



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRAÇAMENTO
DE RAIOS EM MODELOS SÍSMICOS 2D USANDO
O MÉTODO PARAXIAL

FABRÍCIO MONTEIRO LIMA

SALVADOR – BAHIA

MAIO – 2004

Resolução do problema de traçamento de raios em modelos sísmicos 2D usando
o método paraxial

por

FABRÍCIO MONTEIRO LIMA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

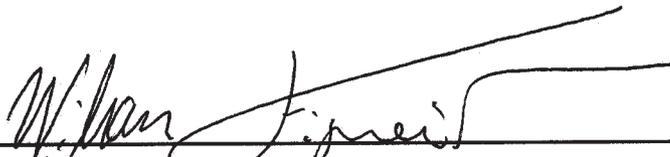
DO

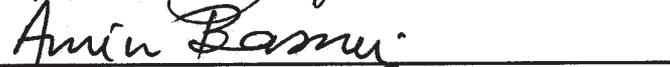
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora







Dr. Wilson M. Figueiró - Orientador

Dr. Amin Bassrei

Dr. Saulo Pomponet Oliveira

Data da aprovação: 02/06/2004

“Dedico este trabalho a meus pais,
meu irmão e minha namorada, só
eles sabem da minha batalha”

RESUMO

A proposta do presente trabalho consiste em resolver o problema do traçamento de raios conectando posições de fontes àsquelas onde se situam os receptores. Isto é, as posições da fonte e do receptor são conhecidas, e deseja-se achar a trajetória do raio que os une num campo de velocidades conhecido. Trata-se do clássico problema de traçamento de raios sísmicos que liga dois pontos: o conhecido “two-point ray-tracing problem”. Para certos modelos de campo de velocidades este problema pode ser resolvido analiticamente. Para eles, podemos achar expressões analíticas para o vetor vagarosidade na fonte, vetor que determina a direção inicial do raio na fonte visando atingir a posição do receptor. Nestes casos, obtêm-se um traçado de raio exato e a posição do receptor é encontrada em uma única iteração, isto é: o primeiro raio traçado já resolve o problema. Entretanto, estes casos simples, que admitem uma abordagem completamente analítica, são pouco comuns e, também, pouco realísticos. Faz-se necessário, portanto, utilizar métodos numéricos para resolver o problema quando abordagens analíticas se tornam muito complicadas ou, simplesmente, incapazes de fazê-lo. Um dos métodos que se apresentam, é o conhecido método paraxial e no presente trabalho são propostos algoritmos capazes de resolvê-lo de uma maneira simples e objetiva, utilizando tal método. Ele consiste de uma série de iterações nas quais o vetor vagarosidade é atualizado em cada passo usando a diferença entre a posição do receptor e o ponto de chegada do raio traçado, raio central, na superfície de observação e uma teoria que permite estender propriedades conhecidas do raio central, já traçado, para um raio vizinho: o chamado raio paraxial. Espera-se que este último atravessasse o modelo e conecte fonte ao receptor com a exatidão desejada. Primeiramente, o problema é tratado para o caso do modelo cujo quadrado da vagarosidade tem variações lateral e vertical lineares, neste caso, o problema é resolvido analiticamente e numericamente, sendo que, neste último modo, o método usado é o paraxial. Em seguida, todos os modelos estudados o método usado foi somente o paraxial. Tais modelos de campos de velocidades, ou melhor, campos do quadrado das vagarosidades, foram os seguintes: com variações lateral quadrática e vertical linear, com variações lateral e vertical quadráticas, e, por fim, aquele com variações lateral e vertical quadráticas com termo cruzado.

ABSTRACT

This work aims to solve the problem that consists in linking source and receiver positions by a trajectory of a ray. It means, source and receiver positions are known, and one wishes to find a curve that connects them when the velocity field is known. This is the classic problem to trace seismic rays that join two points: the so-called two-point ray-tracing problem. For special velocity field models, the mentioned problem can be solved analytically. For them, we can find analytical expressions for the slowness vector in the source. Such vector determines the initial direction of the ray in the source such that the receiver position is reached. In such case, it is obtained an exact ray tracing and the receiver position is found in just one iteration; that is to say: the first traced ray already solves the problem. However, these simple cases, that admit a completely analytical approach of the problem, are rare and, also not very realistic. It is necessary, therefore, to use numerical methods to solve the problem when analytical approaches become complicated or, even, unable to do it. The method that is presented to solve the problem is the so-called paraxial method, and in this work are proposed algorithms capable to solve it in a series of iterations in which the slowness vector is updated in each step using the difference between receiver position and the arrival point of the traced ray, central ray, in the surface of observation and, also a theory that allows one to extend known properties of the central ray, which is already traced, to the neighbor ray: the paraxial ray. It is expected that such ray crosses the model and connects source to receiver within the desired accuracy. First of all, the problem is treated for the case in which the square slowness has lateral and vertical linear variations, in this case, the problem of the source-receiver connection by a ray is solved, both, analytically and numerically, by the paraxial method. For all following models, only the paraxial method is applied. Such models of velocity fields, or square slowness fields, are the following: with quadratic lateral and linear vertical variation, with quadratic lateral and vertical variation, and, at finally, with quadratic lateral and vertical variation with crossed term.

ÍNDICE

RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE	v
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 ABORDAGEM ANALÍTICA DO PROBLEMA	2
1.1 Aspectos Teóricos	2
1.1.1 Uma abordagem analítica	3
1.2 Aplicação Numérica	6
1.2.1 Descrição do modelo	6
1.2.2 Resultados Obtidos	6
CAPÍTULO 2 MÉTODO PARAXIAL NO CASO 2D	9
2.1 Teoria	9
2.2 Aplicações Numéricas	16
2.2.1 Modelo M_I	16
2.2.1.1 Resultados Obtidos para M_I	16
2.2.2 Modelo M_{II-A}	19
2.2.2.1 Resultados Obtidos para M_{II-A}	19
2.2.3 Modelo M_{II-B}	22
2.2.3.1 Resultados obtidos para M_{II-B}	22
2.2.3.2 Extensão do modelo M_{II-B} com os raios nele traçados	24
2.2.4 Modelo M_{III-A}	26
2.2.4.1 Resultados Obtidos para M_{III-A}	27
2.2.5 Modelo M_{III-B}	29
2.2.5.1 Resultados Obtidos para M_{III-B}	29
2.2.6 Modelo M_{IV}	32
2.2.6.1 Resultados Obtidos para M_{IV}	33
CAPÍTULO 3 CONCLUSÕES	35

Agradecimentos	36
Referências Bibliográficas	37
APÊNDICE A Verificação de solução da equação que relaciona a perturbação do raio com sua variação	38
APÊNDICE B Fluxograma simplificado dos algoritmos implementados .	40

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Campo de velocidade V_1 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0156 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $c = -0,9377 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$. Embora, para efeito de resolução do problema, a interpretação geológica do modelo seja irrelevante, podemos dizer que ele pode ser visto como sendo uma região compreendida e comprimida entre o topo de um domo salino e a superfície.	6
1.2	Conexão de fonte a receptor situados na superfície $z = 0$ usando o método analítico para o modelo M_I . A coordenada x da fonte S , x_S , é $0,0 \text{ km}$ e o receptor está localizado em $x_R = 0,5 \text{ km}$	7
1.3	Resultado obtido em M_I usando o método analítico, para fonte posicionada em $x_S = 0,0 \text{ km}$ e receptor em $x_R = 1,0 \text{ km}$	7
1.4	Resolução do problema de traçamento de raio conectando S ($x_S = 0,0 \text{ km}$) a R ($x_R = 1,5 \text{ km}$) no modelo M_I , usando o método analítico.	8
2.1	Desenho esquemático mostrando o raio central e a sua perturbação, isto é: o raio paraxial.	9
2.2	A fonte S é conectada à posição, $R = 0,5 \text{ km}$, do receptor, usando o método paraxial em 4 iterações.	17
2.3	O receptor posicionado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S , usando o método paraxial, em apenas 3 iterações.	17
2.4	O receptor $R = 1,5 \text{ km}$ é conectado a S em 4 iterações usando o método paraxial.	18
2.5	Campo de velocidade V_2 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0312 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9376 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,0052 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. Uma possível interpretação geológica para tal campo, seria a de uma bacia de sedimentos marinhos tendo ao fundo um embasamento basáltico.	19
2.6	Conexão fonte, S , ao receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com 4 iterações para o modelo M_{II-A}	20
2.7	Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 3 iterações para o modelo M_{II-A}	20
2.8	Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com 4 iterações para o modelo M_{II-A}	21

2.9	Campo de velocidade V_2 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,235 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,333 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. M_{II-B} representa um campo de velocidades passível de ser interpretado geologicamente como uma dobra anticlinal ou um domo.	22
2.10	Conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida em 6 iterações para o modelo M_{II-B}	23
2.11	Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 6 iterações para o modelo M_{II-B}	23
2.12	Problema de conexão entre S e R é resolvido com 6 iterações para o modelo M_{II-B}	24
2.13	Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 0,5 \text{ km}$. . .	24
2.14	Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 1,0 \text{ km}$. . .	25
2.15	Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 1,5 \text{ km}$. . .	25
2.16	Campo de velocidade V_3 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0259 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9704 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0087 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,0049 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$	26
2.17	Conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com 3 iterações para o modelo M_{III-A}	27
2.18	Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 4 iterações para o modelo M_{III-A}	27
2.19	Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com 9 iterações para o modelo M_{III-A}	28
2.20	M_{III-B} : campo de velocidade V_3 com $a = 0,25 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,7941 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,75 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$	29
2.21	Conexão da fonte, S , ao receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida mais de 30 iterações para o modelo M_{III-B}	30
2.22	Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em mais de 40 iterações no modelo M_{III-B}	30
2.23	Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com mais de 40 iterações para o modelo M_{III-B}	31
2.24	M_{IV} : campo de velocidade V_4 com $a = 0,3395 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0561 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,5227 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0066 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$; $e = 0,4143 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $f = -0,0249 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$	32
2.25	A conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com cerca de 30 iterações para o modelo M_{IV}	33
2.26	Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S com mais de 30 iterações para o modelo M_{IV}	33
2.27	Problema de conexão de S a R é resolvido com mais de 30 iterações para o modelo M_{IV}	34
B.1	Fluxograma simplificado dos algoritmos computacionais usados	40

INTRODUÇÃO

Na sismologia estuda-se a propagação de ondas sísmicas, originadas numa fonte e registradas em receptores (estações sismológicas), para modelar os possíveis diferentes dados sísmicos observados e buscando-se, com isso, compreender a estrutura interna da Terra. Um dos métodos para a geração (simulação de tais dados) baseia-se no traçamento de raios, que pode nos permitir o cálculo de dados tais como: tempo de trânsito e amplitude. Como fontes e receptores estão situados em posições bem definidas nos modelos, surge o problema colocado pela necessidade de conectar tais posições por um raio sísmico. Este problema tanto na sismologia quanto na sísmica são de mesma natureza, distinguindo-se apenas em termos de escala e na forma da superfície de observação: tendendo a ser plana na sísmica e esférica na sismologia. Entretanto, em ambos os casos, é possível e comum termos fontes ou receptores enterrados, o que não altera a natureza do problema. Como exemplos de domínios da sísmica que têm interesse na resolução do problema temos: migração (em migração reversa no tempo, têm-se o interesse de conectar fontes a pontos do modelo visando obter campos de tempos), modelagem (geração sintética de dados em pontos de observação), inversão (tomografia), teoria (resolução da equação do transporte usando o campo de tempos fornecido pelo traçamento de raio e a teoria do raio propriamente dita) e etc. Duas escolas se dedicam à resolução do problema: aquela que mantém fixos os dois extremos do raio e procura encurvá-lo (“bending method”) e aquela que mantém fixo um extremo (geralmente a posição da fonte) e varia a direção de “tiro” do raio (“shooting method”). Um exemplo dessa segunda abordagem para a solução do problema é o chamado método paraxial que é aqui usado (Figueiró & Madariaga, 1999). Os movimentos da onda sísmica, considerados em termos de altas frequências, obedecem às mesmas leis físicas da óptica, portanto podemos estudar os raios sísmicos explorando-se analogias e princípios ópticos. O princípio de Fermat é que governa a geometria do raio, isto é: a trajetória do raio é resultante da aplicação do princípio de Fermat à função que fornece o tempo de trânsito da onda em seu movimento ao longo de caminhos que conectam dois pontos dados (Popov, 2002). Em outras palavras: o caminho C que torna tal tempo mínimo é a trajetória procurada.

CAPÍTULO 1

ABORDAGEM ANALÍTICA DO PROBLEMA

1.1 Aspectos Teóricos

Antes de tudo, faz-se necessário dizer que todos os modelos aqui estudados são bidimensionais, heterogêneos e isotrópicos; e que os raios estão representando trajetórias de perturbações ondulatórias compressoriais (ondas P).

As equações do raio são fornecidas através da aplicação do princípio de Fermat ao seguinte funcional:

$$t(C) = \int_C \frac{ds}{V}, \quad (1.1)$$

onde C é um caminho que conecta dois pontos do modelo, t é o tempo de trânsito da onda ao longo de C , V é a velocidade da onda no meio representado pelo modelo e ds é o elemento de comprimento de arco da curva C . Isto nos conduz ao seguinte par de equações (Červený, 1987):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}(\tau)}{d\tau} = \vec{P}(\tau) \\ \frac{d\vec{P}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left[\frac{1}{V^2}\right], \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\vec{X}(\tau) = (x(\tau), z(\tau))$ é o vetor posição dos pontos da trajetória do raio; $\vec{P}(\tau)$ é o vetor vazarosidade sendo ele tangente à trajetória do raio no ponto $(x(\tau), z(\tau))$; $V = V(x, z)$ é a velocidade da onda no ponto (x, z) do modelo e τ é um parâmetro do caminho do raio definido por:

$$\tau = \int_0^t V^2 dt, \quad (1.3)$$

com t sendo o tempo de trânsito da onda em sua viagem de $\vec{X}(0)$ a $\vec{X}(\tau)$ ao longo da trajetória do raio. O parâmetro τ não tem uma significação física direta, entretanto sua dimensão no sistema MKS é do tipo L^2T^{-1} .

1.1.1 Uma abordagem analítica

Para um modelo de campo de velocidades do tipo:

$$V_1(x, z) = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cz}}, \quad (1.4)$$

é possível realizar um tratamento totalmente analítico para o problema de traçamento de raios conectando dois pontos do modelo, como é mostrado a seguir. A expressão de $V_1(x, z)$ nos permite escrever o quadrado da vagarosidade, S_1 , do seguinte modo:

$$S_1^2(x, z) = \frac{1}{V_1^2(x, z)} = a + bx + cz. \quad (1.5)$$

Derivando-se a primeira equação de (1.2) em relação a τ temos:

$$\frac{d^2 \vec{X}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d\vec{P}(\tau)}{d\tau}. \quad (1.6)$$

Esta última equação juntamente com a segunda de (1.2) nos permite escrever a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2 \vec{X}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left[\frac{1}{V^2(x, z)} \right]. \quad (1.7)$$

Substituindo-se em (1.7) a expressão de $\frac{1}{V_1^2}$ dada em (1.5), temos:

$$\frac{d^2 \vec{X}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(a + bx + cz) = \frac{1}{2}(b, c). \quad (1.8)$$

Logo,

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{1}{2} b \quad (1.9)$$

e

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{1}{2} c. \quad (1.10)$$

Resolvendo-se (1.9) e (1.10), temos:

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{b}{4}\tau^2 + k_1\tau + k_2 \\ z(\tau) = \frac{c}{4}\tau^2 + k_3\tau + k_4. \end{cases} \quad (1.11)$$

Então,

$$\vec{X}(\tau) = (x(\tau), z(\tau)) = \left(\frac{b}{4}\tau^2 + k_1\tau + k_2, \frac{c}{4}\tau^2 + k_3\tau + k_4 \right). \quad (1.12)$$

Estando a fonte S posicionada em $(0,0)$ e sendo 0 o valor do parâmetro τ para esta posição, temos:

$$\vec{X}(0) = (k_2, k_4) = (0, 0) \Rightarrow k_2 = 0 \text{ e } k_4 = 0. \quad (1.13)$$

Então,

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{b}{4}\tau^2 + k_1\tau \\ z(\tau) = \frac{c}{4}\tau^2 + k_3\tau. \end{cases} \quad (1.14)$$

Derivando-se \vec{X} em função de τ , temos as coordenadas do vetor vagarosidade, isto é:

$$\frac{d\vec{X}(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{b}{2}\tau + k_1, \frac{c}{2}\tau + k_3 \right) = (P_x(\tau), P_z(\tau)). \quad (1.15)$$

Para $\tau = 0$, temos:

$$(k_1, k_3) = (P_x(0), P_z(0)) = (P_{x0}, P_{z0}), \quad (1.16)$$

onde (P_{x0}, P_{z0}) é o vetor vagarosidade na fonte.

Sendo assim, as equações da trajetória do raio são:

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{b}{4}\tau^2 + P_{x0}\cdot\tau \\ z(\tau) = \frac{c}{4}\tau^2 + P_{z0}\cdot\tau. \end{cases} \quad (1.17)$$

Supondo-se que o receptor está posicionado em $(R, 0)$ e $\tau = \tau_R$ é tal que $\vec{X}(\tau_R) = (R, 0)$, tem-se:

$$\begin{cases} R = \frac{b}{4}\tau_R^2 + P_{x0}\cdot\tau_R \\ 0 = \frac{c}{4}\tau_R^2 + P_{z0}\cdot\tau_R. \end{cases} \quad (1.18)$$

Logo,

$$\frac{c}{4}\tau_R + P_{z0} = 0 \Rightarrow \tau_R = \frac{-4P_{z0}}{c}. \quad (1.19)$$

O Hamiltoniano

$$H(\vec{X}, \vec{P}) = \frac{1}{2}[\|\vec{P}\|_2^2 - u^2(\vec{X})] \quad (1.20)$$

é igual a 0 sobre o raio, onde $u = \frac{1}{v}$. Então,

$$\|\vec{P}\|_2^2 = u^2(\vec{X}), \quad (1.21)$$

também sobre o raio

Em particular, na fonte temos:

$$P_{x0}^2 + P_{z0}^2 = a. \quad (1.22)$$

Substituindo (1.19) em (1.22), tem-se:

$$P_{x0}^2 + \frac{c^2}{16}\tau_R^2 = a. \quad (1.23)$$

Usando a primeira equação de (1.18) e (1.23), obtêm-se:

$$\left(\frac{R}{\tau_R} - \frac{b}{4}\tau_R\right)^2 + \frac{c^2}{16}\tau_R^2 = a. \quad (1.24)$$

Logo,

$$\frac{R^2}{\tau_R^2} - \frac{Rb}{2} + \frac{b^2\tau_R^2}{16} + \frac{c^2\tau_R^2}{16} = a. \quad (1.25)$$

Multiplicando-se (1.25) por τ_R^2 temos:

$$\frac{(b^2 + c^2)}{16}\tau_R^4 - \left(\frac{Rb}{2} + a\right)\tau_R^2 + R^2 = 0. \quad (1.26)$$

Fazendo-se

$$\lambda_1 = \frac{b^2 + c^2}{16} \quad (1.27)$$

e

$$\lambda_2 = -\left(\frac{Rb}{2} + a\right) \quad (1.28)$$

tem-se:

$$\lambda_1\tau_R^4 + \lambda_2\tau_R^2 + R^2 = 0. \quad (1.29)$$

Chamando-se

$$\tau_R^2 = \xi, \quad (1.30)$$

chega-se a:

$$\xi = \frac{-\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1 R^2}}{2\lambda_1}. \quad (1.31)$$

Como a, b, c e R são conhecidos; determina-se λ_1 e λ_2 por (1.27) e (1.28). Estes permitem a obtenção de ξ por (1.31) que, por sua vez, fornece τ_R através de (1.30). Este último, usando (1.19), permite o cálculo de P_{z0} , que juntamente com (1.22) fornece P_{x0} . Tem-se, então, a direção $\vec{P} = (P_{x0}, P_{z0})$ de saída do raio da fonte para que este atinja R .

1.2 Aplicação Numérica

1.2.1 Descrição do modelo

Estamos trabalhando com um modelo (M_I) de 3,0 km de extensão horizontal 1,0 km de profundidade. O campo de velocidade referido ao mesmo está descrito pela equação (1.4). Isto é: trata-se de um campo do tipo V_1 , com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0156 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $c = -0,9377 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$. Sua imagem gráfica é dada pela Figura 1.1:

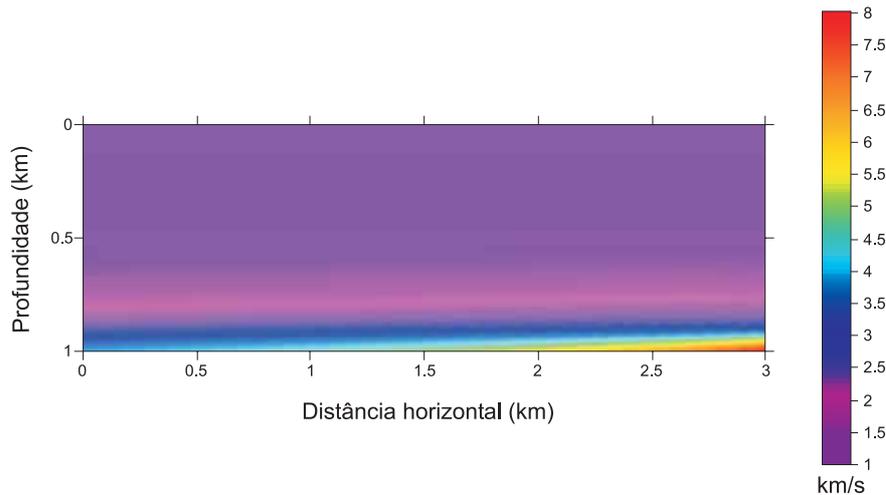


Figura 1.1: Campo de velocidade V_1 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0156 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $c = -0,9377 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$. Embora, para efeito de resolução do problema, a interpretação geológica do modelo seja irrelevante, podemos dizer que ele pode ser visto como sendo uma região compreendida e comprimida entre o topo de um domo salino e a superfície.

1.2.2 Resultados Obtidos

Em todos os experimentos com M_I a posição da fonte S foi mantida na superfície de observação ($z = 0$) em $x_S = 0,0 \text{ km}$. Quanto ao receptor R , no primeiro experimento, ele foi colocado em $x_R = 0,5 \text{ km}$ e $z_R = 0,0 \text{ km}$ como pode ser visto na Figura 1.2, na qual observa-se dois raios conectando S a R : um bem raso e outro tão profundo que excede a dimensão vertical do modelo.

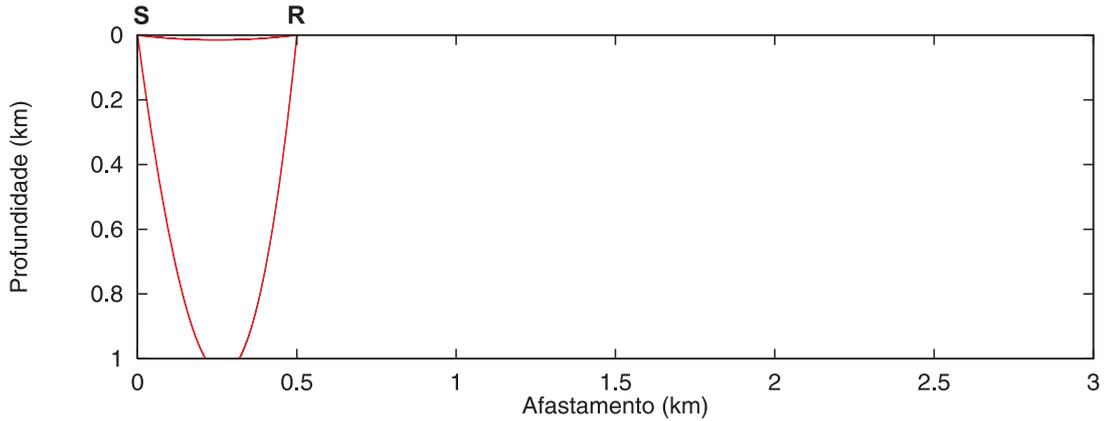


Figura 1.2: Conexão de fonte a receptor situados na superfície $z = 0$ usando o método analítico para o modelo M_I . A coordenada x da fonte S , x_S , é $0,0 \text{ km}$ e o receptor está localizado em $x_R = 0,5 \text{ km}$.

O resultado obtido, usando o método analítico, quando o receptor é posicionado em $R = 1,0 \text{ km}$ é mostrado na Figura 1.3, novamente são encontrados dois raios que resolvem o problema, sendo um raso e outro profundo. Embora as trajetórias dos raios para M_I sejam sempre parabólicas (ou retas, caso degenerado), as equações 1.17 mostram que z como função de x pode conter termos do tipo $\sqrt{1+x}$, o que muda a concavidade da parábola.

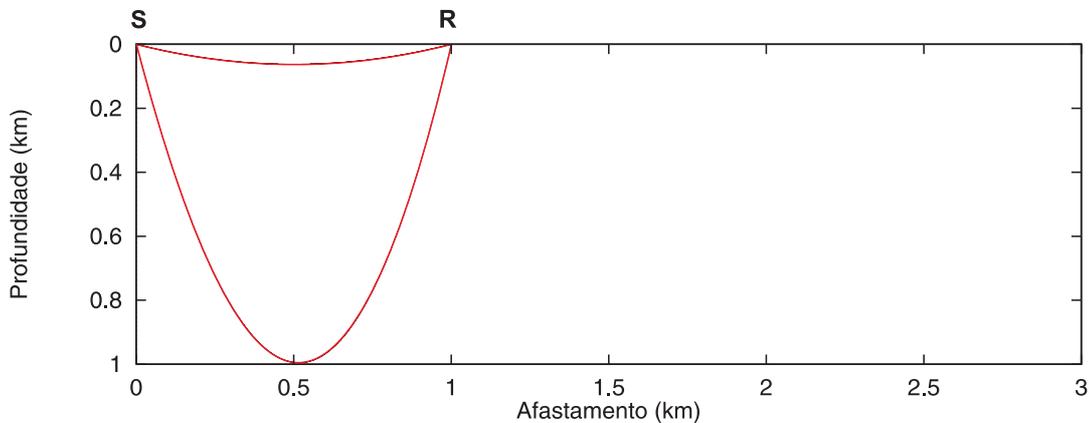


Figura 1.3: Resultado obtido em M_I usando o método analítico, para fonte posicionada em $x_S = 0,0 \text{ km}$ e receptor em $x_R = 1,0 \text{ km}$.

O mesmo experimento foi realizado, distinguindo-se dos anteriores apenas com relação a posição do receptor que, neste caso, foi colocado em $x_R = 1,5 \text{ km}$, exibindo o mesmo padrão de duas trajetórias soluções, uma rasa e outra profunda, porém mais espaçadas, como pode ser visto na Figura 1.4. Se continuássemos aumentando a posição do receptor, chegaríamos numa situação em que tais raios seriam quase coincidentes. Tal situação demarcaria um dos limites do campo de raios em M_I para a fonte posicionada em $S = 0,0 \text{ km}$.

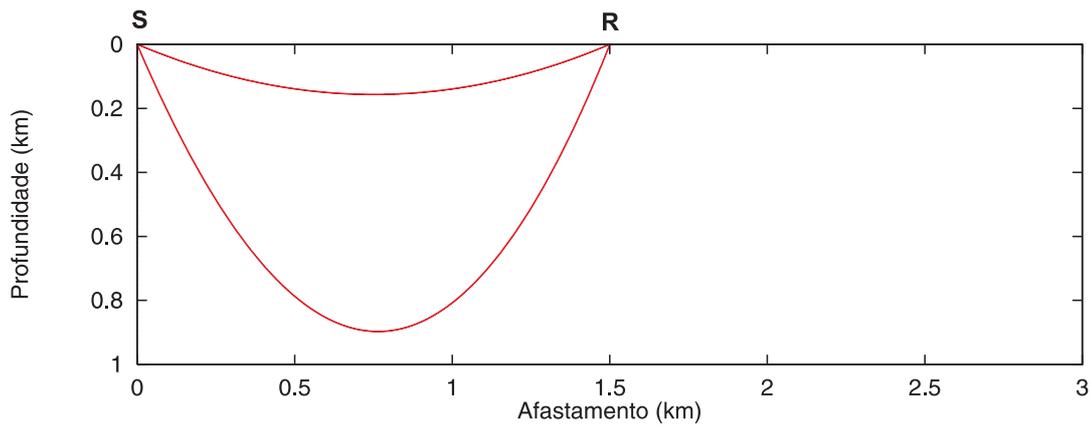


Figura 1.4: Resolução do problema de traçamento de raio conectando S ($x_S = 0,0 \text{ km}$) a R ($x_R = 1,5 \text{ km}$) no modelo M_I , usando o método analítico.

Existem regiões do modelo que não são atravessadas pelos raios, portanto não tem sentido colocar receptores na superfície de observação em posições nas quais não ocorre chegada de raios, tratam-se das chamadas zonas de sombra ou cegas (Sheriff, 2002). No caso do experimento realizado com M_I , um receptor R posicionado em $2,5 \text{ km}$ ou $3,0 \text{ km}$ não seria atingido pelo raio.

CAPÍTULO 2

MÉTODO PARAXIAL NO CASO 2D

2.1 Teoria

A idéia básica do método paraxial é aproveitar informações disponíveis num raio já traçado (raio central) para traçar um novo raio, vizinho, obtido através de uma perturbação do primeiro visando resolver o problema da conexão fonte-receptor, tal perturbação deve ser capaz de produzir uma diminuição da diferença entre o ponto de chegada, à uma superfície de referência, e a posição do receptor ou outro ponto qualquer de interesse no modelo. No caso do presente trabalho, fonte, S , e receptor, R , estão posicionados na superfície $z = 0$ conforme a Figura 2.1. O método paraxial tem sua validade determinada pelas limitações impostas pela teoria do raio (POPOV, M. M., 2002).

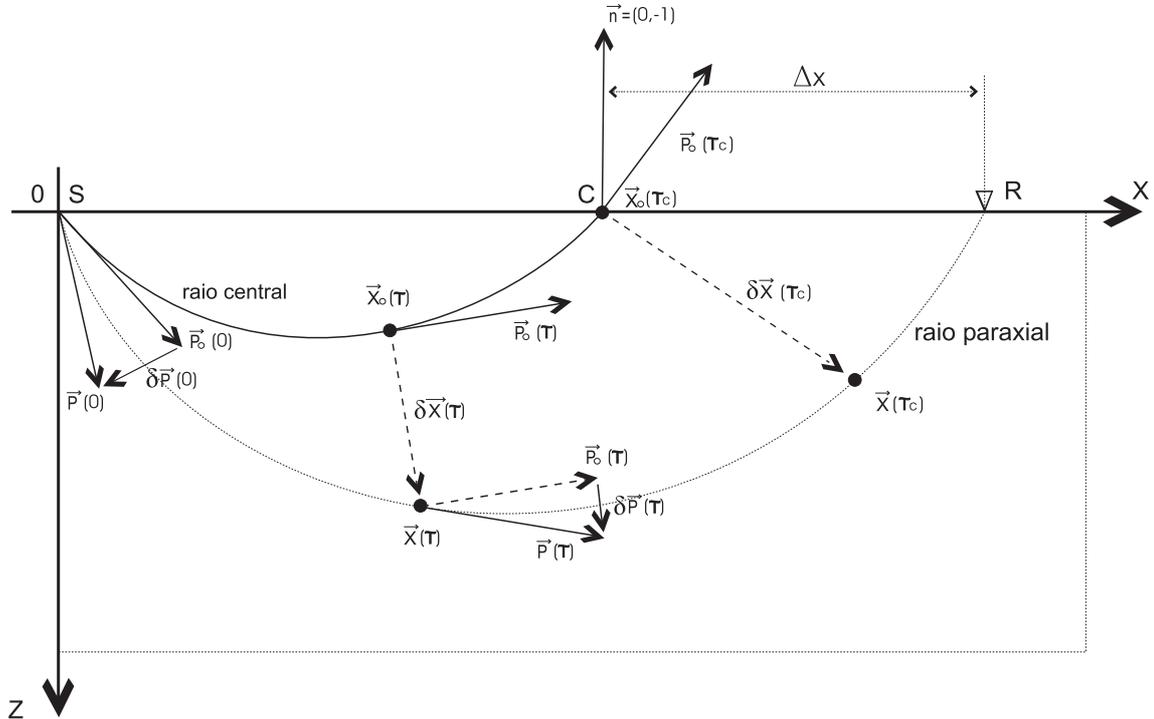


Figura 2.1: Desenho esquemático mostrando o raio central e a sua perturbação, isto é: o raio paraxial.

A seguir é apresentado um desenvolvimento (Figueiró & Madariaga, 2000) que permite a obtenção de um relacionamento matemático entre, Δx e $\delta\vec{P}(0)$ mostrados na Figura 2.1. Como o raio paraxial é obtido através de uma perturbação do raio central, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \vec{X}(\tau) = \vec{X}_0(\tau) + \delta\vec{X}(\tau) \\ \vec{P}(\tau) = \vec{P}_0(\tau) + \delta\vec{P}(\tau), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\vec{X}_0(\tau)$ representa um ponto da trajetória do raio central em τ ; $\delta\vec{X}(\tau)$ é a perturbação que este ponto sofre, também, em τ ; e $\vec{X}(\tau)$ é o ponto da trajetória do raio paraxial resultante desta mesma perturbação. Analogamente, $\vec{P}_0(\tau)$ é o vetor vazarosidade, tangente à trajetória do raio central em τ ; $\delta\vec{P}(\tau)$ é uma perturbação; e $\vec{P}(\tau)$ é o vetor vazarosidade, tangente à trajetória do raio paraxial em τ , resultante da referida perturbação. Colocando-se os vetores de (2.1) na forma de pares ordenados, temos:

$$\begin{cases} (x(\tau), z(\tau)) = (x_0(\tau), z_0(\tau)) + (\delta x(\tau), \delta z(\tau)) \\ (P_x(\tau), P_z(\tau)) = (P_{x0}(\tau), P_{z0}(\tau)) + (\delta P_x(\tau), \delta P_z(\tau)). \end{cases} \quad (2.2)$$

Derivando-se a primeira equação de (2.1), temos:

$$\frac{d\vec{X}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\vec{X}_0(\tau)}{d\tau} + \frac{d\delta\vec{X}(\tau)}{d\tau}, \quad (2.3)$$

que implica, usando-se a primeira equação de (1.2), em:

$$\frac{d\delta\vec{X}(\tau)}{d\tau} = \vec{P}(\tau) - \vec{P}_0(\tau) = \delta\vec{P}(\tau). \quad (2.4)$$

Logo,

$$\left(\frac{d\delta x(\tau)}{d\tau}, \frac{d\delta z(\tau)}{d\tau} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta P_x(\tau) \\ \delta P_z(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A segunda equação de (1.2) nos diz que:

$$\frac{d\vec{P}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}[u^2(\vec{X}(\tau))], \quad (2.6)$$

onde $u^2 = \frac{1}{v^2}$, isto é, ela é o quadrado da função vazarosidade; e $\vec{\nabla}$ representa o operador gradiente aplicado a $u^2(\vec{X}(\tau))$ vista como uma função de $\vec{X} = (x, z)$. Então, utilizando-se a primeira equação de (2.1), podemos escrever:

$$\frac{d\vec{P}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}[u^2(\vec{X}_0(\tau) + \delta\vec{X}(\tau))] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^2(\vec{X}_0 + \delta\vec{X})}{\partial x}, \frac{\partial u^2(\vec{X}_0 + \delta\vec{X})}{\partial z} \right]. \quad (2.7)$$

Fazendo-se a expansão em série de Taylor do último termo de (2.7), temos:

$$\frac{d\vec{P}(\tau)}{d\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^2(\vec{X}_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z \partial x} \delta z, \frac{\partial u^2(\vec{X}_0)}{\partial z} + \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x \partial z} \delta x + \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z^2} \delta z \right]. \quad (2.8)$$

Sendo assim, sabendo-se que $\frac{d\vec{P}_0(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}[u^2(\vec{X}_0(\tau))]$, podemos escrever:

$$\frac{d\delta P_x(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z \partial x} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e

$$\frac{d\delta P_z(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z^2} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta z \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Compondo-se (2.5) com (2.9) e (2.10) podemos construir a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\delta x(\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\delta z(\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\delta P_x(\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\delta P_z(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z \partial x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x \partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x(\tau) \\ \delta z(\tau) \\ \delta P_x(\tau) \\ \delta P_z(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Fazendo-se:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u^2(\vec{X}_0)}{\partial z^2} \end{bmatrix};$$

(2.11) pode ser escrita, mais sinteticamente, como:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\delta \vec{X}(\tau)}{d\tau} \\ \frac{d\delta \vec{P}(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ U & O_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \vec{X}(\tau) \\ \delta \vec{P}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Fazendo-se:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ U & O_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

e

$$\delta \vec{Y}(\tau) = \begin{bmatrix} \delta \vec{X}(\tau) \\ \delta \vec{P}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

podemos simplificar ainda mais a representação de (2.12), isto é:

$$\frac{d\delta\vec{Y}(\tau)}{d\tau} = \Lambda.\delta\vec{Y}(\tau), \quad (2.15)$$

cuja solução (Aki & Richards, 1980) é dada por:

$$\delta\vec{Y}(\tau) = P(\tau, 0).\delta\vec{Y}(0), \quad (2.16)$$

onde

$$P(\tau, 0) = I_4 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \tau^j \Lambda^j \quad (2.17)$$

é chamada de matriz de propagação e I_4 representa a identidade de ordem 4. É fácil verificar, por substituição, que (2.16) é solução de (2.15). Além disso, tal solução é única devido à condição inicial

$$\delta\vec{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Tais verificações são apresentadas no apêndice A.

Temos que:

$$P(\tau, 0) = \begin{bmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^j}{j!} \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ U & O_2 \end{bmatrix}^j. \quad (2.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(\tau, 0) = & \begin{bmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & I_2 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ U & O_2 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{2!} \begin{bmatrix} U & O_2 \\ O_2 & U \end{bmatrix} + \frac{\tau^3}{3!} \begin{bmatrix} O_2 & U \\ U^2 & O_2 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\tau^4}{4!} \begin{bmatrix} U^2 & O_2 \\ O_2 & U^2 \end{bmatrix} + \frac{\tau^5}{5!} \begin{bmatrix} O_2 & U^2 \\ U^3 & O_2 \end{bmatrix} + \frac{\tau^6}{6!} \begin{bmatrix} U^3 & O_2 \\ O_2 & U^3 \end{bmatrix} + \frac{\tau^7}{7!} \begin{bmatrix} O_2 & U^3 \\ U^4 & O_2 \end{bmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fazendo-se

$$P(\tau, 0) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

temos:

$$Q_1 = I_2 + \frac{\tau^2}{2!} U + \frac{\tau^4}{4!} U^2 + \frac{\tau^6}{6!} U^3 + \dots = I_2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^{2j}}{(2j)!} U^j, \quad (2.22)$$

$$Q_2 = \tau I_2 + \frac{\tau^3}{3!}U + \frac{\tau^5}{5!}U^2 + \frac{\tau^7}{7!}U^3 + \dots = \tau I_2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^{2j+1}}{(2j+1)!}U^j, \quad (2.23)$$

$$P_1 = \tau U + \frac{\tau^3}{3!}U^2 + \frac{\tau^5}{5!}U^3 + \frac{\tau^7}{7!}U^4 + \dots = U \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^{2j-1}}{(2j-1)!}U^{j-1} = UQ_2 \quad (2.24)$$

e

$$P_1 = I_2 + \frac{\tau^2}{2!}U + \frac{\tau^4}{4!}U^2 + \frac{\tau^6}{6!}U^3 + \dots = Q_1. \quad (2.25)$$

Como se pode ver na Figura 2.1, a superfície de observação ($z = 0$) é perpendicular à direção $\vec{n} = (0, -1)$. Logo,

$$\langle \Delta\vec{X}, \vec{n} \rangle = 0, \quad (2.26)$$

onde

$$\Delta\vec{X} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Transladando-se o vetor $\vec{P}_0(\tau_C)$ para o ponto $\vec{X}(\tau_C)$, Figura 2.1, obtêm-se a seguinte aproximação:

$$\Delta\vec{X} \cong \delta\vec{X}(\tau_C) + \vec{P}_0(\tau_C) \cdot \Delta\tau, \quad (2.28)$$

onde $\Delta\tau = \tau_R - \tau_C$ com τ_R sendo o τ do ponto R medido ao longo do raio paraxial.

Substituindo-se (2.28) e \vec{n} em (2.26) chega-se a:

$$\Delta\tau = \frac{-\delta z(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)}. \quad (2.29)$$

Logo,

$$\Delta\vec{X} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x(\tau_C) \\ \delta z(\tau_C) \end{pmatrix} - \frac{\delta z(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)} \cdot \begin{pmatrix} P_{x0}(\tau_C) \\ P_{z0}(\tau_C) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

que implica em:

$$\Delta x = \left(1 \quad \frac{-P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)} \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta x(\tau_C) \\ \delta z(\tau_C) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Mas, substituindo-se (2.21) em (2.16) quando $\tau = \tau_C$, temos:

$$\begin{pmatrix} \delta x(\tau_C) \\ \delta z(\tau_C) \end{pmatrix} = Q_2 \cdot \begin{pmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Substituindo-se (2.32) em (2.31) e fazendo-se

$$Q_2 = \begin{bmatrix} q_{211} & q_{212} \\ q_{221} & q_{222} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

chegamos a

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-P_{x0}(\tau_C)}{P_{x0}(\tau_C)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{211}(\tau_C) & q_{212}(\tau_C) \\ q_{221}(\tau_C) & q_{222}(\tau_C) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Isto é,

$$\Delta x = \begin{bmatrix} q_{211}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)}q_{221}(\tau_C) & q_{212}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)}q_{222}(\tau_C) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

O hamiltoniano $H(\vec{X}, \vec{P}) = \frac{1}{2}[P_x^2(\tau) + P_z^2(\tau) - u^2(\vec{x}(\tau))]$ é nulo sobre qualquer raio, em particular sobre o raio paraxial. Logo,

$$H(\vec{X}, \vec{P}) = H(\vec{X}_0 + \delta\vec{X}, \vec{P}_0 + \delta\vec{P}) = 0. \quad (2.36)$$

Sendo assim,

$$H(\vec{X}_0, \vec{P}_0) + \frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial z}\delta z + \frac{\partial H}{\partial P_x}\delta P_x + \frac{\partial H}{\partial P_z}\delta P_z = 0. \quad (2.37)$$

Considerando-se (2.37) em $\tau = 0$, temos:

$$P_x(0) \cdot \delta P_x(0) + P_z(0) \cdot \delta P_z(0) = 0. \quad (2.38)$$

Combinando-se (2.34) com (2.38), podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{211}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)}q_{221}(\tau_C) & q_{212}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)}q_{222}(\tau_C) \\ P_{x0}(0) & P_{z0}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Chamemos de A a matriz de ordem 2 que aparece em (2.39) e façamos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Então,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \begin{bmatrix} \alpha_{22}\Delta x \\ -\alpha_{21}\Delta x \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

que, finalmente, fornece:

$$\begin{cases} \delta P_x(0) = \frac{\alpha_{22}\Delta x}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \\ \delta P_z(0) = \frac{-\alpha_{21}\Delta x}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \end{cases} \quad (2.44)$$

onde

$$\begin{cases} \alpha_{21} = P_{x0}(0) \\ \alpha_{22} = P_{z0}(0) \\ \alpha_{11} = q_{211}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)} \cdot q_{221}(\tau_C) \\ \alpha_{12} = q_{212}(\tau_C) - \frac{P_{x0}(\tau_C)}{P_{z0}(\tau_C)} \cdot q_{222}(\tau_C). \end{cases} \quad (2.45)$$

2.2 Aplicações Numéricas

Para uma melhor visualização, trabalhamos com a cor azul para representar o primeiro raio central traçado, e a cor vermelha representando a trajetória do raio que resolve o problema.

Um fluxograma representativo dos programas implementados neste trabalho pode ser visto no apêndice B.

2.2.1 Modelo M_I

Visando uniformidade e a redução dos resultados a um mesmo termo de comparação, todos os experimentos realizados neste trabalho tiveram a direção de partida do primeiro raio fixada em $\vec{P}_0(0) = (\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}})$ e fonte posicionada em $S = 0,0 \text{ km}$.

Neste modelo adotamos os mesmos valores das constantes a, b e c usadas no experimento analítico, ou seja, estamos trabalhando com o mesmo campo de velocidade usado no modelo representado pela Figura 1.1. Deste modo podemos estabelecer algumas comparações entre o método analítico e o paraxial.

Para M_I , temos:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

pois,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

2.2.1.1 Resultados Obtidos para M_I

Observa-se neste primeiro experimento que o receptor R , foi colocado na posição $X_R = 0,5 \text{ km}$, como podemos ver na Figura 2.2, onde observamos uma boa resposta do método, resolvendo o problema com apenas 4 iterações.

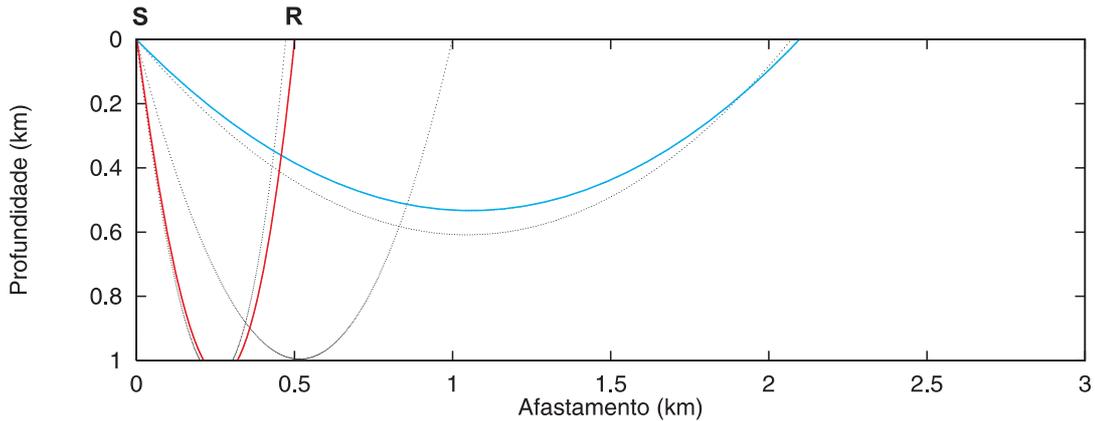


Figura 2.2: A fonte S é conectada à posição, $R = 0,5 \text{ km}$, do receptor, usando o método paraxial em 4 iterações.

O método paraxial traça apenas um raio solução do problema. Ou o mais raso, ou o mais profundo. Nos três experimentos feito com o campo de vagarosidade M_I a solução foi dada pelo raio mais profundo. A obtenção de um ou outro depende do raio inicial escolhido. Com o receptor posicionado em $X_R = 1,0 \text{ km}$ o problema é resolvido em apenas 3 iterações. Como pode ser visto na Figura 2.3.

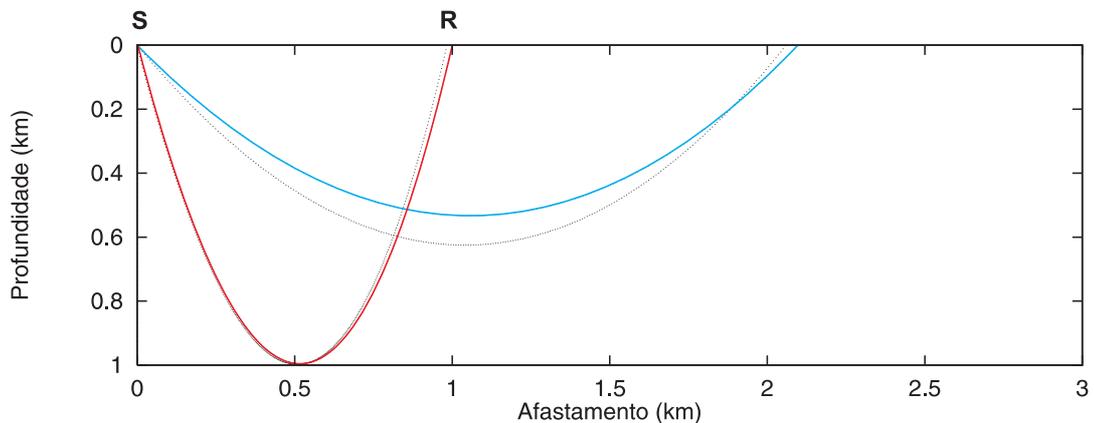


Figura 2.3: O receptor posicionado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S , usando o método paraxial, em apenas 3 iterações.

Deve-se acrescentar que nestes experimentos, assim como em todos os demais realizados neste trabalho, usando o método paraxial, a resolução do problema foi considerada satisfatória ao atingir-se um valor absoluto da diferença entre as posições do receptor e da chegada do raio corrente inferior a $\epsilon = 0,0001 \text{ km}$.

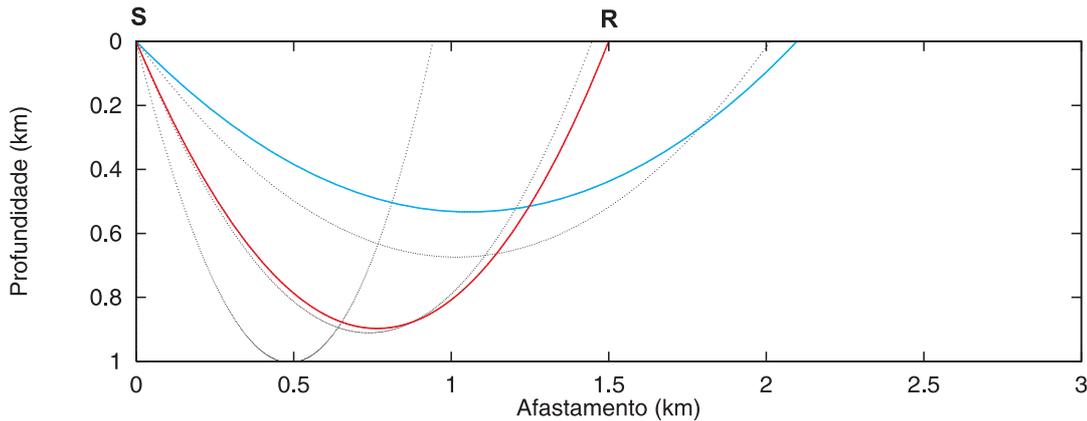


Figura 2.4: O receptor $R = 1,5 \text{ km}$ é conectado a S em 4 iterações usando o método paraxial.

Embora a obtenção das direções dos raios sejam obtidas através do método paraxial, para M_I , M_{II} e M_{III} ; os raios, dadas as direções, podem ser traçados analiticamente e isto é, naturalmente, aproveitado. Entretanto, isto, em geral, não pode ser feito, como, por exemplo, no caso do modelo M_{IV} .

Deve-se observar que os raios obtidos pelo método paraxial em M_I foram sempre, nos três casos apresentados, aqueles mais profundos, obtidos para o mesmo modelo, pelo procedimento analítico. Para que o método paraxial fornecesse o segundo raio (o mais raso) que, também, resolve o problema, seria necessário partir de um raio inicial que estivesse no domínio de convergência desta segunda solução.

2.2.2 Modelo M_{II-A}

O campo de velocidade M_{II-A} obedece a uma função da forma:

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cz + dx^2}}. \quad (2.48)$$

Neste caso, os valores escolhidos para os parâmetros foram os seguintes: $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0312 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9376 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,0052 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. Para tais valores o modelo encontra-se representado na Figura 2.5.

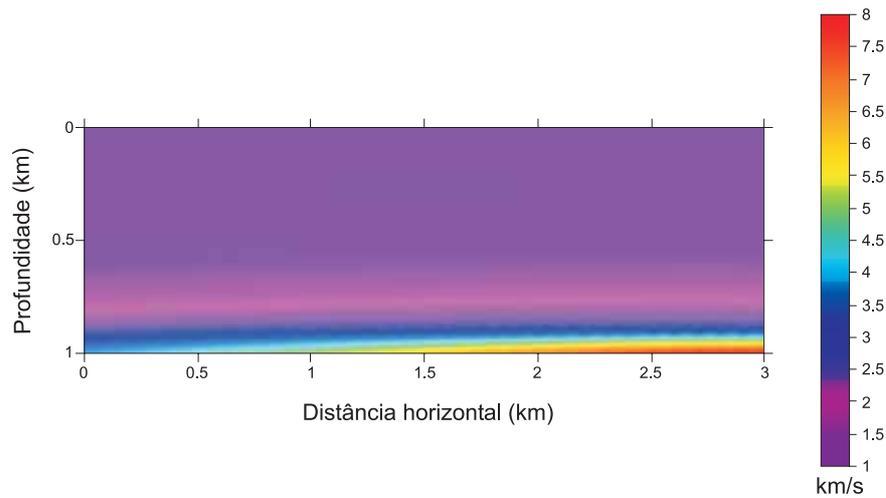


Figura 2.5: Campo de velocidade V_2 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0312 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9376 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,0052 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. Uma possível interpretação geológica para tal campo, seria a de uma bacia de sedimentos marinhos tendo ao fundo um embasamento basáltico.

Para M_{II-A} , temos:

$$U = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e, então,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \tau + \frac{d\tau^3}{3!} + \frac{d^2\tau^5}{5!} + \frac{d^3\tau^7}{7!} + \dots & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

2.2.2.1 Resultados Obtidos para M_{II-A}

Apesar do raio solução ultrapassar os limites do modelo, o mesmo é calculado e conectado ao receptor, R , na posição $X_R = 0,5 \text{ km}$ em apenas 4 iterações como pode ser visto na Figura 2.6.

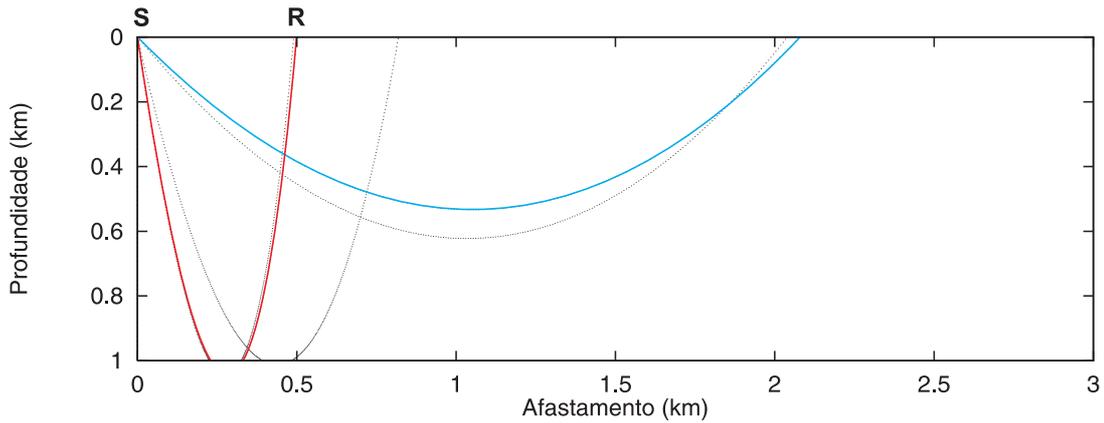


Figura 2.6: Conexão fonte, S , ao receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com 4 iterações para o modelo M_{II-A} .

O problema de conexão fonte receptor é resolvido com 3 iterações para o receptor posicionado em $X_R = 1,0 \text{ km}$ no modelo M_{II-A} . Como pode ser visto na Figura 2.7.

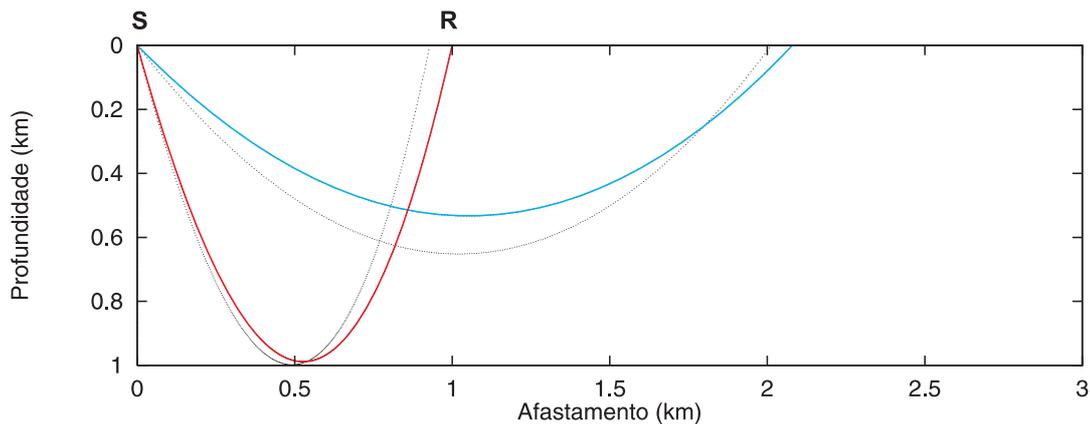


Figura 2.7: Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 3 iterações para o modelo M_{II-A} .

Nesse terceiro experimento, assim como no primeiro para o modelo M_{II-A} , podemos perceber que o penúltimo raio central traçado está bastante próximo do último. Onde podemos ver que a condição imposta no algoritmo para um erro inferior a $10,0 \text{ cm}$, entre R e o ponto de chegada do último raio, está sendo respeitada.

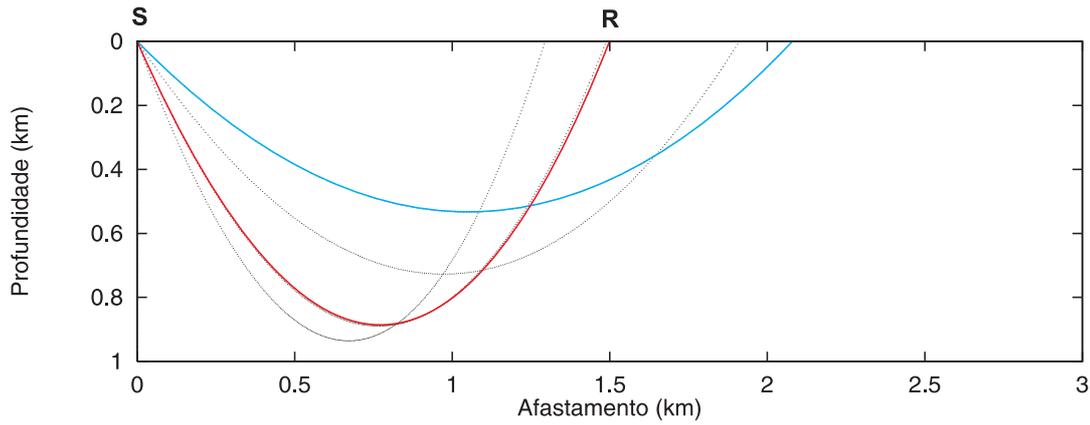


Figura 2.8: Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com 4 iterações para o modelo M_{II-A} .

As similaridades observadas no comportamento dos raios nos experimentos realizados para M_I e M_{II} são devidas ao fato de, apesar dos modelos terem forma polinomial distintas, seus coeficientes foram escolhidos de modo a produzir campos de velocidades semelhantes.

2.2.3 Modelo M_{II-B}

Trabalhamos com o mesmo campo V_2 , sendo que agora foram feitas alterações dos coeficiente, de modo a produzir uma distribuição que permita uma interpretação geológica diferente. Neste caso os parâmetros foram mudados para: $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,235 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,333 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. Temos sua representação gráfica na Figura 2.9.

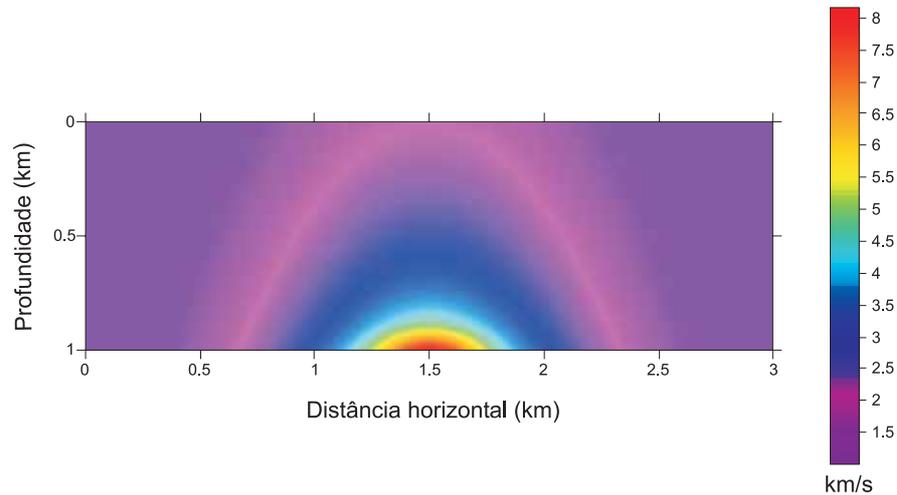


Figura 2.9: Campo de velocidade V_2 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,235 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$ e $d = 0,333 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. M_{II-B} representa um campo de velocidades passível de ser interpretado geologicamente como uma dobra anticlinal ou um domo.

2.2.3.1 Resultados obtidos para M_{II-B}

Agora, vemos uma situação radicalmente diferente de tudo o que foi visto antes. Como veremos, os raios se comportam de um modo não usual, entretanto isto não impede a resolução do problema.

Nos dois primeiros experimentos realizados para M_{II-B} os raios se comportam de forma parecida, isto se deve ao fato dos mesmos se restringirem a apenas um flanco do modelo, como pode ser observado nas Figuras 2.10 e 2.11.

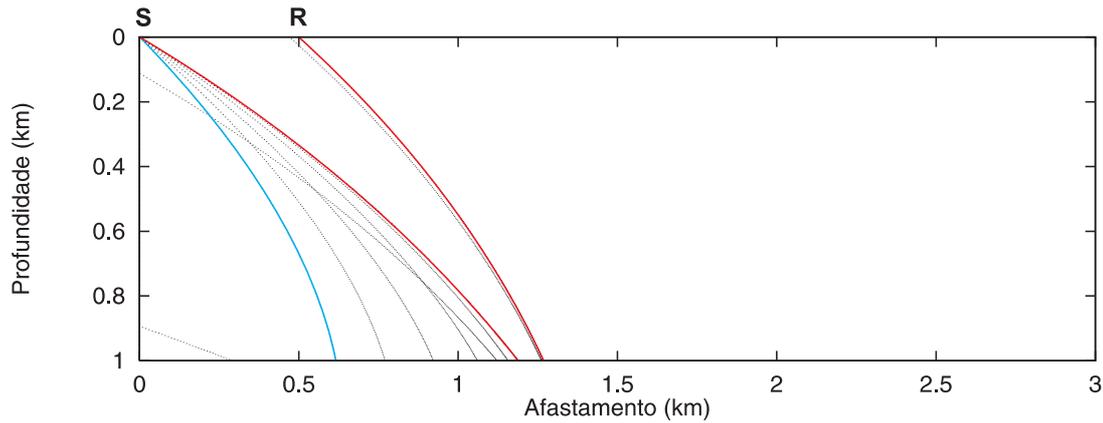


Figura 2.10: Conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida em 6 iterações para o modelo M_{II-B}

Contrariando os casos anteriores, os raios se apresentam de forma marcadamente assimétrica, devido as características de M_{II-B} (altas variações do quadrado da vagarosidade no centro inferior do modelo) e à posição da fonte. A Figura 2.13 nos dá uma visão mais completa dos raios através de uma extensão da região do modelo.

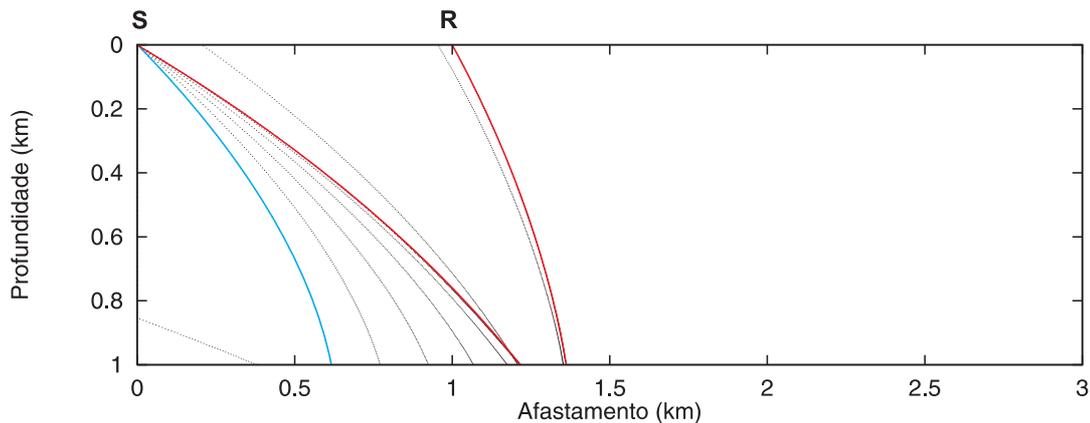


Figura 2.11: Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 6 iterações para o modelo M_{II-B}

Analogamente à situação anterior os raios da Figura 2.11 podem ser vistos de um modo mais completo através da extensão do modelo mostrada na Figura 2.14.

A conexão da fonte, S , ao receptor, R , posicionado em $X_R = 1,5 \text{ km}$ é mostrado na Figura 2.12 e o comportamento dos raios não diferem muito dos dois experimentos anteriores, pois as mesmas condições, exceto posição do receptor, permanecem.

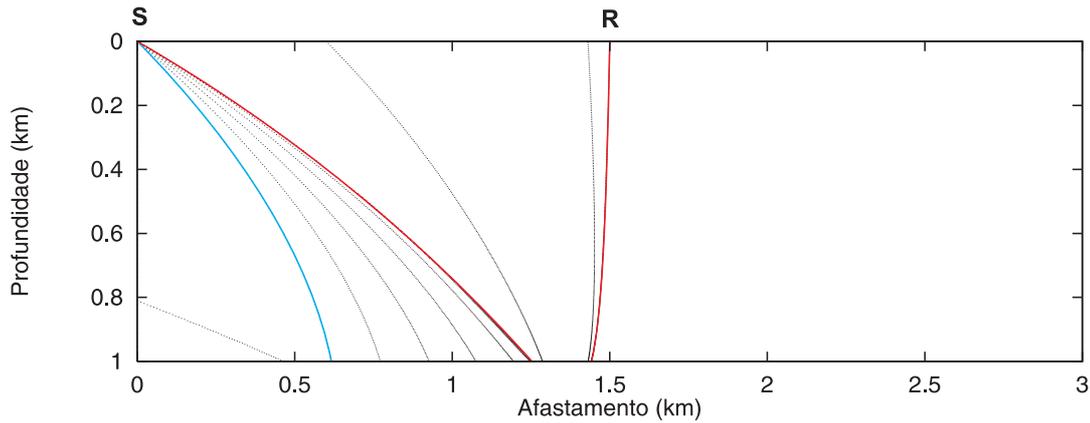


Figura 2.12: Problema de conexão entre S e R é resolvido com 6 iterações para o modelo M_{II-B} .

Uma visão estendida do comportamento dos raios mostrados em 2.12 pode ser tida na Figura 2.15.

2.2.3.2 Extensão do modelo M_{II-B} com os raios nele traçados

Para melhor visualização dos resultados devido à fuga de alguns raios do espaço destinado à representação do modelo, estaremos apresentando os resultados extrapolando os limites do modelo até $3,0 \text{ km}$ de profundidade e estendendo o afastamento horizontal até $-3,0 \text{ km}$, como pode ser visto na Figura 2.13.

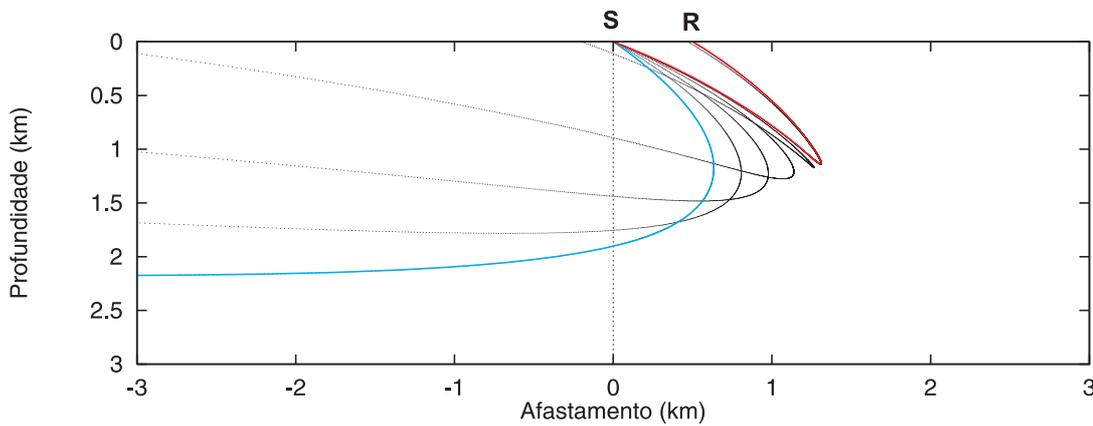


Figura 2.13: Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 0,5 \text{ km}$.

Embora não seja visível, nas Figuras que mostram a extensão do modelo M_{II-B} , os primeiros raios alcançam a superfície de observação em posições que estão relativamente próximas a $x = -100,0 \text{ km}$.

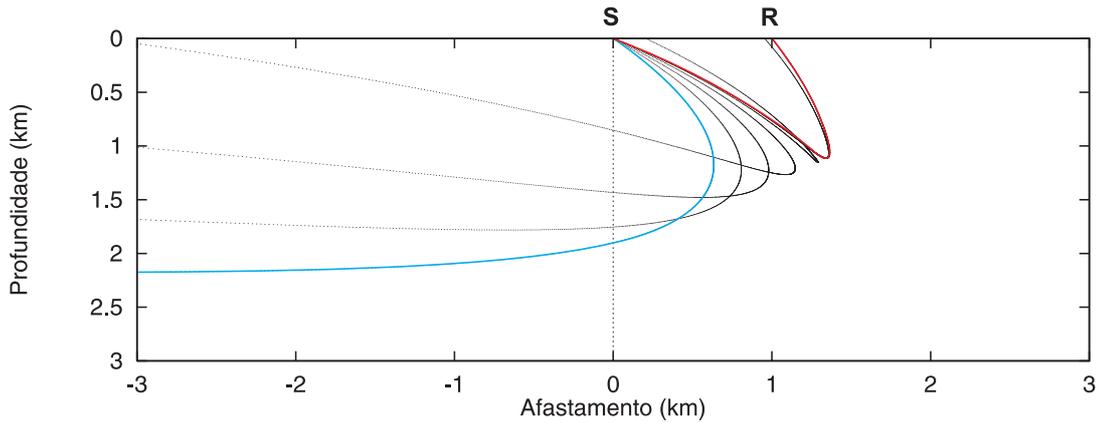


Figura 2.14: Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 1,0 \text{ km}$.

Portanto, para tais raios Δx assume valores da ordem de $100,0 \text{ km}$; entretanto, como vemos, isto não impede a resolução do problema.

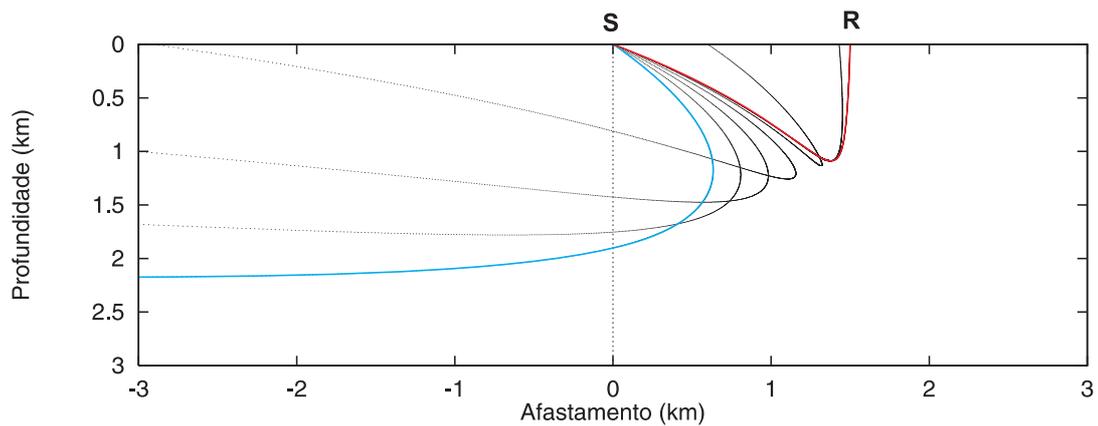


Figura 2.15: Versão estendida do experimento para o modelo M_{II-B} com $R = 1,5 \text{ km}$.

Muito embora, a extensão do modelo possa produzir velocidades destituídas de significado sísmico, todos os raios que ultrapassam os limites do modelo são auxiliares e têm apenas sentido matemático. Em meio a todo esse procedimento o único raio que interessa, e que deve fazer sentido, é aquele que conecta fonte e receptor.

Tais raios soluções estão excedendo, apenas ligeiramente, a profundidade de $1,0 \text{ km}$; que é a máxima utilizadas nos modelos em tratamento.

2.2.4 Modelo M_{III-A}

O campo de velocidade M_{III-A} obedece a uma função da forma:

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cz + dx^2 + ez^2}}. \quad (2.51)$$

No caso estudado, os valores escolhidos para os parâmetros foram: $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0259 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9704 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0087 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,0049 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. A Figura 2.16 representa graficamente tal modelo.

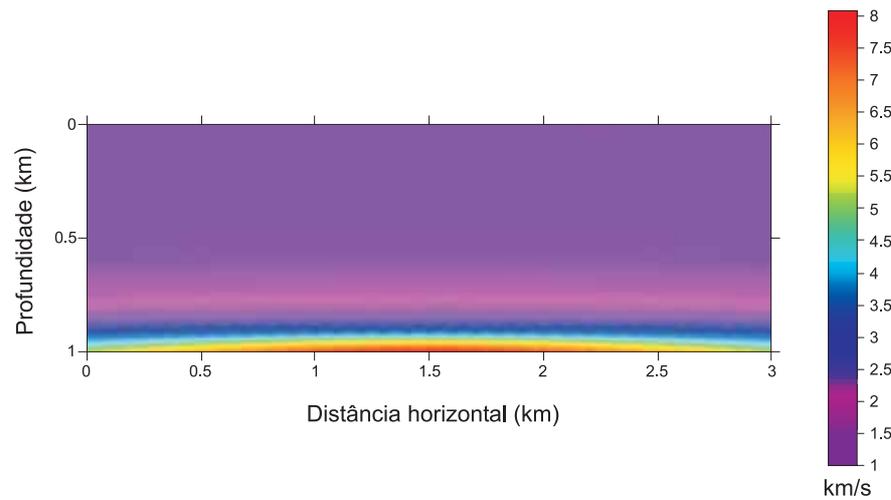


Figura 2.16: Campo de velocidade V_3 com $a = 1,0 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0259 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,9704 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0087 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,0049 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$.

O modelo M_{III-A} pode ter interpretações geológicas similares às aquelas apresentadas para os modelos M_I ou M_{II-A} .

Cumpre acrescentar que para V_3 , temos:

$$U = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

e, então,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \tau + \frac{d\tau^3}{3!} + \frac{d^2\tau^5}{5!} + \frac{d^3\tau^7}{7!} + \dots & 0 \\ 0 & \tau + \frac{e\tau^3}{3!} + \frac{e^2\tau^5}{5!} + \frac{e^3\tau^7}{7!} + \dots \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.2.4.1 Resultados Obtidos para M_{III-A}

Verificou-se resultados muito parecidos com os resultados obtidos para os modelos M_I e M_{II-A} para os dois primeiros experimentos. Isto se deve ao fato de, apesar da função V_3 ter uma forma diferente de V_1 e V_2 ; os coeficientes em M_I , M_{II-A} e M_{III-A} ; foram escolhidos de tal modo que produziram campos de velocidades similares.

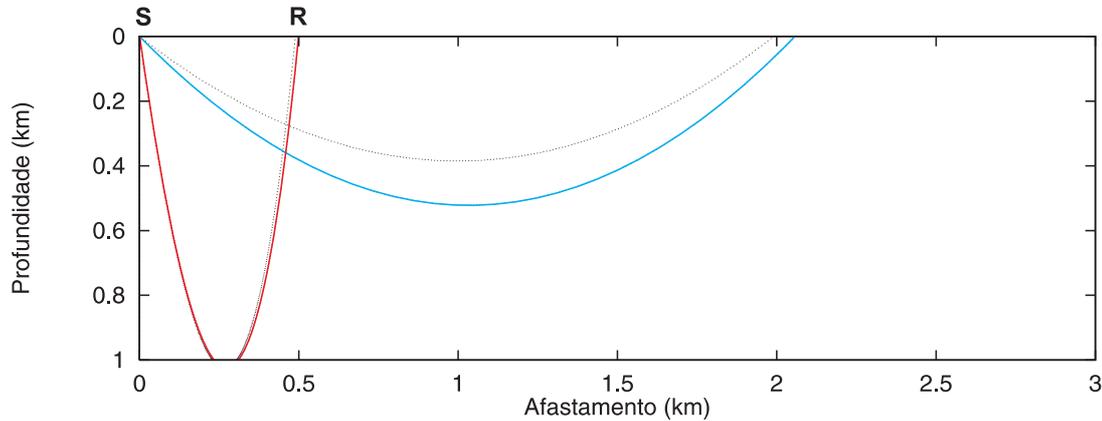


Figura 2.17: Conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com 3 iterações para o modelo M_{III-A} .

O problema é resolvido para receptores posicionados em $X_R = 0,5 \text{ km}$ e em $X_R = 1,0 \text{ km}$, cuja solução, para cada um, está representado nas Figuras 2.17 e 2.18, respectivamente.

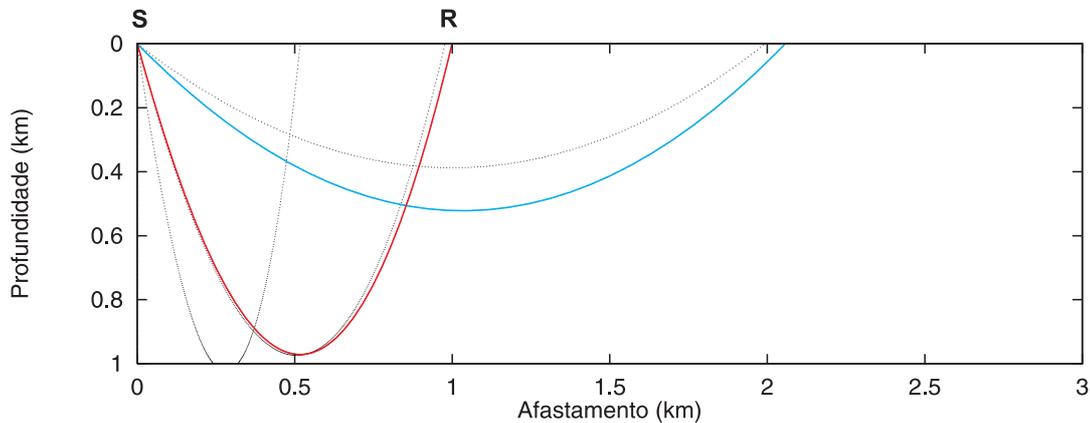


Figura 2.18: Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em 4 iterações para o modelo M_{III-A} .

Já no terceiro experimento, com o receptor, R , posicionado em $X_R = 1,5 \text{ km}$, o resultado se diferencia bastante daqueles verificados nos casos de M_I e M_{II-A} , pelo fato do resultado paraxial convergir para o raio mais raso. A inclusão do termo ez^2 foi suficiente para colocar o raio inicial no domínio da convergência do raio mais raso.

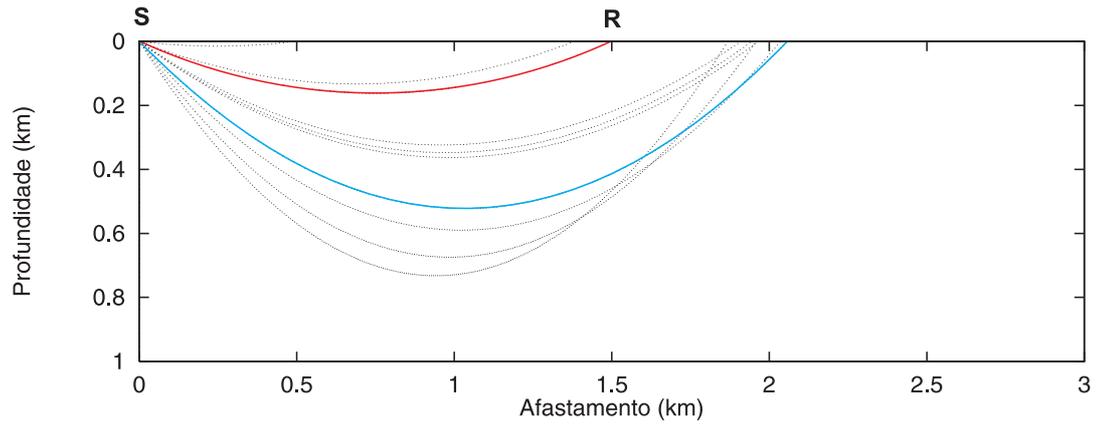


Figura 2.19: Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com 9 iterações para o modelo M_{III-A} .

2.2.5 Modelo M_{III-B}

Trabalhamos novamente com o campo V_3 , sendo que foram feitas alterações nos coeficientes, para produzirmos uma distribuição diferente de velocidades para tanto, os parâmetros foram mudados para: $a = 0,25 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,7941 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,75 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. Chamemos tal modelo de M_{III-B} e sua representação gráfica pode ser vista na Figura 2.8.

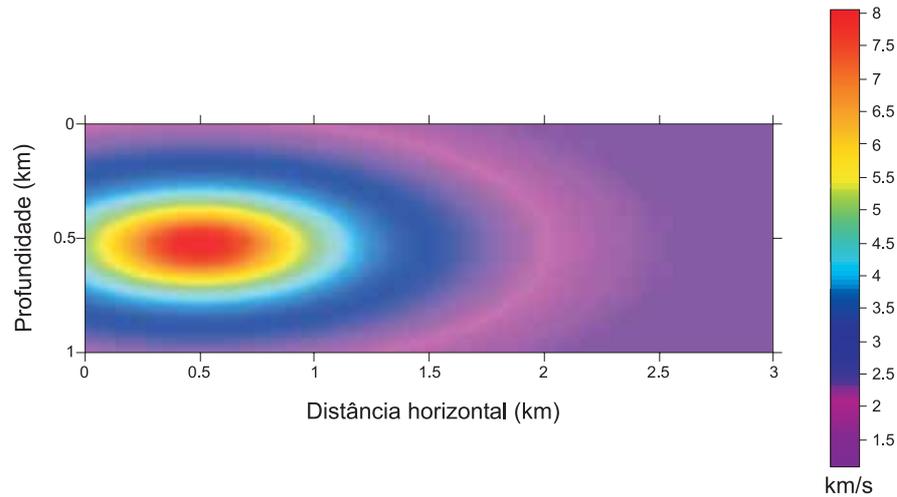


Figura 2.20: M_{III-B} : campo de velocidade V_3 com $a = 0,25 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,7941 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,1 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $e = 0,75 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$.

O modelo M_{III-B} pode ser geologicamente interpretado como uma intrusão magmática elíptica.

2.2.5.1 Resultados Obtidos para M_{III-B}

Como resultado do aumento do nível de complicação dos modelos, a resolução do problema se dá através de um número grande de iterações. Como podemos ver, nesse caso a conexão do receptor $X_R = 0,5 \text{ km}$ com a fonte S , é mostrada na Figura 2.21.

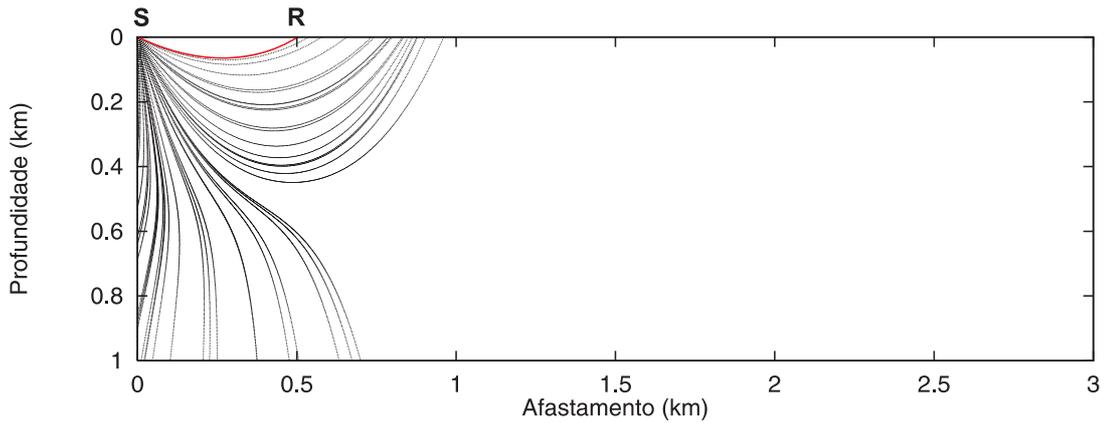


Figura 2.21: Conexão da fonte, S , ao receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida mais de 30 iterações para o modelo M_{III-B} .

Apesar do escapamento de muitos raios, a conexão da fonte com o receptor, R , em $X_R = 1,0 \text{ km}$ é realizada, conforme mostrado na Figura 2.22.

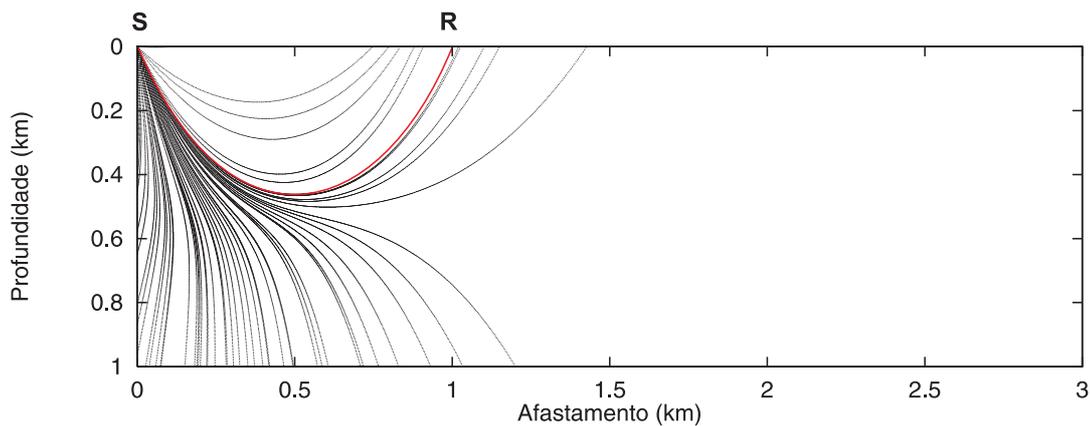


Figura 2.22: Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S em mais de 40 iterações no modelo M_{III-B} .

O caso no qual $R = 1,5 \text{ km}$, o problema é resolvido e está ilustrado na Figura 2.23. A novidade, até então não observada é a presença de raios para pontos do modelo com coordenadas superiores a $2,5 \text{ km}$.

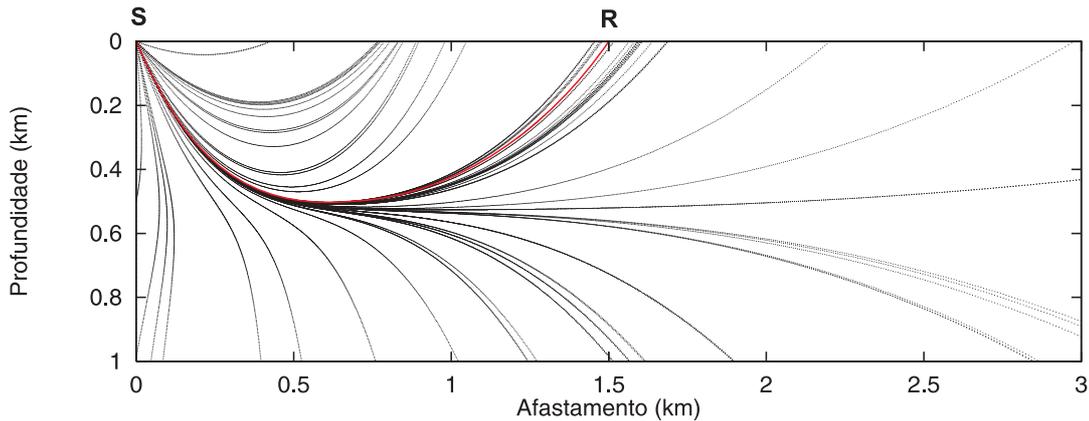


Figura 2.23: Problema de conexão de S a $R = 1,5 \text{ km}$ é resolvido com mais de 40 iterações para o modelo M_{III-B} .

Uma das razões para o aumento do número de iterações e, conseqüentemente, o aparecimento de um tão grande número de raios está no fato de muitos deles retornarem a superfície de observação em posições muito distanciadas da posição do receptor, produzindo um alto valor para Δx . Outra razão, está na possibilidade do algoritmo tomar como coordenada x de chegada do raio aquela correspondente à saída do raio, da região delimitada do modelo por uma borda diferente da superfície de observação, isto confundiria e atrasaria o processo iterativo de convergência. É possível ainda observar que o modelo cria duas famílias de raios, podendo ser difícil sair de uma para ir para outra na qual encontra-se o raio solução. Entretanto, tal problema não foi encontrado de modo mais sério nos modelos aqui estudados. Mas, se, por hipótese, deparássemos com tal situação, uma estratégia de resolução do problema, poderia ser a escolha, aleatória ou não, de um novo vetor vagarosidade na fonte, isto quando um alto número de iterações revelasse um indício da divergência do método na busca do raio solução.

2.2.6 Modelo M_{IV}

O campo de velocidade M_{IV} obedece a uma função da forma:

$$V_4 = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cz + dx^2 + ez^2 + fxz}}, \quad (2.54)$$

onde, os valores escolhidos para os parâmetros foram os seguintes: $a = 0,3395 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0561 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,5227 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0066 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$; $e = 0,4143 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $f = -0,0249 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$. O modelo M_{IV} está representado na Figura 2.24.

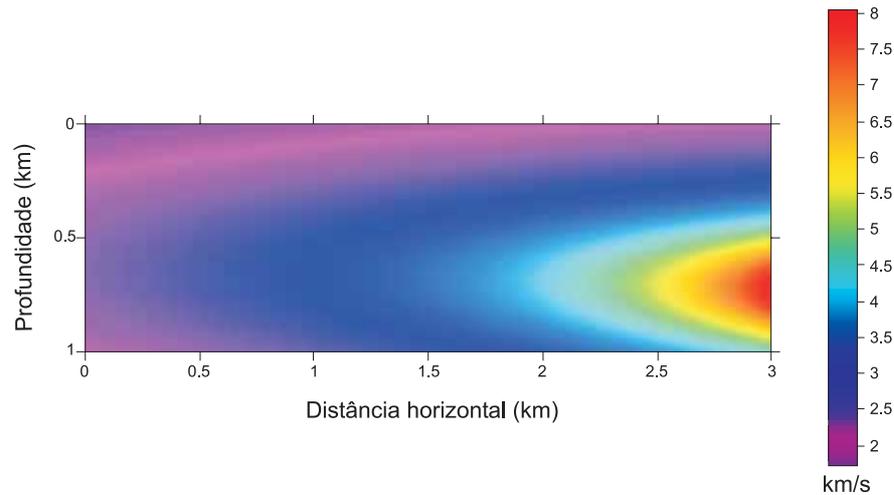


Figura 2.24: M_{IV} : campo de velocidade V_4 com $a = 0,3395 \text{ s}^2\text{km}^{-2}$; $b = -0,0561 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $c = -0,5227 \text{ s}^2\text{km}^{-3}$; $d = 0,0066 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$; $e = 0,4143 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$ e $f = -0,0249 \text{ s}^2\text{km}^{-4}$.

Do ponto de vista geológico, M_{IV} pode ser interpretado como a metade superior de um domo salino.

Para M_{IV} , temos:

$$U = \begin{bmatrix} d & \frac{f}{2} \\ \frac{f}{2} & e \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

e, então, sendo

$$Q_2 = \tau I + \frac{\tau^3}{3!}U + \frac{\tau^5}{5!}U^2 + \dots \quad (2.56)$$

temos:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \tau + \frac{\tau^3}{3!}d + \frac{\tau^5}{5!}(d^2 + \frac{f^2}{4}) + \dots & \frac{\tau^3}{3!}\frac{f}{2} + \frac{\tau^5}{5!}\frac{f}{2}(d + e) + \dots \\ \frac{\tau^3}{3!}\frac{f}{2} + \frac{\tau^5}{5!}\frac{f}{2}(d + e) + \dots & \tau + \frac{\tau^3}{3!}e + \frac{\tau^5}{5!}(e^2 + \frac{f^2}{4}) + \dots \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2.2.6.1 Resultados Obtidos para M_{IV}

Apesar de raios não atingirem a superfície, isso não impede a resolução do problema, pois cada traçamento de raio tem um número limite de pontos. Para esse raios que não voltam o Δx é calculado com o último ponto $\vec{X}(\tau)$ do raio. Como podemos ver nas Figuras 2.25, 2.26 e 2.27.

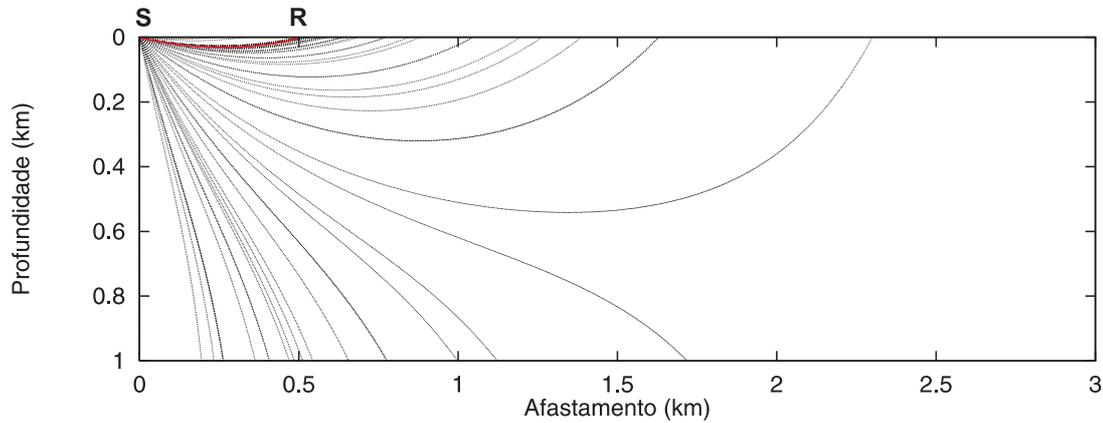


Figura 2.25: A conexão fonte, S , a receptor $R = 0,5 \text{ km}$ foi obtida com cerca de 30 iterações para o modelo M_{IV}

Os raios não chegam a atingir o canto inferior direito do modelo, pois os raios que para lá poderiam se dirigir, se encurvam devido a intensa variação de velocidade encontrada.

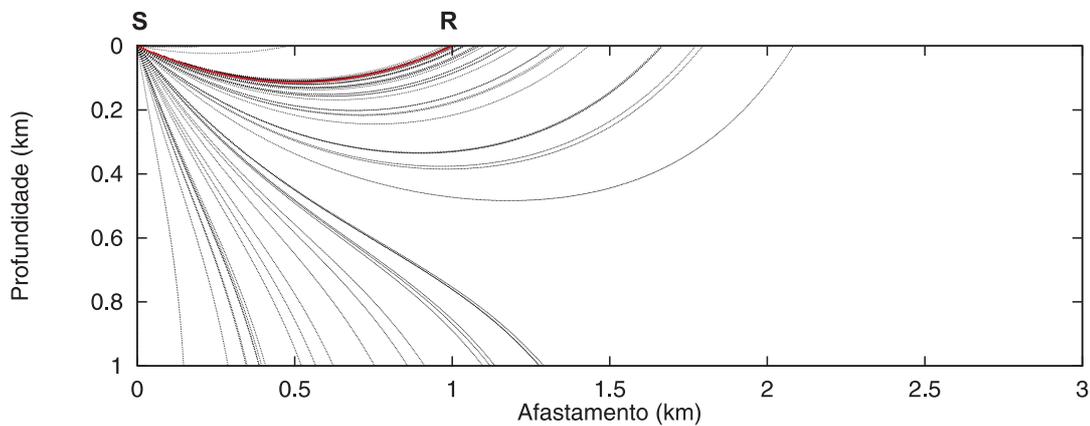


Figura 2.26: Receptor localizado em $R = 1,0 \text{ km}$ é conectado à fonte S com mais de 30 iterações para o modelo M_{IV} .

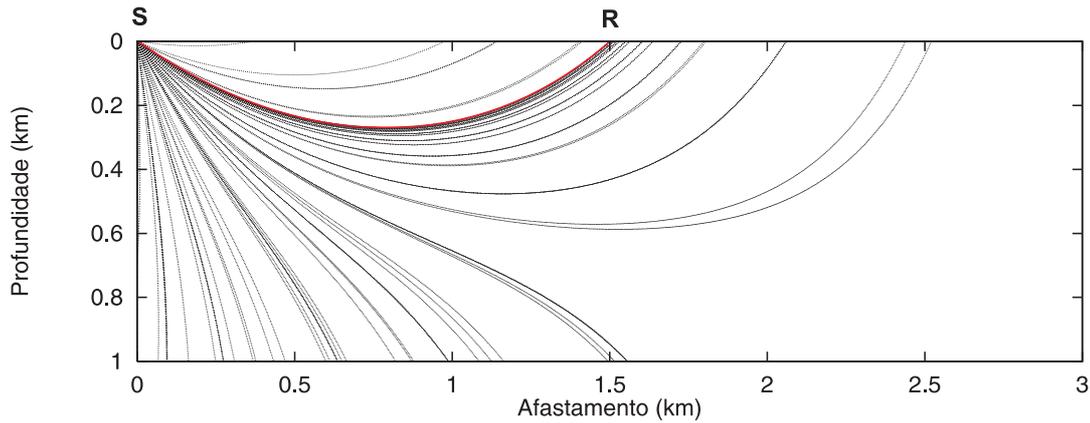


Figura 2.27: Problema de conexão de S a R é resolvido com mais de 30 iterações para o modelo M_{IV}

A alta quantidade de iterações verificadas neste experimento, pode ser conseqüência do fato de alguns raios não retornarem à superfície devido ao não traçamento completo do raio, isto faz com que Δx seja calculado com o x do último ponto do raio parcialmente traçado. Isto confunde o processo iterativo, pois fornece um x que não corresponde à chegada de qualquer raio a este ponto. Entretanto, mesmo com alguns Δx artificiais, o problema não deixa de ser resolvido.

CAPÍTULO 3

CONCLUSÕES

O presente trabalho foi capaz de resolver o problema do traçamento de raios entre dois pontos, para diversos modelos apresentados. Para o primeiro modelo estudado, obtivemos soluções analíticas e numéricas. Foi visto a excelente resolução do problema. Os modelos com campos de velocidades mais simples foram resolvidos pelo método paraxial, com um número reduzido de iterações. Observa-se que para modelos mais complicados, aumenta-se o número de iterações, porém isto não impede a solução do problema, assim como o fato de alguns raios saírem da região delimitada do modelo por uma borda diferente da superfície.

Para o primeiro campo de vagarosidade, trabalhamos com o mesmo modelo M_I , usando apenas métodos diferentes de traçamento. O analítico e o paraxial, sendo que este último resolveu o problema com poucas iterações. Além disso, o modelo paraxial forneceu uma das duas soluções já oferecidas analiticamente.

Já no segundo campo utilizou-se modelos diferentes: o M_{II-A} , que produz um campo parecido com aquele gerado por M_I , e o M_{II-B} que representa um campo bem distinto dos anteriores obtivemos bons resultados em ambos os casos, o método paraxial realizou poucas iterações para resolver o problema.

Em M_{II-B} foi possível observar que o problema foi resolvido mesmo no caso em que raios correntes produzem Δx muito grandes.

No caso de M_{III-A} , que representa um campo de quadrado de vagarosidades com variações linear e vertical quadráticas, o método paraxial foi também bem sucedido na resolução do problema.

Nos casos, M_{III-B} e M_{IV} , apesar de uma grande quantidade de iterações e algumas fugas de raios do modelo, o método conseguiu obter a solução.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a Deus por gozar de plena saúde durante toda minha vida.

À minha família que sempre me apoiou nos momentos mais difíceis. Especificamente a meus pais, Dagoberto M. Lima e Maria de Fátima P. Monteiro, que sempre confiaram na minha escolha, até mesmo no início quando desconheciam a profissão.

À um grande amigo, Alexandre Aquino, que me colocou nesse caminho. Foi através dele que passei a conhecer Geofísica.

Do grupo de colegas do CPGG, existem dois que sempre me ajudaram e nunca viraram as costas: André Eduardo e Fernando Cezar.

À ANP pela bolsa de pesquisa que tive durante meus 2 últimos anos do curso. Este recurso foi importante para a minha permanência na Universidade.

À minha namorada, Denise C. Brandão, que soube compreender certos momentos de agonia.

À Petrobrás pelo grande apoio de seus funcionários, nos capacitando e nos proporcionando uma maior aproximação com a indústria.

Ao grupo de professores do CPGG. Tem um professor que merece um agradecimento à parte, trata-se de Wilson Figueiró, pelos seus conhecimentos, personalidade e caráter.

Referências Bibliográficas

- AKI, K., & RICHARDS, P.G., 1980. Quantitative Seismology: Theory and Method, W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- ČERVENÝ, V., 1987. Ray Method for Three-Dimensional Seismic Modeling. Petroleum Industry Course, The Norwegian Institute of Technology.
- FIGUEIRÓ, W. M, & MADARIAGA, R. I., 1999. Three-dimensional two-point paraxial ray-tracing problem in presence of caustics, 6th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, CDROM, Rio 99, Rio de Janeiro.
- FIGUEIRÓ, W.M., & MADARIAGA, R.I., 2000. A Method to avoid caustic arrival points, 2000 Technical Program Expanded Abstracts, SEG International Exposition and 70th Annual Meeting, Calgary, Alberta, Canada.
- POPOV, M. M., 2002. Ray Theory and Gaussian Beam Method for Geophysicists, Salvador, EDUFBA.
- SHERIFF, R. E., 2002. Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics, 13 Geophysical References Series, Fourth Edition, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, USA.

APÊNDICE A

Verificação de solução da equação que relaciona a perturbação do raio com sua variação

A referida equação é a seguinte:

$$\frac{d}{d\tau}\delta\vec{Y}(\tau) = \Lambda\delta\vec{Y}(\tau), \quad (\text{A.1})$$

tal como apresentada na seção 2.1.

Propondo-se a função

$$\delta\vec{Y}(\tau) = P(\tau, 0).\delta\vec{Y}(0), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$P(\tau, 0) = I_4 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^j}{j!} \Lambda^j, \quad (\text{A.3})$$

é a chamada matriz de propagação

Vamos, primeiramente, verificar se A.2 satisfaz A.1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\delta\vec{Y}(\tau) &= \frac{d}{d\tau}[P(\tau, 0).\delta\vec{Y}(0)] = \frac{d}{d\tau}P(\tau, 0).\delta\vec{Y}(0) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[I_4 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^j}{j!} \Lambda^j \right] .\delta\vec{Y}(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j\tau^{j-1}}{j!} \Lambda^j .\delta\vec{Y}(0) = \\ &= \Lambda \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} \Lambda^{j-1} .\delta\vec{Y}(0) = \Lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^k}{k!} \Lambda^k .\delta\vec{Y}(0) = \\ &= \Lambda \left[I_4 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tau^k}{k!} \Lambda^k \right] .\delta\vec{Y}(0) = \Lambda P(\tau, 0).\delta\vec{Y}(0) = \\ &= \Lambda.\delta\vec{Y}(\tau). \end{aligned}$$

Vemos, então, que $\delta\vec{Y}(\tau)$ é solução de (2.15). Tal verificação é possível graças ao fato de Λ ser dependente diretamente da posição sobre o raio corrente e não do parâmetro τ , que é obtido como função da referida posição.

A unicidade da solução de (A.1) é decorrente da condição inicial

$$\delta\vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta P_x(0) \\ \delta P_z(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Pois, se tivermos duas soluções de A.1, elas devem também satisfazer A.4 e a diferença entre elas deve satisfazer A.1. Além disso, tal diferença, é igual a 0 para $\tau = 0$. Sendo assim, as soluções proposta serão iguais para todo τ . Portanto, se existirem duas soluções, elas coincidirão. Isto prova o caráter único da solução de A.1.

APÊNDICE B

Fluxograma simplificado dos algoritmos implementados

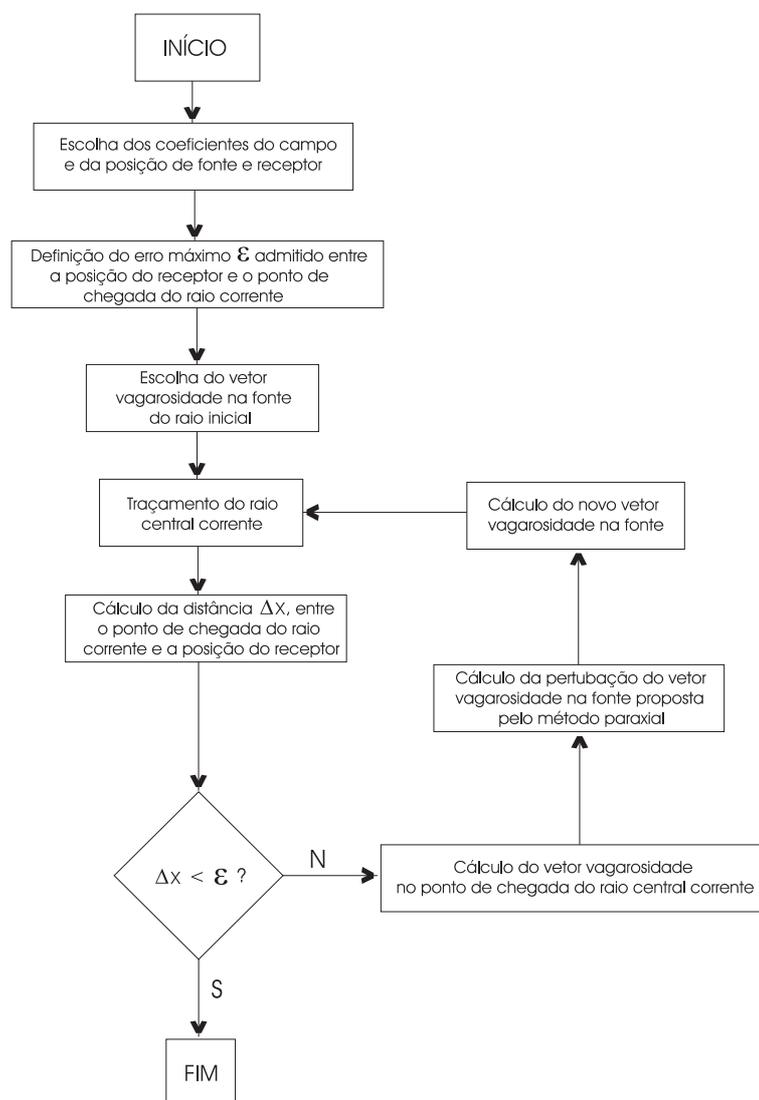


Figura B.1: Fluxograma simplificado dos algoritmos computacionais usados