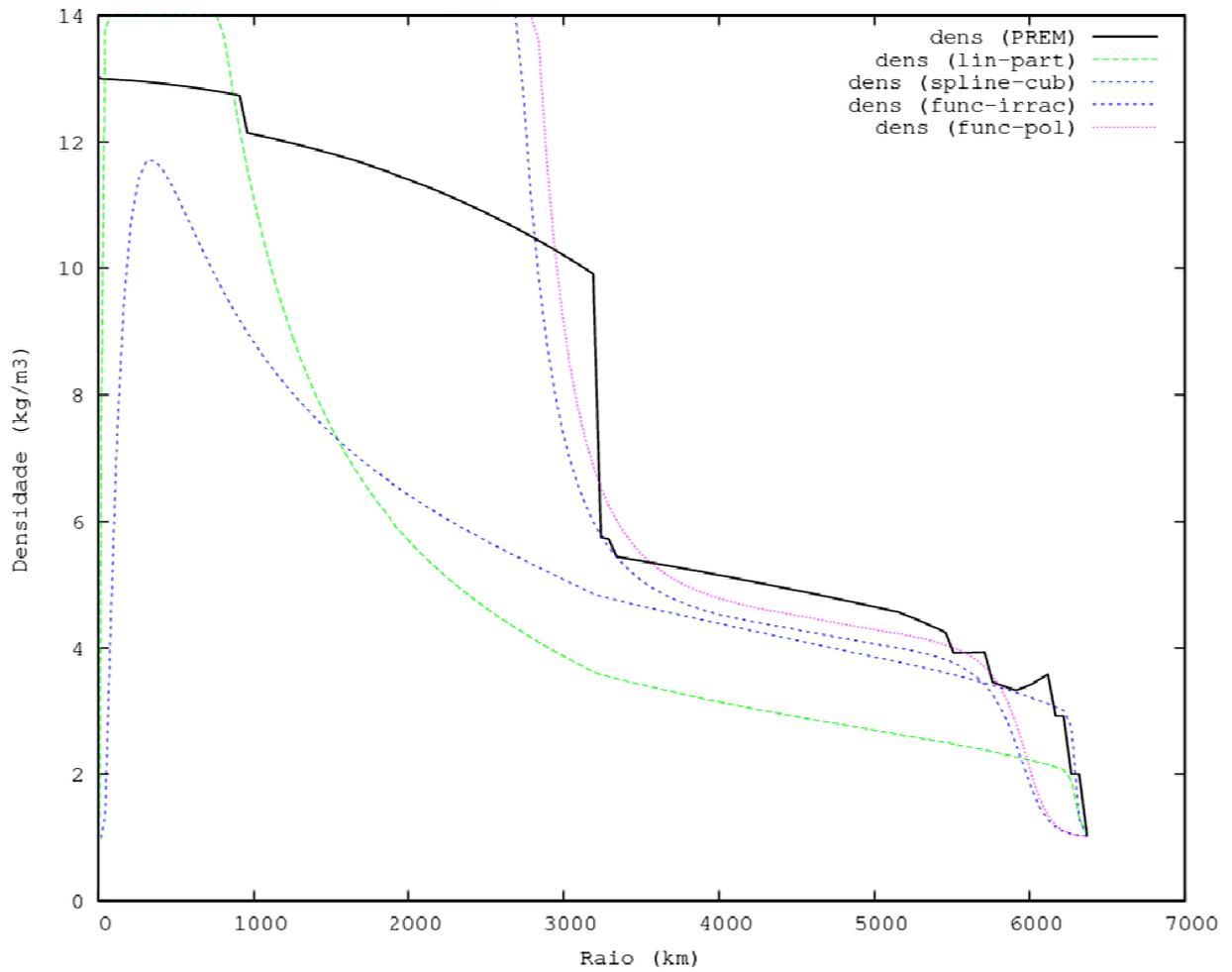


Figura 4.33: Perfis das densidades obtidos usando diferentes técnicas de interpolação dos dados das velocidades do PREM aplicadas na Equação de Adams-Williamson comparados com o perfil de densidades diretamente fornecidas pelo PREM.

CAPÍTULO 5

Conclusões

Os resultados obtidos por todas as técnicas numéricas propostas de interpolação dos dados do PREM não geraram perfis de velocidade e densidade iguais aos fornecidos pelo modelo ak135-f do PREM. No entanto, os resultados obtidos para as interpolações de velocidades usando polinômios e funções irracionais foram muito bons quando comparados com os dados do PREM na região do manto.

Embora as interpolações linear por partes e *spline* cúbica tenham gerado perfis de velocidades iguais ao fornecidos pelos dados do PREM, nenhum dos modelos propostos respondeu bem para profundidades que incluem a parte mais inferior do núcleo externo e, menos ainda, o núcleo interno. Conclui-se que as hipóteses do modelo de autocompressão e a equação de Adams-Williamson derivada dessas hipóteses, não são suficientes para descrever como varia a densidade dentro de toda a Terra. Segundo Fowler (2005), o núcleo claramente tem uma composição diferente do manto e mudanças dramáticas nas velocidades sísmicas ocorrem no contato manto-núcleo que dificilmente poderia ser devido apenas à pressão. Um novo valor de densidade de partida deve ser escolhido para o topo do núcleo, e, deste modo, as densidades dentro do núcleo podem ser calculadas pela equação de Adams-Williamson.

Deve-se considerar, também, que os fatores discutidos na Seção 1.3 influenciam na determinação da densidade e não foram incluídos no modelo de autocompressão. A equação de Adams-Williamson pode ser modificada e incluir alguns desses fatores como pode ser visto em (Fowler, 2005) ou (Poirier, 2000).

Pode-se concluir, também, que a equação de Adams-Williamson é uma excelente contribuição para a descrição da variação da densidade no interior da Terra. Lembrando que a referida equação foi deduzida em 1923 quando ainda era mínima a quantidade de informações e dados disponíveis sobre o interior da Terra.

Agradecimentos

Acredito que somos donos do nosso caminho e destino. Mas desconfio que há alguma energia - talvez o 'éter', que permeia nossa história, tira o determinismo e nos presenteia com o caos e a incerteza.

Ao finalizar este trabalho quero agradecer a todas as pessoas que me ajudaram e incentivaram a concluir o curso de graduação em geofísica.

Em primeiro lugar agradeço ao professor Dr. Wilson M. Figueiró pela proposta de um tema tão interessante e pela muita paciência e competência com que me orientou, ajudou a produzir este trabalho e a me desenvolver melhor dentro do curso.

Agradeço aos professores Dr. Roberto Max de Argollo e Dr. Eduardo Telmo Fonseca Santos por terem aceitado a participação na comissão avaliadora e por todas as enriquecedoras sugestões e contribuições a este trabalho.

Ao professor Milton José Porsani pelo ensino e contribuições na parte da implementação computacional.

Agradeço especialmente a Leda Carine Santos Costa pelo incentivo, paciência e torcida positiva pelo meu sucesso em tudo que faço.

Agradecimentos especiais também para meus amigos e companheiros de estudos: Tiago S. Cabral, Alexandro G. Cerqueira, Eduardo Amarante, Anderson Roque, Joelson C. Batista, Átila J. Costa, Cleiton Montino, Euler Bentes e Daniel Carvalho.

Agradeço a todos os amigos e companheiros da graduação e da pós-graduação, aos professores e aos funcionários técnico administrativos do IGEO que direta ou indiretamente contribuíram para meu sucesso na graduação de geofísica.

Referências Bibliográficas

- Brown, G. C. e Mussett, A. E. (1981) *The Inaccessible Earth*. George Allen & Unwin, London.
- Bullen, K. E. (1975) *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.
- Dziewonski, A. M. e Anderson, D. L. (1981) Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**:297–356.
- Fowler, C. R. M. (2005) *The Solid Earth*. Cambridge University Press, New York, USA.
- Kennett, B. L. N. (1998) On the density distribution within the Earth. *Geophys. J. Int.*, **132**:374–382.
- Kennett, B. L. N.; Engdahl, E. R. e Buland, R. (1998) Constraints on seismic velocities in the Earth from travel times. *Geophys. J. Int.*, **122**:108–124.
- Pang, T. (2006) *An Introduction to Computational Physics*. Cambridge University Press, New York.
- Poirier, J. P. (2000) *Introduction to the Physics of the Earth's Interior*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Scherer, C. (2010) *Métodos Computacionais da Física*. Livraria da Física Editora, São Paulo.
- Sheriff, R. E. (2002) *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics, Fourth Edition*. 13 Geophysical References Series, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, USA.
- Stacey, F. D. e Davis, P. M. (2008) *Physics of the Earth*. Cambridge University Press, New York, USA.
- Williamson, E. D. e Adams, L. H. (1923) Density distribution in the Earth. *J. Washington Academy Sciences*, **13**:413–428.

APÊNDICE A

Modelo Preliminar de Referência da Terra considerada Esfericamente Simétrica

A Tabela A exhibe valores relativos ao Modelo Preliminar de Referência da Terra (PREM), mais especificamente, alguns dados do modelo ak135-f do PREM utilizados nas diversas interpolações propostas neste trabalho e nos perfis das velocidades. Para cada raio r (ou profundidade $z = 6371 - r$), no interior da Terra, são dados os valores de: densidade, velocidade compressional e da velocidade cisalhante.

Tabela A			
ak135-f do PREM			
Raio (km)	Densidade (g/cm ³)	V _p (km/s)	V _s (km/s)
6371,00	1,0200	1,4500	0,0000
6320,29	1,0200	1,4500	0,0000
6269,57	2,0000	1,6500	1,0000
6218,86	2,0000	1,6500	1,0000
6168,15	2,6000	5,8000	3,2000
6117,44	2,6000	5,8000	3,2000
6066,72	2,9200	6,8000	3,9000
6016,01	2,9200	6,8000	3,9000
5965,30	3,6410	8,0355	4,4839
5914,59	3,5801	8,0379	4,4856
5863,87	3,5020	8,0400	4,4800
5813,16	3,5020	8,0450	4,4900
5762,45	3,4268	8,0505	4,5000
5711,74	3,3711	8,1750	4,5090
5661,02	3,3243	8,3007	4,5184
5610,31	3,3243	8,3007	4,5184
5559,60	3,3663	8,4822	4,6094
5508,89	3,4110	8,6650	4,6964
5458,17	3,4577	8,8476	4,7832

ak135-f do PREM			
Raio (km)	Densidade (g/cm ³)	Vp (km/s)	Vs (km/s)
5407,46	3,5068	9,0302	4,8702
5356,75	3,9317	9,3601	5,0806
5306,04	3,9273	9,5280	5,1864
5255,32	3,9233	9,6962	5,2922
5204,61	3,9218	9,8640	5,3989
5153,50	3,9201	10,2000	5,6104
5103,57	4,2387	10,7909	5,9607
5053,24	4,2986	10,9222	6,0898
5002,91	4,3565	11,0553	6,2100
4952,58	4,4118	11,1355	6,2424
4902,24	4,4650	11,2228	6,2799
4851,91	4,5162	11,3068	6,3164
4801,58	4,5654	11,3897	6,3519
4751,25	4,5926	11,4704	6,3860
4700,92	4,6198	11,5493	6,4182
4650,59	4,6467	11,6265	6,4514
4600,26	4,6735	11,7020	6,4822
4549,93	4,7001	11,7768	6,5131
4499,60	4,7266	11,8491	6,5431
4449,26	4,7528	11,9208	6,5728
4398,93	4,7790	11,9891	6,6009
4348,60	4,8050	12,0571	6,6285
4298,27	4,8307	12,1247	6,6554
4247,94	4,8562	12,1912	6,6813
4197,61	4,8817	12,2558	6,7070
4147,28	4,9069	12,3181	6,7323
4096,95	4,9321	12,3813	6,7579
4046,62	4,9570	12,4427	6,7820
3996,28	4,9817	12,5030	6,8056
3945,95	5,0062	12,5638	6,8289
3895,62	5,0306	12,6226	6,8517
3845,29	5,0548	12,6807	6,8743
3794,96	5,0789	12,7384	6,8972
3744,63	5,1027	12,7956	6,9194
3694,30	5,1264	12,8524	6,9416
3643,97	5,1499	12,9093	6,9625
3593,64	5,1732	12,9663	6,9852
3543,30	5,1963	13,0226	7,0069
3492,97	5,2192	13,0786	7,0286

ak135-f do PREM			
Raio (km)	Densidade (g/cm ³)	Vp (km/s)	Vs (km/s)
3442,64	5,2420	13,1337	7,0504
3392,31	5,2646	13,1895	7,0722
3341,98	5,2870	13,2465	7,0932
3291,65	5,3092	13,3017	7,1144
3241,32	5,3313	13,3584	7,1368
3190,99	5,3531	13,4156	7,1584
3140,66	5,3748	13,4741	7,1804
3090,32	5,3962	13,5311	7,2031
3039,99	5,4176	13,5899	7,2253
2989,66	5,4387	13,6498	7,2485
2939,33	5,6934	13,6498	7,2485
2891,50	5,7458	13,6570	7,2700
2839,33	5,7721	13,6601	7,2817
2789,67	9,9145	8,0000	0,0000
2740,00	9,9942	8,0382	0,0000
2690,00	10,1485	8,2213	0,0000
2640,00	10,2233	8,3122	0,0000
2591,50	10,2964	8,4001	0,0000
2542,00	10,3679	8,4861	0,0000
2492,50	10,4378	8,5692	0,0000
2443,00	10,5062	8,6496	0,0000
2393,50	10,5731	8,7283	0,0000
2344,00	10,6385	8,8036	0,0000
2294,50	10,7023	8,8761	0,0000
2245,00	10,7647	8,9461	0,0000
2195,50	10,8257	9,0138	0,0000
2146,00	10,8852	9,0792	0,0000
2096,50	10,9434	9,1426	0,0000
2047,00	11,0001	9,2042	0,0000
1997,50	11,0555	9,2634	0,0000
1948,00	11,1095	9,3205	0,0000
1898,50	11,1623	9,3760	0,0000
1849,00	11,2137	9,4297	0,0000
1799,50	11,2639	9,4814	0,0000
1750,00	11,3127	9,5306	0,0000
1700,50	11,3604	9,5777	0,0000
1651,00	11,4069	9,6232	0,0000

ak135-f do PREM			
Raio (km)	Densidade (g/cm ³)	Vp (km/s)	Vs (km/s)
1601,50	11,4521	9,6673	0,0000
1552,00	11,4962	9,7100	0,0000
1502,50	11,5391	9,7513	0,0000
1453,00	11,5809	9,7914	0,0000
1403,50	11,6216	9,8304	0,0000
1354,00	11,6612	9,8682	0,0000
1304,50	11,6998	9,9051	0,0000
1255,00	11,7373	9,9410	0,0000
1205,50	11,7737	9,9761	0,0000
1156,00	11,8092	10,0103	0,0000
1106,50	11,8437	10,0439	0,0000
1057,00	11,8772	10,0768	0,0000
1007,50	11,9098	10,1095	0,0000
958,00	11,9414	10,1415	0,0000
908,50	11,9722	10,1739	0,0000
859,00	12,0001	10,2049	0,0000
809,50	12,0311	10,2329	0,0000
760,00	12,0593	10,2565	0,0000
710,00	12,0867	10,2745	0,0000
660,00	12,1391	10,2890	0,0000
610,00	12,7037	11,0427	3,5043
560,00	12,7289	11,0585	3,5187
510,00	12,7530	11,0718	3,5314
460,00	12,7760	11,0850	3,5435
410,00	12,7980	11,0983	3,5551
360,00	12,8387	11,1316	3,5765
310,00	12,8574	11,1457	3,5864
260,00	12,8751	11,1590	3,5957
210,00	12,8917	11,1715	3,6044
165,00	12,9217	11,1941	3,6202
120,00	12,9351	11,2041	3,6272
80,00	12,9586	11,2219	3,6396
43,00	12,9688	11,2295	3,6450
18,00	12,9779	11,2364	3,6498
10,00	12,9988	11,2521	3,6608
3,30	13,0036	11,2557	3,6633
3,00	13,0100	11,2606	3,6667
0,00	13,0122	11,2622	3,6678

APÊNDICE B

Spline cúbica

Aqui, apresenta-se, com mais detalhes, o método de interpolação por *spline* cúbica utilizado na Seção 3.4 do Capítulo 3. As referências utilizadas para esta explanação são Scherer (2010) e Pang (2006).

A palavra inglesa “splines” significa uma régua flexível, usada para traçar linhas “suaves”, passando por pontos que não se encontram sobre uma reta. Em português ela é conhecida como “curva francesa”. Em interpolação numérica se fala em “spline de grau q ” quando cada dois pontos consecutivos são ligados por um polinômio de grau q . O mais usado é o “*spline* cúbico”, isto é, $q = 3$.

Dado um conjunto com $n + 1$ pontos no plano (gráfico da função $f(x)$), tais como:

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\},$$

existe um polinômio de grau q , $P_q(x)$, cujo gráfico passa pelos $n + 1$ pontos dados, ou seja, $P_q(x_i) = f(x_i)$, para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Na *spline* cúbica, interpola-se uma função $f(x)$ utilizando um polinômio de terceiro grau por partes para ligar cada par de pontos consecutivos. Então, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tem-se um intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ e, para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$, tem-se um polinômio do tipo:

$$p_i(x) = \alpha_i (x - x_i)^3 + \beta_i (x - x_i)^2 + \gamma_i (x - x_i) + \eta_i. \quad (\text{B.1})$$

Pode-se pensar na *spline* cúbica como a função $P(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_n]$ formada pela união das funções $p_i(x)$, de modo que $P(x) = p_i(x)$ para $x \in I_i$. Então, as constantes $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ e η_i são determinadas de forma que sejam satisfeitas as seguintes propriedades:

- (i) $p_i(x_i) = f_i$, isto é, a função $P(x)$ passa pelos pontos (x_i, f_i) ;
- (ii) $p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i)$, isto é, a função $P(x)$ é contínua;
- (iii) $p'_i(x_i) = p'_{i-1}(x_i)$, isto é, a derivada primeira de $P(x)$ é contínua;
- (iv) $p''_i(x_i) = p''_{i-1}(x_i)$, isto é, a derivada segunda de $P(x)$ é contínua.

Há um total de n funções p_i e, portanto, um total de $4n$ constantes a serem determinadas. Usando a propriedade (i) na Eq. (B.1) pode-se obter as n constantes η_i . Deve-se determinar,

ainda, as $3n$ constantes $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. As propriedades (ii), (iii) e (iv) se aplicam aos pontos $\{x_1, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ e fornecem, portanto, $3(n-1)$ equações. Além disso, $p_n(x_{n+1}) = f_{n+1}$, que é mais uma equação a ser usada na determinação das constantes. Tem-se assim, $3n-2$ equações para determinar $3n$ constantes. Pode-se, então, definir mais duas condições que, geralmente, são usadas na determinação da forma dos segmentos nas extremidades. Uma escolha usual é $p_0''(x_0) = p_{n-1}''(x_n) = 0$, ou seja, a função interpoladora chega às extremidades do intervalo como uma função linear. Outra escolha pode ser feita dependendo da forma que se quer adotar para a função nos intervalos extremos.

Existem várias maneiras para a construção de uma *spline* cúbica, quase todas de fácil compreensão, mas bastante trabalhosas. Seguindo Pang (2006), pode-se começar com uma interpolação linear de $p_i''(x)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$p_i''(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} [(x - x_i)p_{i+1}'' - (x - x_{i+1})p_i''], \quad (\text{B.2})$$

onde $p_i'' = p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$ e $p_{i+1}'' = p_{i+1}''(x_{i+1}) = p_i''(x_{i+1})$. Integrando a Eq. (B.2) duas vezes e usando que $p_i(x_i) = f_i$ e $p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$, obtém-se:

$$p_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_{i+1})^3 + c_i(x - x_i) + d_i(x - x_{i+1}), \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\begin{cases} a_i = \frac{p_{i+1}''}{6h_i} \\ b_i = -\frac{p_i''}{6h_i} \\ c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i p_{i+1}''}{6} \\ d_i = \frac{h_i p_i''}{6} - \frac{y_i}{h_i} \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

onde $h_i = x_{i+1} - x_i$. Então, fica claro que calculando todos os p_i'' tem-se a *spline* cúbica da Eq. (B.3).

Usando a condição $p_{i-1}'(x_i) = p_i'(x_i)$ na Eq. (B.3) tem-se:

$$h_{i-1}p_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i)p_i'' + h_i p_{i+1}'' = 6 \left(\frac{g_i}{h_i} - \frac{g_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad (\text{B.5})$$

onde $g_i = f_{i+1} - f_i$. Tem-se um conjunto de equações lineares com $n-1$ desconhecidos p_i'' para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Pode-se escrever esse conjunto de equações na forma:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & e_2 & h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h_{n-3} & e_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-2} & e_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1'' \\ p_2'' \\ p_3'' \\ \vdots \\ p_{n-1}'' \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

onde $e_i = 2(h_{i-1} + h_i)$ e $\ell_i = 6\left(\frac{g_i}{h_i} - \frac{g_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$ e completam o sistema as condições adicionais $p_0''(x_0) = p_{n-1}''(x_n) = 0$.

Equivalentemente, pode-se escrever a Eq. (B.6) do seguinte modo:

$$\mathbf{A} \mathbf{p}'' = \mathbf{1} \tag{B.7}$$

A matriz dos coeficientes, \mathbf{A} , é real, simétrica e tridiagonal. Por conta da forma especial com que se apresenta a matriz \mathbf{A} , o sistema de Eqs (B.6) pode ser resolvido rapidamente pelo método da fatoração LU.