



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA



GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

SÉRIE ONDALETA HAAR  
BIDIMENSIONAL APLICADA NA  
PARAMETRIZAÇÃO DE CAMPOS DE  
VELOCIDADES SÍSMICAS

KLICIA EGINA SILVA DE OLIVEIRA

SALVADOR – BAHIA

JULHO – 2015



Série Ondaleta Haar Bidimensional Aplicada na Parametrização de Campos de  
Velocidades Sísmicas

por

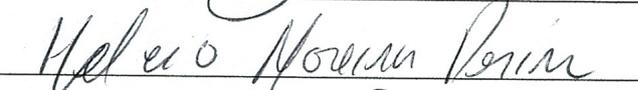
KLICIA EGINA SILVA DE OLIVEIRA

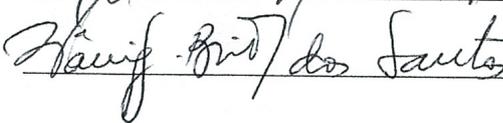
Orientador: Prof. Dr. Wilson Mouzer Figueiró

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA  
DO  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

  
Comissão Examinadora  
Dr. Wilson Mouzer Figueiró

  
Dr. Hécio Moreira Perin

  
Dra. Vânia Gonçalves de Brito dos Santos

Data da aprovação: 16/07/2015

"O proveito da sabedoria  
é que ela dá vida ao seu possuidor."  
Provérbios 7:12b

# RESUMO

Este trabalho desenvolveu e testou a ideia de representação de campos bidimensionais de velocidades sísmicas através da série ondaleta Haar bidimensional. O método apresentado simplifica a estratégia e os passos computacionais usados na parametrização dos referidos campos, quando comparado àqueles métodos utilizados em outros trabalhos onde o mesmo objetivo foi atingido através da parametrização polinomial ou por séries ondaletas 1D.

Consideramos campos de velocidades advindos dos seguintes modelos geológicos: Acamado, Falha Compressional, Falha Distensional, Anticlinal e Domo de Sal. Uma vez discretizados e colocados no modo numérico, os modelos dos campos são aproximados pela série ondaleta Haar bidimensional a fim de gerar os campos parametrizados e estes são apresentados utilizando-se a totalidade dos coeficientes da série e, também, um número selecionado (reduzido) destes coeficientes.

Os resultados da pesquisa indicam que, como previsto, os campos de velocidades são satisfatoriamente parametrizados utilizando a série de ondaletas Haar bidimensional, porém com alto número de coeficientes. A geração de valores de coeficientes através do valor médio destes em subintervalos, por sua vez, permitiu uma diminuição superior a 90% no número total de coeficientes, garantindo a simplificação das representações.

Apesar deste trabalho restringir-se à parametrização de modelos de campos de velocidades sísmicas, os resultados também viabilizam a possibilidade de realização, em trabalhos futuros, de modelagem sísmica com cálculo de tempos de trânsito e traçamento de raios em cada campo parametrizado por série ondaleta. Além disso, a representação com um número reduzido de coeficiente propicia a utilização desta parametrização na inversão sísmica tomográfica e em métodos de migração.

# ABSTRACT

This study developed and tested the idea of representing two-dimensional seismic velocity fields using the two-dimensional Haar wavelet series. The method presented simplifies the strategy and the computing steps used in the parameterisation of the referred fields when compared to methods used in previous studies where the same goal was reached using polynomial or 1D wavelet series parameterisation.

We considered seismic velocity fields obtained from the following geological models: Layered, Compressional Fault, Normal Fault, Anticlinal and Salt Dome. Once the models have been discretised and available numerically, the models of the velocity fields are approximated using the two-dimensional Haar wavelet series algorithm to generate the parameterised fields and the resulting data is presented using a total and reduced number of coefficients in the series.

The research findings indicate that, as predicted, the velocity fields are satisfactorily parameterised using the two-dimensional Haar wavelet series, though the number of coefficients was high. The generation of coefficient values using their average in subintervals, on the other hand, allowed for the reduction in the total number of coefficients by a maximum of 90%, which guarantees the simplification of the representations.

Although this work only deals with the parameterisation of seismic velocity field models, the findings also supported the possibility of expanding the study in the field of seismics through the development of reflection travel time modelling and ray tracing for each velocity field parameterised using the Haar wavelet series; furthermore the representation with a reduced number of coefficients allows for the further development of seismic tomography and migration methods using this parameterisation.

# ÍNDICE

RESUMO . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	iv
ÍNDICE . . . . .	v
ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	vii
INTRODUÇÃO . . . . .	1
<b>CAPÍTULO 1 Fundamentos teóricos . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1 Ondaletas . . . . .	2
1.2 Ondaletas Haar . . . . .	5
1.3 Ondaletas Bidimensionais . . . . .	7
<b>CAPÍTULO 2 Aplicação . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 Imageamento sísmico . . . . .	11
2.2 Modelos geológicos . . . . .	12
2.2.1 Complexidades relacionadas à presença de camadas salinas . . . . .	12
2.2.2 Complexidades relacionadas a dobras e falhas de cavalgamento . . . . .	13
2.2.3 Variações geológicas laterais . . . . .	13
2.3 Aplicação da modelagem sísmica . . . . .	13
2.4 Construção do modelo geológico . . . . .	14
2.5 Parametrização . . . . .	14
<b>CAPÍTULO 3 Metodologia . . . . .</b>	<b>16</b>
3.1 Geração do modelo numérico . . . . .	16
3.2 Diferença relativa entre os campos original e parametrizado . . . . .	18
3.3 Redução de coeficientes segundo critério do valor médio em subintervalos . . . . .	18
3.4 Representação dos modelos . . . . .	19
<b>CAPÍTULO 4 Resultados preliminares . . . . .</b>	<b>21</b>
4.1 Aproximação de uma função . . . . .	21
<b>CAPÍTULO 5 Resultados avançados . . . . .</b>	<b>26</b>

5.1	Campo de velocidades sísmicas do modelo de camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ) . . . . .	26
5.1.1	Parametrizações . . . . .	28
5.1.2	Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos . . . . .	31
5.2	Campo de velocidades sísmicas do modelo de falha compressional ( $M_2$ ) . . . . .	32
5.2.1	Parametrizações . . . . .	33
5.2.2	Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos . . . . .	36
5.3	Campo de velocidades sísmicas do modelo da falha distensional ( $M_3$ ) . . . . .	38
5.3.1	Parametrizações . . . . .	39
5.3.2	Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos . . . . .	42
5.4	Campo de velocidades sísmicas do modelo do anticlinal ( $M_4$ ) . . . . .	43
5.4.1	Parametrizações . . . . .	44
5.4.2	Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos . . . . .	47
5.5	Campo de velocidades sísmicas do modelo do domo de sal ( $M_5$ ) . . . . .	49
5.5.1	Parametrizações . . . . .	50
5.5.2	Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos . . . . .	55
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>Discussão . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>Agradecimentos . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>61</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Representação gráfica da ondaleta-filha Haar, $\phi_{j,k}$ , gerada pela função escala $\phi$ .	6
1.2	Representação gráfica da ondaleta-filha Haar $\psi_{j,k}$ gerada pela função ondaleta $\psi$ .	7
1.3	Representação gráfica da função $\Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y) = \phi_{l,k_1}(x)\phi_{l,k_2}(y)$ .	9
1.4	Representação gráfica da função $\Psi_{j,\mathbf{k}}^h(x, y) = \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$ .	9
1.5	Representação gráfica da função $\Psi_{j,\mathbf{k}}^v(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y)$ .	10
1.6	Representação gráfica da função $\Psi_{j,\mathbf{k}}^d(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$ .	10
3.1	Fluxograma de transformação da imagem do modelo geológico em arquivo de entrada para o algoritmo da série Haar bidimensional.	17
3.2	Modelo geológico com camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ).	17
3.3	Representação do processo de geração de coeficientes através do valor médio em sub-intervalos. Os pontos roxos representam os coeficientes crescentemente ordenados, enquanto que os traços pretos representam os sub-intervalos dentro dos quais os coeficientes serão aproximados pela média. Nesta representação, temos 10 sub-intervalos e, conseqüentemente, 10 valores de coeficientes para a representação usando a série ondaleta Haar bidimensional. Neste trabalho realizamos experimentos de parametrização com: 4, 6, 8, 10, 12 e 100 coeficientes.	19
4.1	Representação em mapa de contorno interpolado da função original $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$ no subdomínio $Q_1$ .	22
4.2	(a) Parametrização da função bidimensional $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$ utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices $l = j_{max} = 1$ ; e, conseqüentemente, $k_1$ e $k_2$ variando em $\{-2, -1, 0, \dots, 5\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio $Q_2$ .	23
4.3	(a) Parametrização da função bidimensional $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$ utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices $l = j_{max} = 3$ e, conseqüentemente, $k_1$ e $k_2$ variando em $\{-8, -7, -6, \dots, 23\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio $Q_2$ .	24

4.4	(a) Parametrização da função bidimensional $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$ utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices $l = j_{max} = 6$ e, conseqüentemente, $k_1$ e $k_2$ variando em $\{-64, -63, -62, \dots, 191\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio $Q_2$ . . . . .	25
5.1	Modelo geológico com camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ). . . . .	27
5.2	Campo numérico de velocidades sísmicas compressionais, $M_{1N}$ , proveniente do modelo, $M_1$ , visto como uma função $V_1(x, z)$ que fornece a velocidade de propagação da onda sísmica no ponto $(x, z)$ do meio. Tal função é representada pela série ondaleta a fim de gerar os campos parametrizados que são a seguir apresentados. . . . .	27
5.3	Modelo parametrizado, $M_{1P_1}$ , obtido através da parametrização de $M_{1N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = -1$ e $j_{max} = -1$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ , respectivamente. Matematicamente, o total de coeficientes é: $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 20 \cdot 9 = 180$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 540$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 160 para coeficientes $c_{l,k}$ e 480 para coeficientes do tipo $d_{j,k}^\mu$ devido ao valor diferenciado de $k_{2max}$ . . . . .	29
5.4	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{1P_1}$ e o original numérico $M_{1N}$ . . . . .	29
5.5	Modelo parametrizado, $M_{1P_2}$ , obtido através da parametrização de $M_{1N}$ utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com $l = 0$ e $j_{max} = 0$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 39\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 16\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 680$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 2040$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	30
5.6	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{1P_2}$ e o original numérico $M_{1N}$ . . . . .	30
5.7	Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado $M_{1P_2}$ com variação na quantidade dos valores de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100. . . . .	31
5.8	Modelo geológico de falha compressional, $M_2$ (Soares Filho et al., 2002) . . . . .	32
5.9	Modelo numérico $M_{2N}$ para o campo de velocidades $V_2(x, z)$ utilizado na geração dos campos parametrizados. . . . .	33

5.10	Modelo parametrizado $M_{2P_1}$ obtido através da parametrização de $M_{2N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = -1$ e $j_{max} = -1$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 24\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 14\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 375$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 1125$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 336 para coeficientes $c_{l,k}$ e 1008 para coeficientes do tipo $d_{j,k}^\mu$ devido ao valor diferenciado de $k_{1_{max}}$ e $k_{2_{max}}$ . . . . .	34
5.11	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{2P_1}$ e o original numérico $M_{2N}$ . . . . .	35
5.12	Modelo parametrizado $M_{2P_2}$ obtido através da parametrização de $M_{2N}$ utilizando a série de ondaletas Haar bidimensional com $l = 0$ e $j_{max} = 0$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 48\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 28\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 1421$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 4263$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	35
5.13	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{2P_2}$ e o original numérico $M_{2N}$ . . . . .	36
5.14	Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado $M_{2P_2}$ com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100. . . . .	37
5.15	Modelo geológico da falha distensional, $M_3$ (Soares Filho et al., 2002). . . . .	38
5.16	Campo numérico $M_{3N}$ para o campo de velocidades $V_3(x, z)$ utilizado na geração dos campos parametrizados. . . . .	39
5.17	Modelo parametrizado $M_{3P_1}$ obtido através da parametrização de $M_{3N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = -1$ e $j_{max} = -1$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 448$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 1344$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	40
5.18	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{3P_1}$ e o original numérico $M_{3N}$ . . . . .	40
5.19	Modelo parametrizado $M_{3P_2}$ obtido através da parametrização de $M_{3N}$ utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com $l = 0$ e $j_{max} = 0$ . Então, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 63\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 27\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 1792$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 5376$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	41
5.20	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{3P_2}$ e o original numérico $M_{3N}$ . . . . .	41

5.21	Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado $M_{3P_2}$ com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100. . . . .	42
5.22	Modelo geológico do anticlinal, $M_4$ (Teixeira et al., 2000) . . . . .	43
5.23	Modelo numérico $M_{4N}$ para o campo de velocidades $V_4(x, z)$ utilizado na geração dos campos parametrizados. . . . .	43
5.24	Modelo parametrizado $M_{4P_1}$ obtido através da parametrização de $M_{4N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = -1$ e $j_{max} = -1$ . Sendo assim, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 30\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 18\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 589$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 1767$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 540 para coeficientes $c_{l,k}$ e 1620 para coeficientes do tipo $d_{j,k}^\mu$ devido ao valor diferenciado de $k_{1_{max}}$ e $k_{2_{max}}$ . . . . .	45
5.25	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{4P_1}$ e o original numérico $M_{4N}$ . . . . .	46
5.26	Modelo parametrizado $M_{4P_2}$ obtido através da parametrização de $M_{4N}$ utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com $l = 0$ e $j_{max} = 0$ . Então, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 60\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 36\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 2257$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 6771$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	46
5.27	Diferença relativa entre os campos parametrizado $M_{4P_2}$ e o original numérico $M_{4N}$ . . . . .	47
5.28	Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado $M_{4P_2}$ com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100. . . . .	48
5.29	Modelo geológico do domo de sal, $M_5$ (McGraw Hill Companies, Inc). . . . .	49
5.30	Campo numérico $M_{5N}$ para o campo de velocidades dado pela função $V_5(x, z)$ utilizado na geração dos campos parametrizados. . . . .	50
5.31	Modelo parametrizado $M_{5P_1}$ obtido através da parametrização de $M_{5N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = -1$ e $j_{max} = -1$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 26\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 972$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 2916$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	51
5.32	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{5P_1}$ e o original numérico $M_{5N}$ . . . . .	52

5.33	Modelo parametrizado $M_{5P_2}$ obtido através da parametrização de $M_{5N}$ utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com $l = 0$ e $j_{max} = 0$ . Logo, $k_1$ e $k_2$ variam em $\{0, 1, 2, \dots, 71\}$ e $\{0, 1, 2, \dots, 53\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é: $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 3888$ para $c_{l,k}$ e $3 \cdot N_c = 11664$ para $d_{j,k}^\mu$ , onde $N_c$ é o número de coeficientes do tipo $c_{l,k}$ . . . . .	53
5.34	Diferença relativa entre os modelos parametrizado $M_{5P_2}$ e o original numérico $M_{5N}$ . . . . .	54
5.35	Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado $M_{5P_2}$ com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100. . . . .	56

# INTRODUÇÃO

O método sísmico é a técnica da geofísica de exploração que permite a investigação das condições em subsuperfície utilizando ondas sísmicas emitidas na superfície. A modelagem sísmica simula computacionalmente o processo de propagação de ondas oriundas de fontes sísmicas, que atravessam corpos geológicos em subsuperfície e que têm suas chegadas registradas em receptores. A qualidade da resposta sísmica sintética está parcialmente relacionada ao tipo de parametrização dos campos de velocidades advindos dos modelos geológicos considerados na modelagem.

O problema da parametrização envolve a descrição de funções relativamente complexas utilizando parâmetros relacionados a elementos de uma base de funções mais simples. As ondaletas são funções matemáticas que possibilitam a análise de cada porção do sinal com resolução equivalente à sua escala (Chui, 1992) e, neste contexto, permitem a análise de informação que contenha descontinuidades ou picos abruptos (*spikes*).

Diversos autores consideraram a questão da representação de campos de velocidades sísmicas utilizando variadas técnicas de parametrização, dentre elas: a polinomial (de Souza, 2004), a por séries trigonométricas (dos Santos, 2002) e empregando séries ondaletas 1D (Cerqueira, 2013; Martinez, 2012; Bastos, 2013). As limitações e dificuldades inerentes a essas parametrizações incluem a determinação de coeficientes e a utilização de malhas de funções 1D nos campos bidimensionais para sua representação por série ondaleta 1D. A utilização da série ondaleta bidimensional proposta nesse trabalho permite a parametrização de campos bidimensionais eliminando a utilização de malhas.

O presente trabalho investiga a possibilidade de utilização da série ondaleta Haar bidimensional na parametrização de uma ampla gama de modelos geológicos representando complexidades comumente encontradas na geologia. Além disso, buscamos também verificar a oportunidade de reduzir o número de coeficientes totais a fim de simplificar a parametrização.

Iniciamos a discussão com uma análise do arcabouço teórico utilizado na parametrização. Vemos como o conceito de série ondaleta Haar bidimensional é usado na representação de funções. Em seguida consideramos campos de velocidade provenientes de modelos geológicos, objetos da parametrização, e como estes se localizam no âmbito da parametrização. Apresentamos, então, a metodologia usada para a aplicação da série ondaleta na parametrização dos campos considerados e os resultados obtidos. Para concluir, discutimos tais resultados e a possibilidade de expansão do tema em trabalhos posteriores.

# CAPÍTULO 1

## Fundamentos teóricos

Neste capítulo apresentamos as bases teóricas da série ondaleta Haar bidimensional. Estes fundamentos serão aplicados na parametrização dos campos de velocidades sísmicas.

### 1.1 Ondaletas

As ondaletas são uma classe específica de funções utilizadas para localizar outras funções mais gerais no espaço e na escala. São consideradas ferramentas matemáticas poderosas na representação de formas de onda para análise do comportamento da frequência no tempo (Gomes, 1999). Uma família de ondaletas pode ser construída a partir de uma função  $\psi(t)$ , conhecida como ondaleta mãe ou função ondaleta, usando uma expansão em série infinita de versões dilatadas e transladadas desta função, multiplicada por um coeficiente apropriado de modo a cobrir  $\mathbb{R}$  (Chui, 1997). A partir da ondaleta mãe,  $\psi(t)$ , tal família é dada por:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (1.1)$$

onde geralmente consideramos  $a = 2^{-j}$ ,  $b = k2^{-j}$  e  $j, k \in \mathbb{Z}$ , que gera a seguinte expressão:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Os termos  $2^{-j}$  e  $k2^{-j}$  correspondem a uma dilatação binária e uma translação diádica, respectivamente. Como visto em inúmeros trabalhos sobre a série ondaleta, a translação diádica permite que uma única função de decaimento rápido gere  $L^2(\mathbb{R})$ , enquanto que a dilatação binária permite a representação de ondas com frequências particionadas em bandas (ou "oitavas") (Chui, 1992).

Dentre as condições que podem ser impostas à ondaleta  $\psi$  básica, uma das mais interessantes é termos uma base de funções  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}\}$  ortonormal e de suporte compacto, que permita a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada ondaleta (Chui, 1992; Chui, 1997; Morettin, 1999). Assim, considerando-se

a ortonormalidade da base, podemos escrever a série ondaleta, para qualquer função,  $f(t)$ , quadrado integrável sobre  $\mathbb{R}$  tal como:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1.3)$$

onde

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

e seus coeficientes são dados por:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (1.5)$$

pois

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}; \quad (1.6)$$

sendo

$$\delta_{j,l} = \begin{cases} +1, & \text{se } j = l \\ 0, & \text{se } j \neq l. \end{cases} \quad (1.7)$$

Além disso, a relação de Parseval é válida e tida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \sum_j \sum_k c_{j,k}^2. \quad (1.8)$$

Algumas propriedades satisfeitas por  $\psi$  são as seguintes:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$  (admissibilidade ou média zero);
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < +\infty$  (energia finita);
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ , onde  $\psi(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(t)$  e  $\psi(0) = 0$ ; e
4. Os primeiros  $(r - 1)$  momentos de  $\psi$  anulam-se, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, r - 1,$$

para algum  $r \geq 1$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t^r \psi(t)| dt < \infty.$$

Quanto maior o valor de  $r$ , mais suave será a função ondaleta  $\psi$ .

Podemos usar uma *função escala* ou *ondaleta-pai*  $\phi$  para gerar ondaletas filhas. Tal função é uma solução da equação:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k l_k \phi(2t - k), \quad (1.9)$$

onde

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (1.10)$$

Com  $\phi(t)$  pode-se construir uma base ortonormal dada por:

$$\{\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (1.11)$$

que gera o  $L^2(\mathbb{R})$ , que é o espaço das funções quadrado integrável definidas em  $\mathbb{R}$ .

Assim  $\psi$  pode ser obtida de  $\phi$  por:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k), \quad (1.12)$$

onde o coeficiente  $h_k$  é dado pela Eq. (1.13), que é conhecida por *quadrature mirror filter relation*:

$$h_k = (-1)^k l_{1-k}. \quad (1.13)$$

Os coeficientes  $h_k$  e  $l_k$  (*quadrature mirror filters*) são usados para calcular a transformada ondaleta discreta, onde os  $h_k$ 's são chamados coeficientes do filtro passa-alto (*high-pass*) e os  $l_k$ 's são os do filtro passa-baixo (*low-pass*). O coeficiente  $h_k$  é dado por:

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (1.14)$$

As Eqs. (1.9) e (1.12) são chamadas *equações de dilatação* das ondaletas.

Considerando-se o sistema ortonormal

$$\{\phi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t); j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (1.15)$$

pode-se escrever para qualquer  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  a seguinte série:

$$f(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1.16)$$

onde

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j_0,k}(t) dt, \quad (1.17)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (1.18)$$

Nesta expressão, o índice  $j_0$  corresponde à escala de mais baixa resolução (*coarsest resolution*).

## 1.2 Ondaletas Haar

A ondaleta utilizada neste trabalho foi proposta por Alfréd Haar (Haar, 1910). Ele utilizou essas ondaletas como exemplo de um sistema ortonormal para o espaço de funções quadrado integrável no intervalo  $[0, 1]$ . A ondaleta Haar é ortogonal e de suporte compacto, além de ser o exemplo mais simples e antigo de ondaleta e é dada por:

$$\psi^H(t) = \begin{cases} +1, & \text{se } 0 \leq t < 1/2; \\ -1, & \text{se } 1/2 \leq t < 1; \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Para esta última, a função escala é dada por:

$$\phi^H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \text{ e} \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (1.20)$$

Sendo assim, temos:

$$\psi_{j,k}^H(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k+1/2) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k+1/2) \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (1.21)$$

e

$$\phi_{j,k}^H(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (1.22)$$

Omitindo-se o símbolo “H” de identificação da ondaleta Haar, a função escala satisfaz a seguinte equação:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t-1), \quad (1.23)$$

assim,  $l_0 = l_1 = 1/\sqrt{2}$  e para o filtro passa-alta,  $h_0 = -h_1 = 1/\sqrt{2}$ .

As Figs. 1.1 e 1.2 ilustram as ondaletas-filhas Haar,  $\phi_{j,k}$  e  $\psi_{j,k}$ , respectivamente, geradas pela função escala,  $\phi$ , e pela função ondaleta,  $\psi$ .

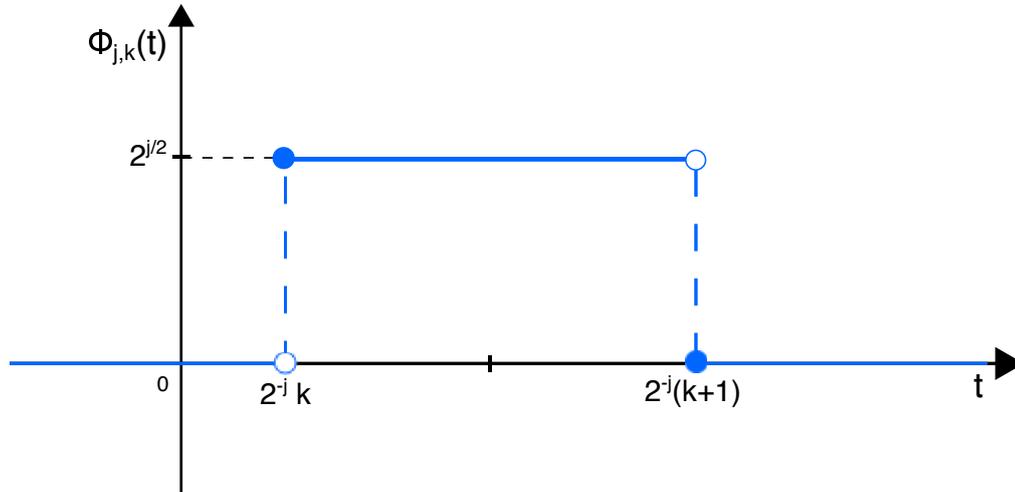


Figura 1.1: Representação gráfica da ondaleta-filha Haar,  $\phi_{j,k}$ , gerada pela função escala  $\phi$ .

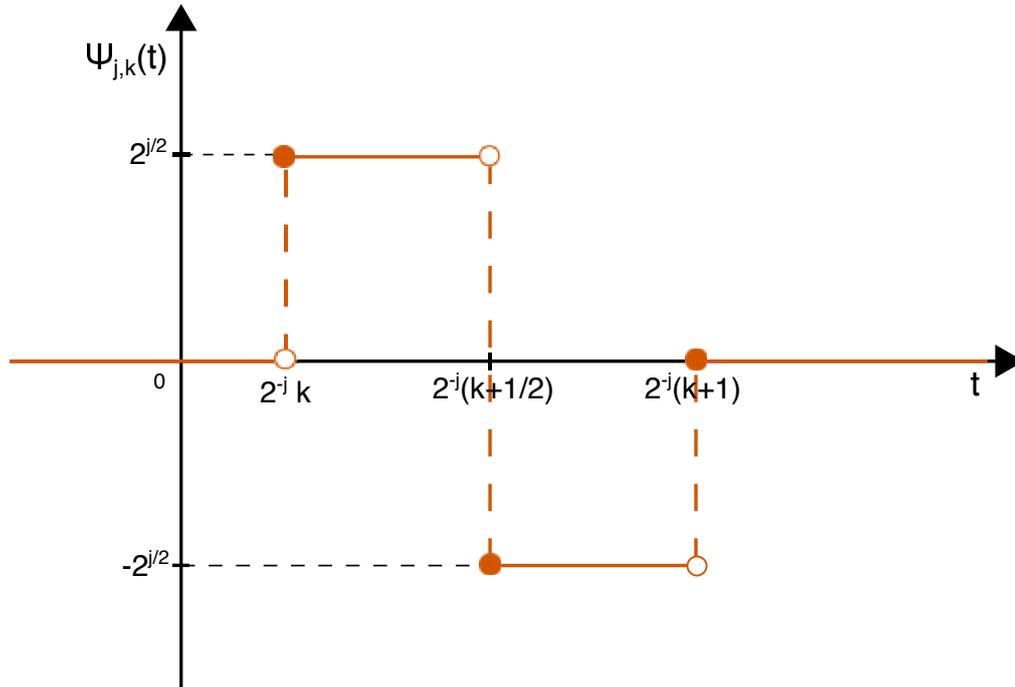


Figura 1.2: Representação gráfica da ondaleta-filha Haar  $\psi_{j,k}$  gerada pela função ondaleta  $\psi$ .

### 1.3 Ondaletas Bidimensionais

Para estimar o espectro, dependente do tempo, de um processo não-estacionário,  $f(t, \omega)$ , que é uma função de duas variáveis, o tempo ( $t$ ) e a frequência ( $\omega$ ), podemos construir bases ondaletas usando duas possibilidades (Moretti, 1999; Antoine et al., 2004; Foufoula-Georgiou e Kumar, 1994):

1. Construir uma base 2D, a partir da análise de multirresolução de duas bases unidimensionais;
2. Construir uma base 2D como o produto tensorial de duas bases 1D com escalas distintas para cada dimensão.

Neste trabalho, aplicamos a segunda possibilidade para representação de funções bidimensionais. Para maior compreensão desta possibilidade expandimos o seu desenvolvimento. Consideramos  $L^2(U)$ , onde  $U = [0, 1]$ , e supomos que temos uma base ortonormal ondaleta de suporte compacto, como a ondaleta Haar, gerando este espaço. Como antes,  $V_j$  e  $W_j$  são gerados pelas ondaletas  $\phi_{j,k}$  e  $\psi_{j,k}$ , respectivamente. Além disso, uma das condições para a formação desse espaço é dada por:

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}, \quad (1.24)$$

ou seja, à medida que a resolução aumenta ( $j \rightarrow \infty$ ), a aproximação converge para a função original, uma vez que  $V_j \subset V_{j+1}$ . Para o espaço  $L^2$  temos que:

$$L^2(U \times U) = L^2(U^2) = \overline{\bigcup_{j=l}^{\infty} V_j \otimes V_j} \quad (1.25)$$

e podemos construir uma base para  $L^2(U^2)$  usando os produtos tensoriais de bases 1D,  $\{\phi_{l,k}, \psi_{j,k}, j \geq l, k\}$  (Morettin, 1999).

Tal base é, aqui, dada por:

$$\mathcal{B} = \{\Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y)\}_{\mathbf{k}} \cup \{\Psi_{j,\mathbf{k}}^{\mu}(x, y)\}_{j \geq l, \mathbf{k}, \mu}, \quad (1.26)$$

onde  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  e  $\mu \in \{h, v, d\}$ . Assim, para o caso bidimensional, temos uma função escala e três funções ondaletas distintas na: horizontal ( $h$ ), vertical ( $v$ ) e diagonal; ( $d$ ) dadas por:

$$\begin{cases} \Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y) = \phi_{l,k_1}(x)\phi_{l,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^h(x, y) = \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^v(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^d(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y). \end{cases} \quad (1.27)$$

A Fig. 1.3 apresenta graficamente a função  $\Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y)$ . As Figs. 1.4, 1.5 e 1.6 apresentam a representação gráfica das funções  $\Psi_{j,\mathbf{k}}^h(x, y)$ ,  $\Psi_{j,\mathbf{k}}^v(x, y)$  e  $\Psi_{j,\mathbf{k}}^d(x, y)$ .

A função escala representa a parte suave e as funções ondaletas representam os detalhes: horizontal, vertical e diagonal.

Sendo assim, uma função  $f(x, y)$  de  $L^2(U^2)$  pode ser descrita como:

$$f(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} c_{l,\mathbf{k}} \Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y) + \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=h,d,v} d_{j,\mathbf{k}}^{\mu} \Psi_{j,\mathbf{k}}^{\mu}(x, y), \quad (1.28)$$

com os coeficientes ondaletas dados por:

$$c_{l,\mathbf{k}} = \int_{U^2} f(x, y) \Phi_{l,\mathbf{k}}(x, y) dx dy, \quad (1.29)$$

$$d_{j,\mathbf{k}}^{\mu} = \int_{U^2} f(x, y) \Psi_{j,\mathbf{k}}^{\mu}(x, y) dx dy. \quad (1.30)$$

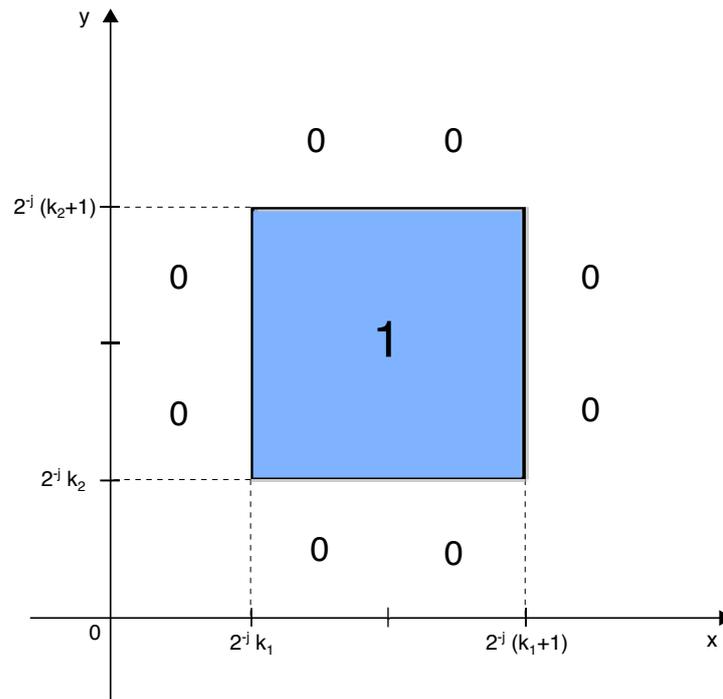


Figura 1.3: Representação gráfica da função  $\Phi_{l,k}(x, y) = \phi_{l,k_1}(x)\phi_{l,k_2}(y)$ .

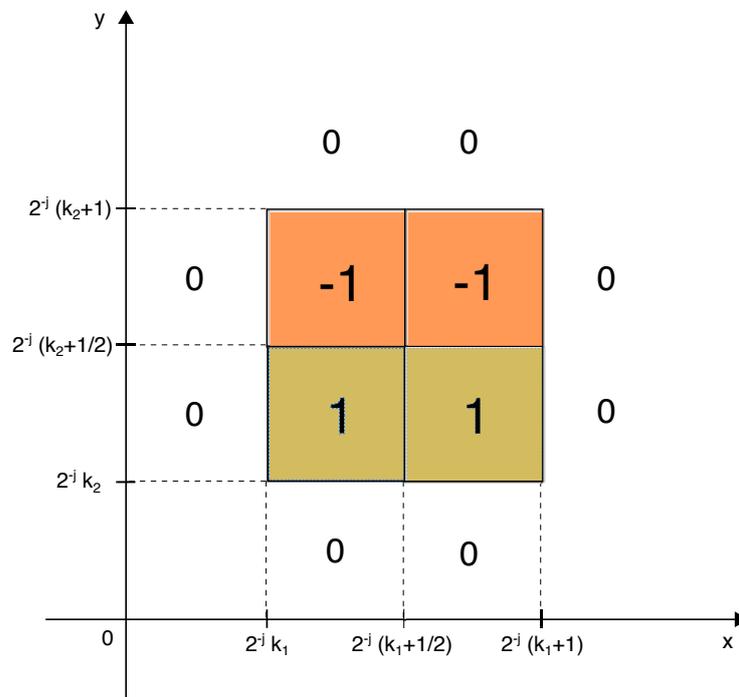


Figura 1.4: Representação gráfica da função  $\Psi_{j,k}^h(x, y) = \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$ .

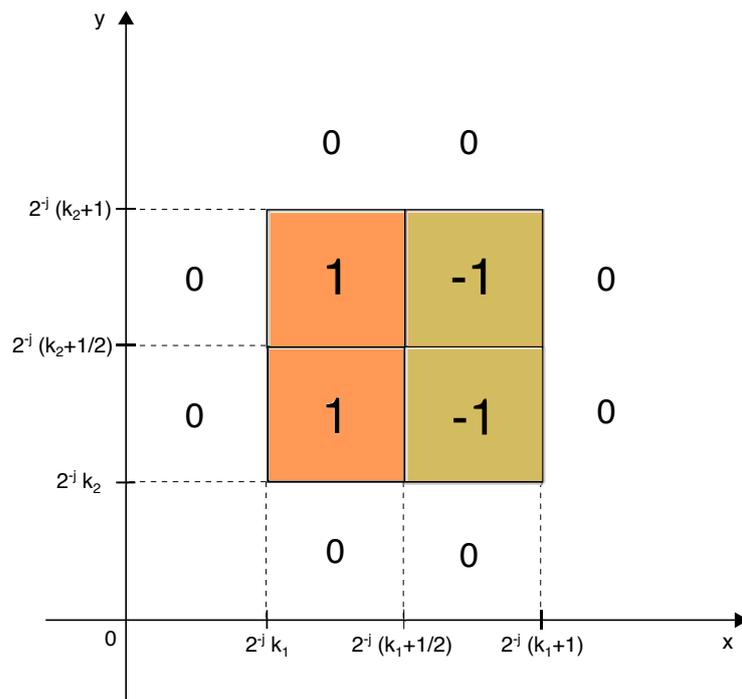


Figura 1.5: Representação gráfica da função  $\Psi_{j,\mathbf{k}}^v(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y)$ .

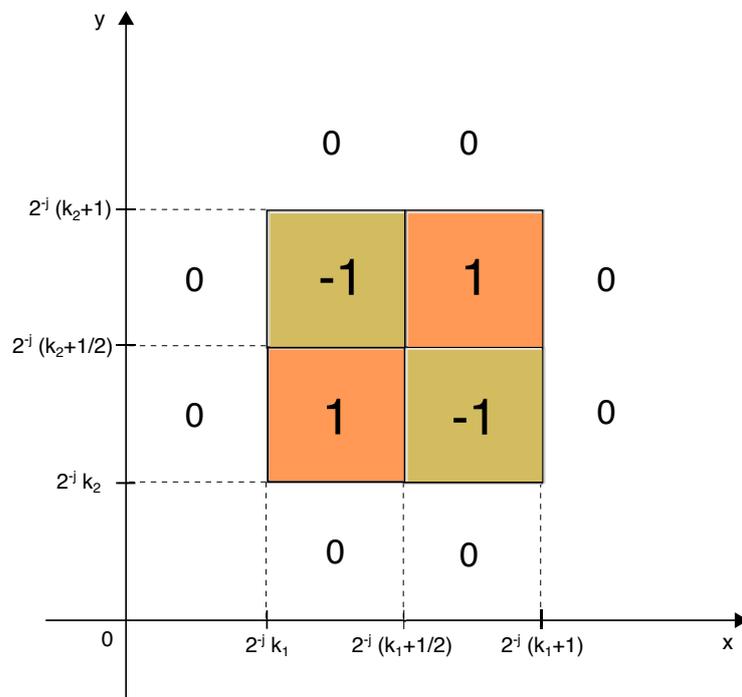


Figura 1.6: Representação gráfica da função  $\Psi_{j,\mathbf{k}}^d(x, y) = \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)$ .

# CAPÍTULO 2

## Aplicação

Este capítulo faz um esboço de possíveis aplicações da série ondaleta Haar 2D na sísmica. Tais aplicações não são desenvolvidas neste trabalho e aqui faz-se apenas uma síntese visando contextualizar o tema do trabalho com os assuntos e problemas que despertam grandes interesses na sísmica. Além disso, analisamos os campos de velocidades sísmicas como objeto de estudo final e alvo da aplicação da série ondaleta, sua importância e a terminologia necessária para sua análise.

Utilizamos a série ondaleta, dada pela Eq. (1.28), para representação de funções bidimensionais. A partir desta equação buscamos provar que é possível representar funções matemáticas contínuas de duas variáveis e aplicar tal resultado para representar campos de velocidades sísmicas 2D sem recorrer a malhas de parametrização 1D.

### 2.1 Imageamento sísmico

Levantamentos sísmicos de reflexão são técnicas geofísicas bastante utilizadas e conhecidas. Dado o atual avanço tecnológico e computacional do método, é possível produzir seções sísmicas que revelam detalhes das estruturas geológicas de subsuperfície em escala de algumas dezenas de metros.

Imagens sísmicas do interior da Terra são cruciais para a indústria de petróleo e gás. A obtenção de imagens sísmicas de estruturas de subsuperfície, nas quais as interfaces podem não ser horizontais e a velocidade de propagação das ondas acústicas muda lateralmente, é um grande desafio, já que óleo e gás tendem a se acumular em locais de maior complexidade geológica (Yilmaz, 2001). Em particular, armadilhas (ou trapas) de petróleo ocorrem com frequência ao redor de corpos salinos que podem ter formas complicadas e velocidades acústicas tipicamente altas em relação às rochas circundantes.

Os equipamentos básicos para um levantamento sísmico de reflexão são: uma fonte de ondas acústicas impulsiva, alguns receptores (geofones) e um sistema de visualização de formas de onda multicanal. Uma linha de levantamento é definida ao longo da superfície e as ondas enviadas pela fonte se separam em ondas: refletidas, refratadas, transmitidas, convertidas e

difratadas a cada descontinuidade do meio em subsuperfície. Em um levantamento sísmico marinho, por exemplo, a primeira descontinuidade é o fundo do mar. Os receptores gravam as amplitudes das ondas refletidas que os atingem numa dada posição em cada instante de tempo e estes registros são chamados de dados sísmicos (Kearey et al., 2002).

Uma parte dos dados sísmicos são registros das amplitudes da onda acústica descrita pela seguinte equação (Cerveny, 2001):

$$\Delta P(x, y, z; t) = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, y, z; t), \quad (2.1)$$

onde  $v(x, y, z)$  é a velocidade de propagação da onda acústica no ponto  $(x, y, z)$  do meio. A função  $P(x, y, z; t)$  representa a pressão exercida pela passagem da onda no ponto  $(x, y, z)$  no instante  $t$ . Neste trabalho consideramos somente os dados sísmicos oriundos de ondas do tipo acústico e nos referimos a  $v(x, y, z)$  como a *velocidade sísmica compressional*.

## 2.2 Modelos geológicos

*Modelo geológico* é uma representação espacial da distribuição de sedimentos e rochas em subsuperfície de acordo com determinadas propriedades que estas apresentam (Alaei, 2012). Neste trabalho, lidamos com modelos geológicos que descrevem a distribuição de rochas de acordo com as velocidades sísmicas das ondas acústicas, tipicamente consideradas no método sísmico.

Uma vez que temos um modelo geológico podemos aplicar a computação numérica para obter respostas sísmicas para esse modelo, e a qualidade destas respostas dependerá da complexidade do modelo. O termo “complexo” é utilizado para configurações geológicas que não são facilmente imageadas (Fagin, 1991).

As complexidades em subsuperfície complicam a propagação das ondas e variam a depender do tipo de rocha e de padrões estruturais dominantes. Entre as diversas configurações geológicas, as estruturas relacionadas a formações salinas, dobras e falhas de cavalgamento proporcionam os maiores desafios para a simulação computacional da propagação ondulatória comparadas a outras configurações mais simples. Daí nosso interesse em parametrizar campos de velocidades advindos de modelos geológicos visando, em última análise, melhorar o imageamento em bacias destes tipos.

### 2.2.1 Complexidades relacionadas à presença de camadas salinas

A estrutura complexa de alto contraste de velocidade da rocha salina com os sedimentos das rochas encaixantes em configurações geológicas relacionadas a camadas salinas é um

grande desafio para a maioria dos algoritmos de imageamento sísmico. A relação sinal ruído é geralmente baixa na vizinhança dos corpos salinos e em particular abaixo do sal. A propagação da onda sísmica em regiões de alto contraste de velocidade e grande complexidade estrutural está associada com muitas fases de onda inclusive reflexões primárias, difrações e difrações refletidas. A parametrização ondaleta pode ser usada na modelagem sísmica que por sua vez tem tido papel relevante no planejamento de levantamentos sísmicos acurados e para melhorar fluxos de processamento.

### **2.2.2 Complexidades relacionadas a dobras e falhas de cavalgamento**

Dobras e falhas de cavalgamento, como as associadas às cordilheiras Andinas e das Montanhas Rochosas, são dominadas por uma série de falhas e unidades rochosas de alto mergulho. A geometria das estruturas rochosas, a complexidade composicional interna das rochas, o alto mergulho das interfaces separadoras das camadas, e falhas associadas a dobras complicam a propagação das ondas. O imageamento destas regiões frequentemente falha quando testado em poços. Devido à variação da velocidade de propagação ondulatória e a complexidade estrutural, os raios curvam-se e obtemos curvas de tempos de chegadas hiperbólicas e outras de maior complexidade.

### **2.2.3 Variações geológicas laterais**

As variações litológicas dentro de unidades de rochas pode causar forte variação lateral de velocidades que podem estar associadas com estruturas relativamente simples. Apesar disso, a propagação de ondas sísmicas nestas configurações é complexa.

## **2.3 Aplicação da modelagem sísmica**

A modelagem sísmica é útil em um leque de aplicações em sismologia e tem um papel importante em praticamente todos os aspectos da sísmica, como aquisição de dados sísmicos, processamento, interpretação e caracterização de reservatórios. A modelagem aumenta a confiabilidade da análise de dados sísmicos.

Na aquisição sísmica a modelagem reduz o risco da exploração, uma vez que fornece informações quantitativas para a geometria do arranjo que possibilita levantamentos mais apropriados. Em áreas de configurações geológicas complexas a modelagem pode ser utilizada para testar diferentes parâmetros de aquisição e modelos de subsuperfície para formular uma estratégia ótima de coleta de dados. Os resultados de estudos de iluminação e traçamento de raios são especialmente úteis à aquisição sísmica.

Durante o processamento, a modelagem sísmica tem sido usada para testar variados algoritmos e fluxos de processamento e, principalmente, calibrar métodos de migração.

Além disso, a modelagem pode ser utilizada na interpretação sísmica para comparar a resposta sintética de um modelo geológico com dados reais, o que facilita o trabalho de interpretação (Zhou, 2014). Uma aplicação é o desenvolvimento de modelos geológicos para investigar problemas estruturais e estratigráficos encontrados durante a interpretação e verificar sua validade.

## 2.4 Construção do modelo geológico

Fagin (1991) propôs uma série de perguntas a serem feitas para evitar erros causados na construção de modelos impróprios. Estas questões, sobre o modelo, são:

- Ele deve ser 2D ou 3D?
- Qual deve ser o seu tamanho?
- Quantas e quais superfícies devem estar nele inclusas?
- Onde suas propriedades (velocidade sísmica ou densidade) deverão ser obtidas?
- Como estas propriedades devem variar entre suas interfaces?
- Qual o seu grau de complexidade (estrutural ou estratigráfico) a ser representado?

O processo de construção inicia-se com a geometria do modelo e é seguido pelo estabelecimento de suas propriedades, como velocidade e densidade, através de suas várias unidades. A presença de horizontes, desconformidades, falhas, dobras e outros componentes geológicos é determinada com base nos objetivos geológicos e pelo grau de dificuldade oferecido à modelagem.

Neste trabalho escolhemos lidar com modelos 2D cujas distâncias são dadas em unidades de quilômetros representando diversas complexidades geológicas, do modelo acamadado levemente inclinado ao modelo típico de formações salinas. A propriedade a ser representada em nossos modelos é a velocidade sísmica compressional variando descontinuamente e com graus de complexidade estrutural e estratigráfico diversos.

## 2.5 Parametrização

A parametrização é o método pelo qual os processos físicos considerados importantes de um dado fenômeno são representados por modelos numéricos, especialmente quando este

fenômeno é difícil de ser diretamente modelado (Stensrud, 2007).

Aqui, a parametrização através da série ondaletas é utilizada para representar o campo de velocidades sísmicas proveniente de modelos geológicos escolhidos, visando fornecer uma representação matemática mais simples a campos de velocidades que podem ter expressões de grande complexidade matemática ou, até mesmo, não possuir tais expressões. A série ondaleta busca e possibilita a simplificação da manipulação matemática dos referidos campos.

## CAPÍTULO 3

# Metodologia

Uma vez estabelecida a base teórica, objeto de estudo e valor deste para o campo da sismologia, introduzimos neste capítulo os métodos utilizados na pesquisa.

A representação dos campos de velocidades sísmicas dados é feita considerando-se que estes são do tipo  $V(x, z)$  e podemos fazer a leitura dos valores de cor (escala RGB) por pixel de cada imagem, uma vez que a cada cor esteja atribuída uma velocidade sísmica  $V$ . Após a geração do modelo discretizado aplica-se o algoritmo da série ondaletas bidimensional, Eq. (1.28), de forma a obter a parametrização do modelo por série ondaleta.

É possível então variar o valor máximo de  $j$  e  $l$  para determinar a resolução da representação. O controle de qualidade desta é feito através da análise da diferença relativa entre os campos original e parametrizado.

### 3.1 Geração do modelo numérico

Os modelos foram escolhidos de forma a representar complexidades comuns nas configurações geológicas: falhas, dobras e halocinese. As velocidades são representadas por cores em cada camada do modelo, de forma que cada cor representa uma velocidade. Utilizamos o software ImageMagick (Versão 6.4.1, ImageMagick Studio LLC, 2015) para converter o arquivo de imagem de cada modelo em um arquivo de texto matricial do tipo  $[x, z, RGB]$ .

A partir deste arquivo, cada valor de cor RGB foi substituído por seu valor de velocidade correspondente, de forma que o arquivo de texto de entrada para o algoritmo da série Haar bidimensional equivalente ao modelo numérico é do tipo  $[x, z, V(x, z)]$ . Os valores de pixel em  $(x, z)$  obtidos da conversão inicial foram mantidos para garantir a fidelidade da representação em relação à imagem original do campo de velocidades. A Fig. 3.1 ilustra esse processo, enquanto que a Tabela 3.1 indica como os valores RGB foram convertidos para valores de velocidade tomando o Modelo  $M_1$ , representado na Fig 3.2, como exemplo.

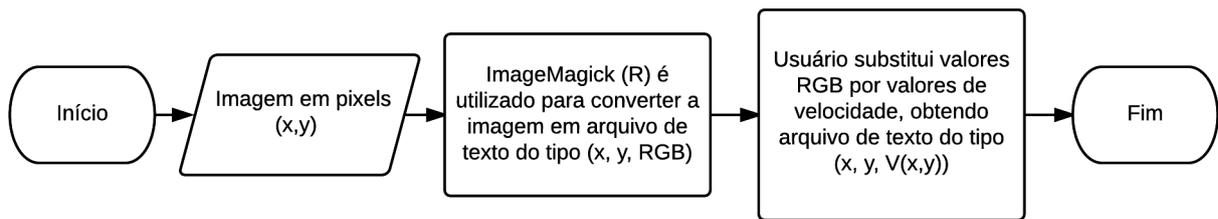


Figura 3.1: Fluxograma de transformação da imagem do modelo geológico em arquivo de entrada para o algoritmo da série Haar bidimensional.

Cor	Valor RGB	Velocidade (km/s)
Azul	137 226 230	1,5
Verde	157 200 157	2,0
Bege	202 196 157	2,8
Vermelho	248 113 138	3,3
Amarelo	230 231 128	4,1

Tabela 3.1: Exemplo de conversão de valores RGB para valores de velocidade utilizando como exemplo o modelo acamado,  $M_1$ , dado na Fig. 3.2.

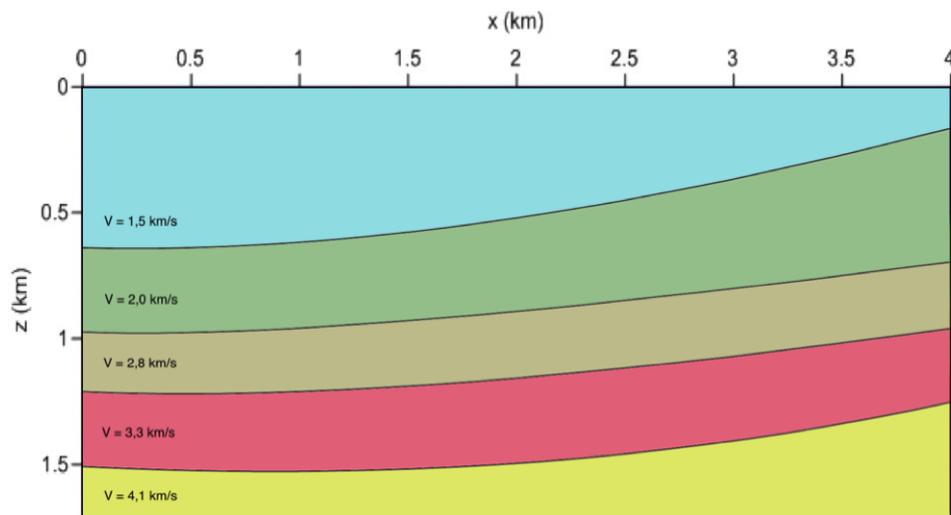


Figura 3.2: Modelo geológico com camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ).

Utilizamos as Eqs. (3.1) e (3.2) para determinar os limites superiores e inferiores de variação de  $k_1$  e  $k_2$ , onde  $k_n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $n \in \{1, 2\}$ . A utilização destas equações leva em consideração, também, facilidades computacionais. O arredondamento aplicado obedeceu às seguintes funções: “int( $r$ )” que fornece o maior inteiro menor ou igual a  $r$  e “INT( $r$ )” que retorna o menor inteiro maior ou igual a  $r$ . Logo,

$$k_{n_{min}} = \text{int} (x_{n_{min}} \cdot 2^j), \quad (3.1)$$

$$k_{n_{max}} = \text{INT} (x_{n_{max}} \cdot 2^j - 1). \quad (3.2)$$

Gerados os documentos de entrada para cada modelo original,  $M_{O_N}$ , a ser parametrizado, aplicamos o algoritmo de implementação da representação de funções bidimensionais utilizando a série ondaletas para valores pré-determinados dos índices  $l$  e  $j_{max}$  (limites inferior e superior de variação do índice  $j$ ), vide a Eq. (1.28). A linguagem de programação utilizada para construção do programa foi o C++.

### 3.2 Diferença relativa entre os campos original e parametrizado

A diferença relativa é utilizada neste trabalho para o controle de qualidade das representações dos campos de velocidades sísmicas escolhidos pela série ondaleta bidimensional. Buscamos, então, uma série que nos proporcione uma representação que possa ser calculada de modo relativamente rápido e robusto, com uma diferença relativa entre os campos original e parametrizado próxima a zero. O cálculo da diferença relativa foi feito utilizando-se a seguinte função:

$$D(x, z) = \left( \frac{V_p(x, z) - V(x, z)}{V(x, z)} \right) \times 100\%, \quad (3.3)$$

sendo  $V(x, z)$  o campo original de velocidades sísmicas e  $V_p(x, z)$  o campo parametrizado. Estes valores são representados visualmente para auxiliar a avaliação das diferenças e suas localizações.

### 3.3 Redução de coeficientes segundo critério do valor médio em subintervalos

Uma grande quantidade de coeficientes é gerada na parametrização de modelos de campos de velocidades de alta complexidade. A fim de proporcionar um menor custo computacional

e simplificação da representação, verificamos a possibilidade de reduzir a quantidade de coeficientes utilizados na parametrização através da obtenção do valor médio dos coeficientes disponíveis em subintervalos.

Uma vez determinado um número de coeficientes  $c_{j,\mathbf{k}}$  e  $d_{j,\mathbf{k}}^u$  aceitável, a redução determina quais valores de coeficientes serão utilizados como valor representativo dos coeficientes para cada sub-intervalo do intervalo de variação dos coeficientes crescentemente ordenados. Isto permite que somente estes valores sejam utilizados na representação. A Fig. 3.3 representa graficamente como se dá a geração de 10 valores de coeficientes em meio à totalidade destes. Neste trabalho reduzimos a: 4, 6, 8, 10, 12 e 100 o número de coeficientes.

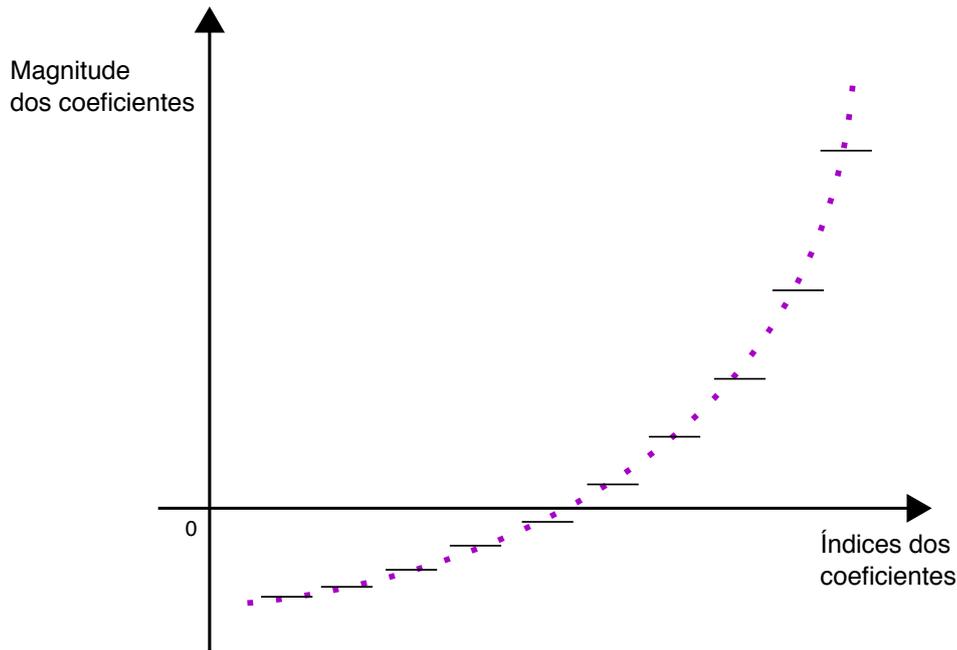


Figura 3.3: Representação do processo de geração de coeficientes através do valor médio em sub-intervalos. Os pontos roxos representam os coeficientes crescentemente ordenados, enquanto que os traços pretos representam os sub-intervalos dentro dos quais os coeficientes serão aproximados pela média. Nesta representação, temos 10 sub-intervalos e, consequentemente, 10 valores de coeficientes para a representação usando a série ondaleta Haar bidimensional. Neste trabalho realizamos experimentos de parametrização com: 4, 6, 8, 10, 12 e 100 coeficientes.

### 3.4 Representação dos modelos

A representação gráfica dos modelos: originais, parametrizados, filtrados e suas diferenças foram realizadas usando o software SURFER 11 (Versão 11.0.642, Golden Software Inc,

2012) que utiliza o método da “krigagem” (também conhecido como “predição Kolmogorov-Wiener”) para interpolar dados.

# CAPÍTULO 4

## Resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos os resultados preliminares de teste da eficiência e acurácia do uso do algoritmo construído a partir da Eq. (1.28) para parametrização de uma função bidimensional conhecida.

### 4.1 Aproximação de uma função

Escolheu-se para teste a função dada pela Eq (4.1):

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + x + y + 1, & \text{se } (x, y) \in Q_1 \\ 0, & \text{se } (x, y) \in Q_2 - Q_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $Q_1 = [0, 2] \times [0, 2]$  e  $Q_2 = [-1, 3] \times [-1, 3]$ .

A Fig. 4.1 representa esta função graficamente em  $Q_1$ . Os intervalos de variação escolhidos foram  $x \in [0, 2]$  e  $y \in [0, 2]$ , porém os intervalos do domínio da função a partir da série ondaleta bidimensional dada nas Figs. 4.2, 4.3 e 4.4 foram estendidos aos intervalos  $x \in [-1, 3]$  e  $y \in [-1, 3]$  para verificar a representação fora dos limites do domínio original da função. A utilização de diferentes valores para os índices  $l$  e  $j_{max}$  permite verificar as mudanças de resolução determinadas por estes.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 representam parametrizações com índices  $l = j_{max} = 1$ ,  $l = j_{max} = 3$  e  $l = j_{max} = 6$ , respectivamente. As diferenças relativas entre a função original e as parametrizações utilizando a série ondaleta com os índices citados também são apresentadas nessas figuras.

Como  $x_{min} = z_{min} = -1$  e  $x_{max} = z_{max} = 3$ , então  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}}$  e  $k_{1_{max}} = k_{2_{max}}$ . Isto é,  $k_1$  e  $k_2$  variam nos mesmos conjuntos. Sendo assim, para

- $j = 1$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^1 \cdot (-1)) = \text{int}(-2) = -2$  e  $k_{1_{max}} = k_{2_{max}} = \text{INT}(2^1 \cdot 3 - 1) = \text{INT}(5) = 5$ ;

- $j = 3$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^3 \cdot (-1)) = \text{int}(-8) = -8$  e  $k_{1_{max}} = k_{2_{max}} = \text{INT}(2^3 \cdot 3 - 1) = \text{INT}(23) = 23$ ;
- $j = 6$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^6 \cdot (-1)) = \text{int}(-64) = -64$  e  $k_{1_{max}} = k_{2_{max}} = \text{INT}(2^6 \cdot 3 - 1) = \text{INT}(191) = 191$ .

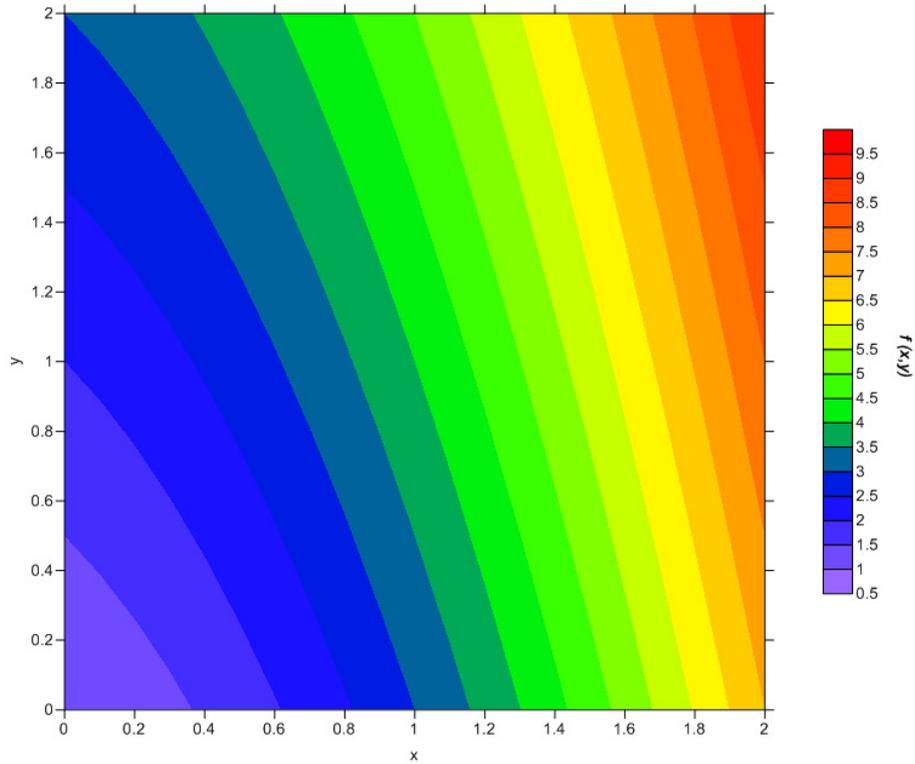
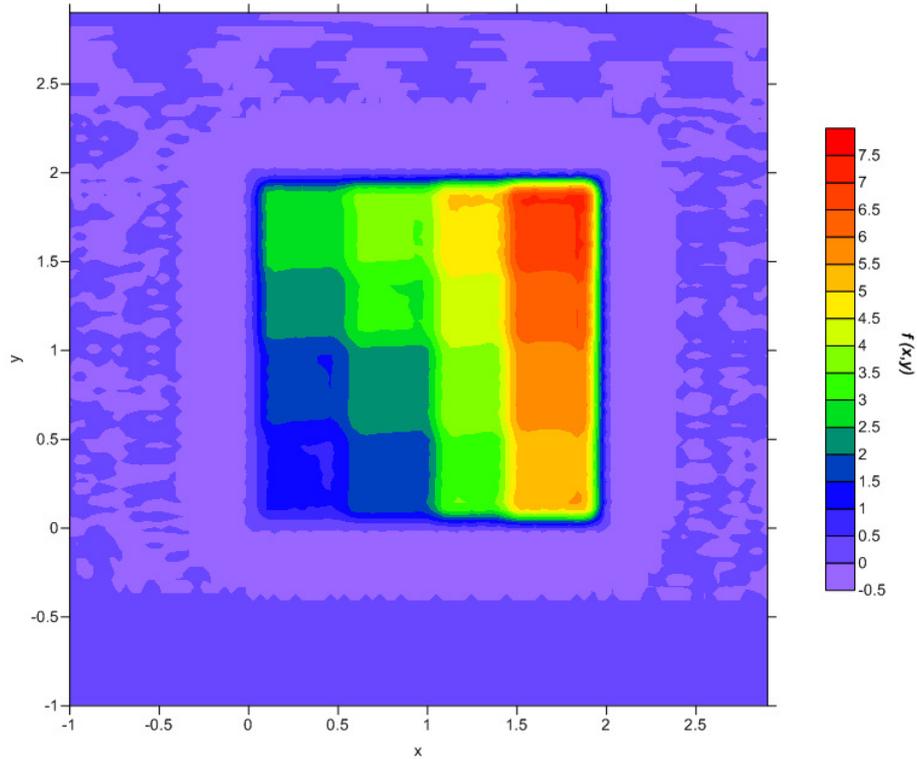
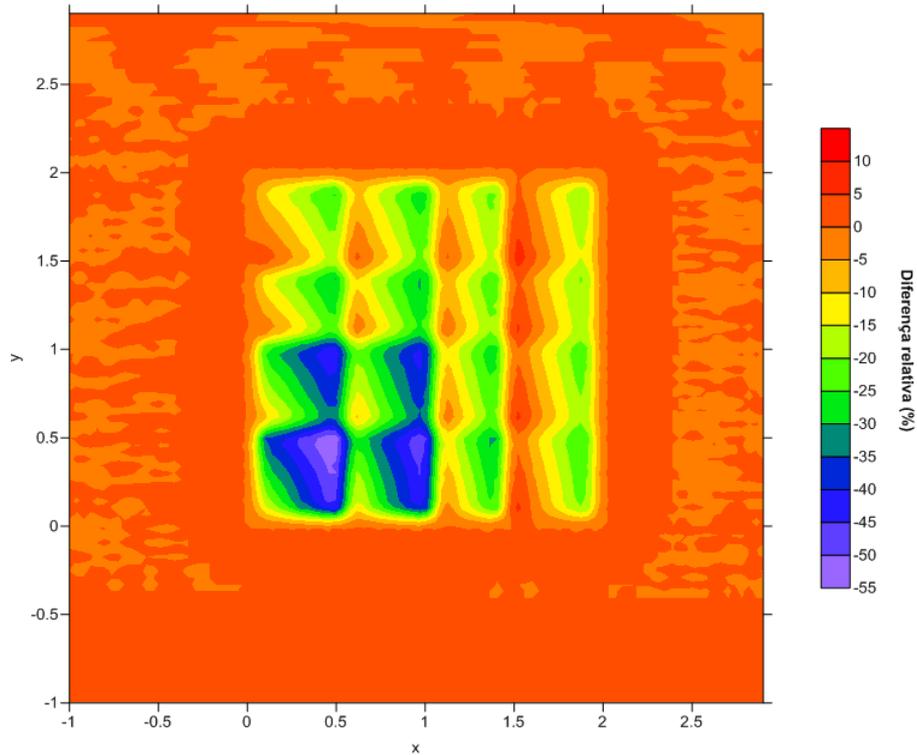


Figura 4.1: Representação em mapa de contorno interpolado da função original  $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$  no subdomínio  $Q_1$ .

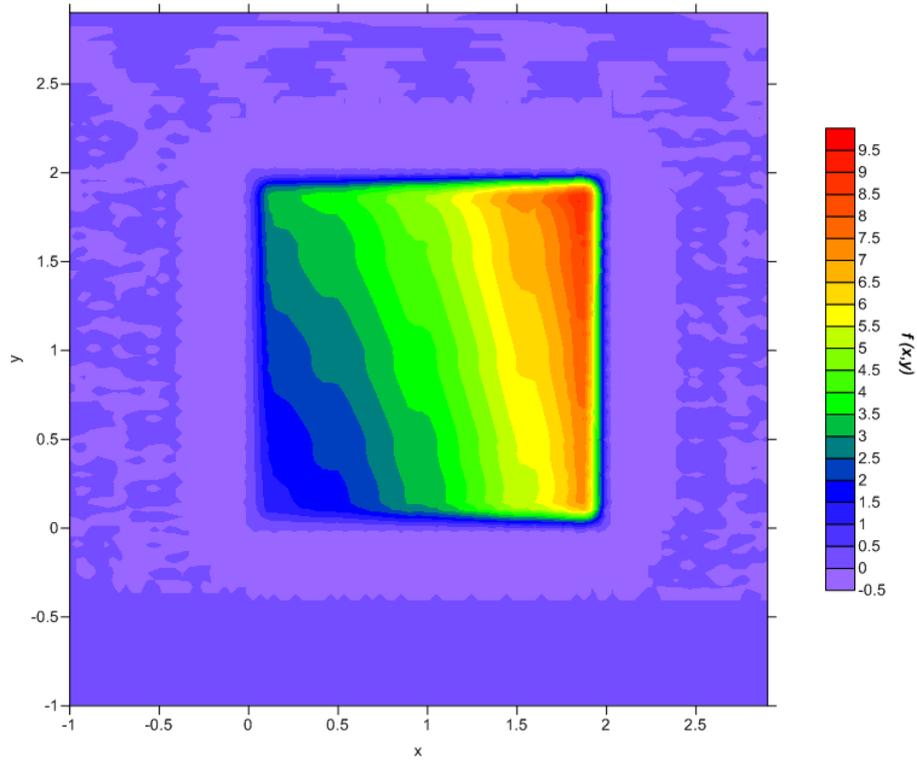


(a)

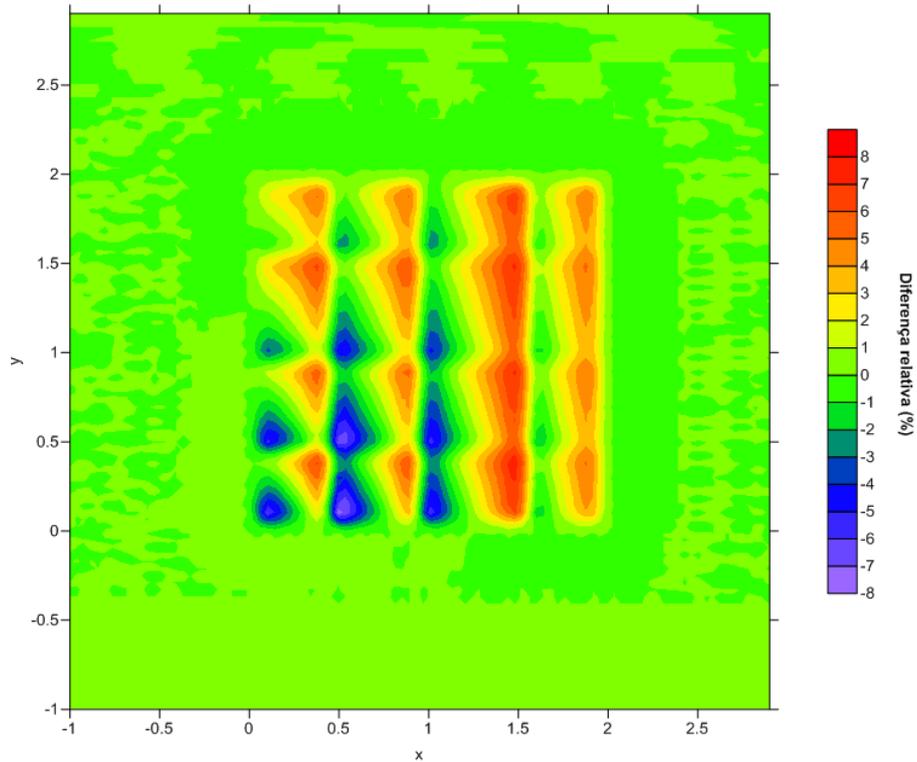


(b)

Figura 4.2: (a) Parametrização da função bidimensional  $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$  utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices  $l = j_{max} = 1$ ; e, conseqüentemente,  $k_1$  e  $k_2$  variando em  $\{-2, -1, 0, \dots, 5\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio  $Q_2$ .

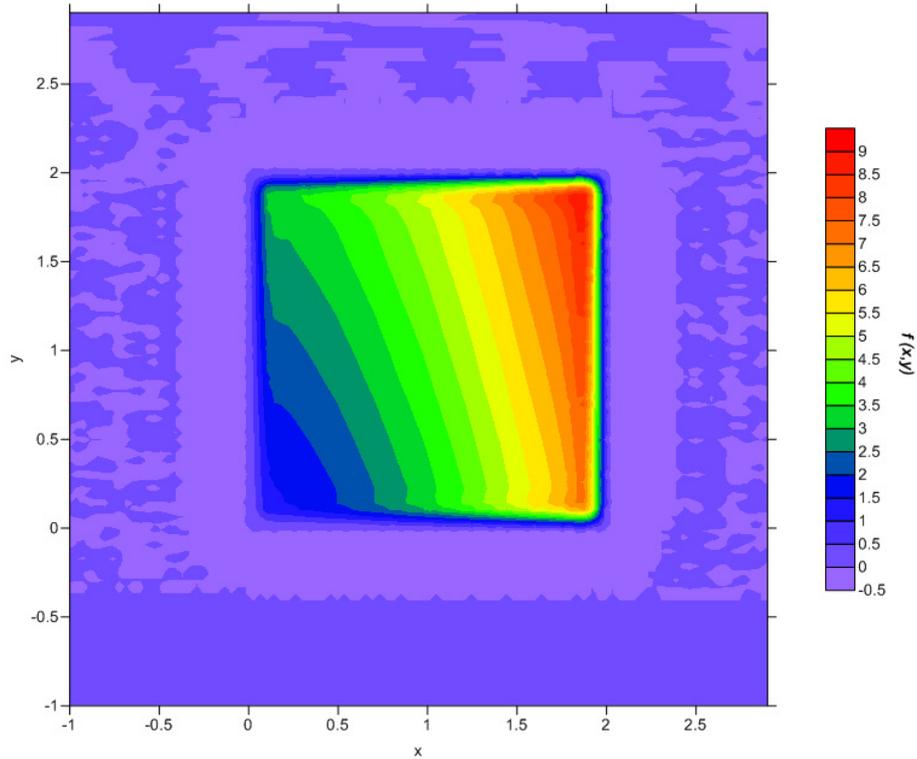


(a)

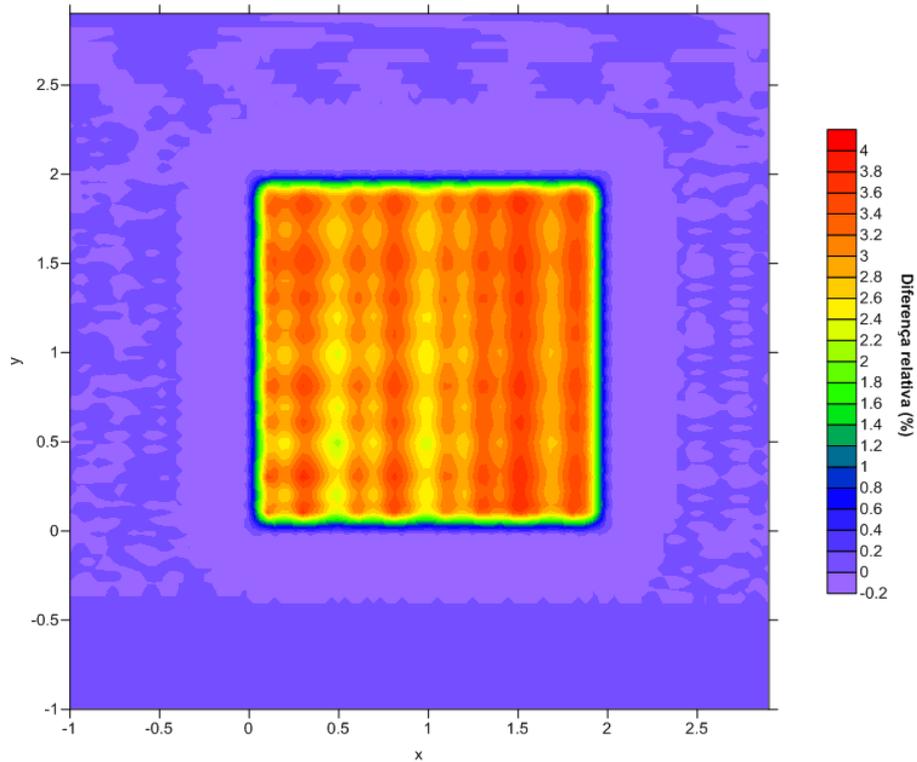


(b)

Figura 4.3: (a) Parametrização da função bidimensional  $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$  utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices  $l = j_{max} = 3$  e, conseqüentemente,  $k_1$  e  $k_2$  variando em  $\{-8, -7, -6, \dots, 23\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio  $Q_2$ .



(a)



(b)

Figura 4.4: (a) Parametrização da função bidimensional  $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$  utilizando a série ondaleta Haar 2D com índices  $l = j_{max} = 6$  e, conseqüentemente,  $k_1$  e  $k_2$  variando em  $\{-64, -63, -62, \dots, 191\}$ ; (b) Diferença relativa entre a função original e a parametrizada utilizando a série ondaleta Haar para o caso aqui ilustrado. Ambas representadas no domínio  $Q_2$ .

## CAPÍTULO 5

### Resultados avançados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos para a parametrização de campos de velocidades sísmicas diversos utilizando a série ondaleta Haar bidimensional e as respectivas reduções de coeficientes.

#### 5.1 Campo de velocidades sísmicas do modelo de camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ )

A Fig. 5.1 representa um modelo constituído por camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ). Partindo-se de  $M_1$ , um campo de velocidades numérico ( $M_{1N}$ ) é construído. Este modelo foi escolhido para o primeiro experimento de parametrização por ser um modelo de relativa simplicidade geológica e por exibir descontinuidades que podem dificultar o reconhecimento geral do modelo parametrizado. O campo numérico  $M_{1N}$ , referente a  $M_1$ , está graficamente representado em suas coordenadas  $(x, z)$  e por valores de velocidade  $V_1(x, z)$  na Fig. 5.2. A extensão horizontal determinada para o campo numérico é de 4,0 km com profundidade de 1,7 km. Entretanto, visando garantir a resolução do modelo no programa desenvolvido, tais distâncias foram consideradas em hectômetros, a saber: 40,0 hm e 17,0 hm, respectivamente.

Variamos os índices  $l$  e  $j_{max}$  nas duas parametrizações de cada campo a fim de verificar mudanças na qualidade da representação do modelo em seus variados aspectos.

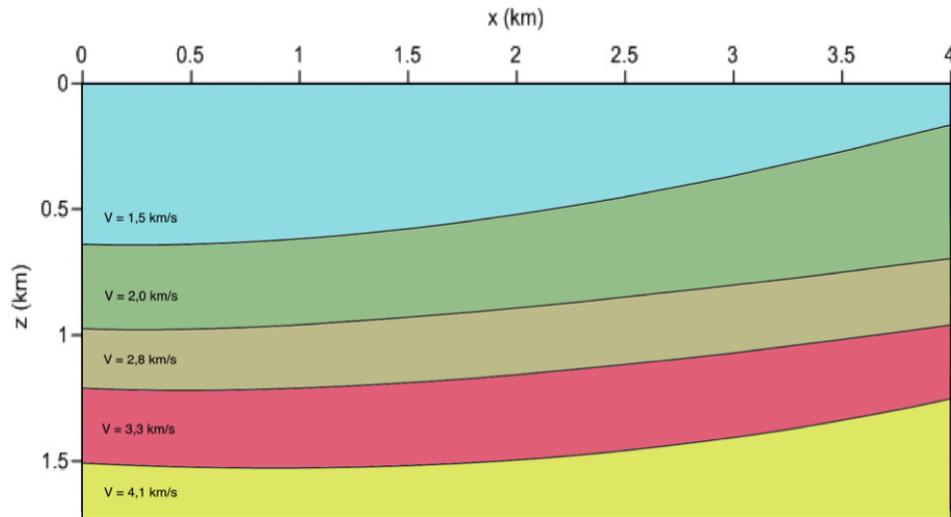


Figura 5.1: Modelo geológico com camadas homogêneas separadas por interfaces curvas ( $M_1$ ).

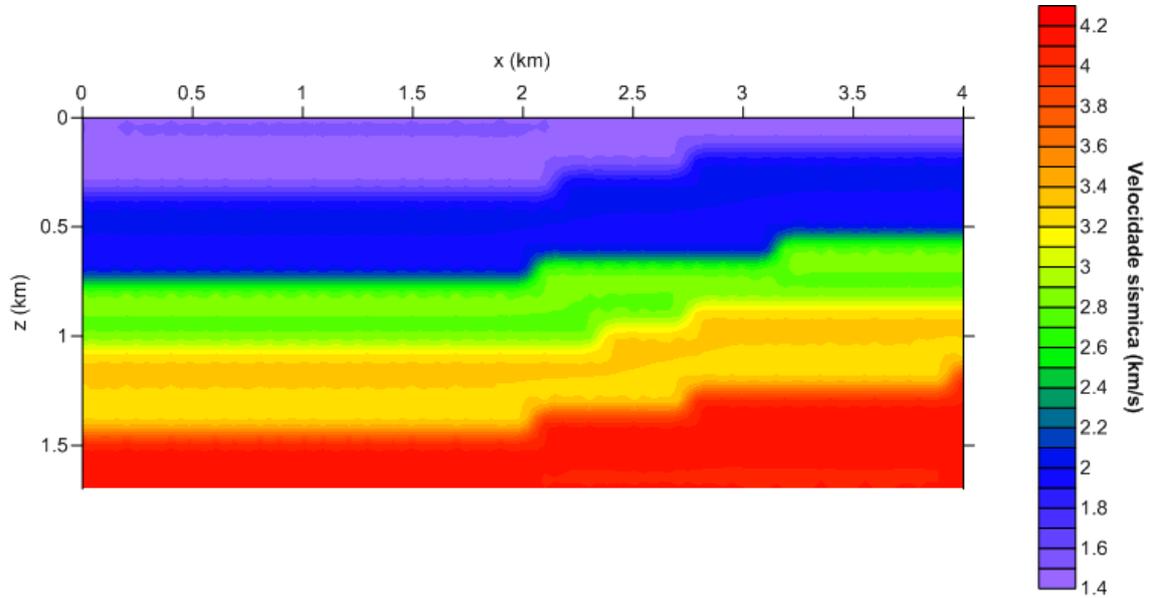


Figura 5.2: Campo numérico de velocidades sísmicas compressoriais,  $M_{1N}$ , proveniente do modelo,  $M_1$ , visto como uma função  $V_1(x, z)$  que fornece a velocidade de propagação da onda sísmica no ponto  $(x, z)$  do meio. Tal função é representada pela série ondaleta a fim de gerar os campos parametrizados que são a seguir apresentados.

### 5.1.1 Parametrizações

A Fig. 5.3 mostra  $M_{1P_1}$  que é a primeira parametrização de  $M_{1N}$  utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com índices  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Daí,  $k_1$  e  $k_2$  são determinados computacionalmente sobre o domínio de definição do campo, tendo suas variações nos conjuntos  $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ , respectivamente. A Fig. 5.4 representa a diferença relativa entre  $M_{1N}$  e  $M_{1P_1}$ .

Apesar das dimensões do modelo serem 4,0 km de extensão horizontal e 1,7 km de profundidade, a parametrização foi realizada considerando distâncias dadas em hectômetro, visando garantir a resolução do modelo no programa desenvolvido. Portanto:  $x_{min} = 0$  hm,  $x_{max} = 40$  hm,  $z_{min} = 0$  hm e  $z_{max} = 17$  hm. Então, para  $j = -1$ , temos:  $k_{1min} = k_{2min} = \text{int}(2^{-1} \cdot 0) = 0$ ,  $k_{1max} = \text{INT}(2^{-1} \cdot 40 - 1) = \text{INT}(19) = 19$  e  $k_{2max} = \text{INT}(2^{-1} \cdot 17 - 1) = \text{INT}(7,5) = 8$ . Entretanto, embora do ponto de vista matemático,  $k_{2max} = 8$ , o programa foi executado com este índice igualado a 7 para evitar acesso a valores não disponíveis da matriz de entrada. Tal aproximação não teve um efeito significativo nos resultados.

A segunda parametrização (Fig. 5.5) foi realizada utilizando-se índices  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 39\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 16\}$ , respectivamente, pois para  $j = 0$ , temos:  $k_{1min} = k_{2min} = \text{int}(2^0 \cdot 0) = 0$ ,  $k_{1max} = \text{INT}(2^0 \cdot 40 - 1) = \text{INT}(39) = 39$  e  $k_{2max} = \text{INT}(2^0 \cdot 17 - 1) = \text{INT}(16) = 16$ . A diferença relativa entre os campos numéricos  $M_{1N}$ , e parametrizado,  $M_{1P_2}$ , é dada na Fig. 5.6.

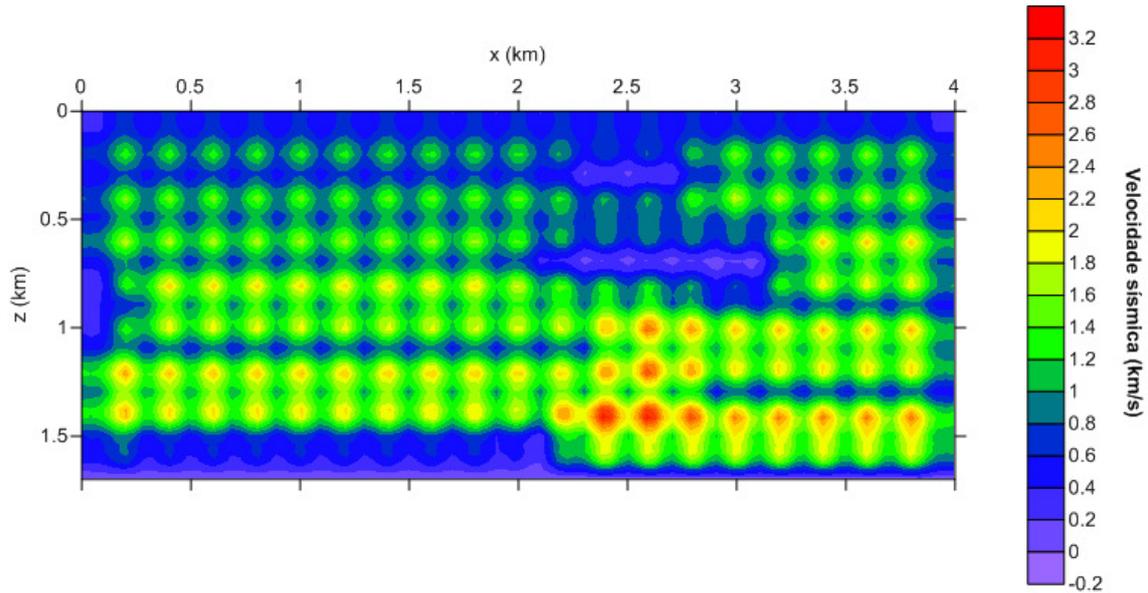


Figura 5.3: Modelo parametrizado,  $M_{1_{P_1}}$ , obtido através da parametrização de  $M_{1_N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ , respectivamente. Matematicamente, o total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 20 \cdot 9 = 180$  para  $c_{l,k}$  e  $3 \cdot N_c = 540$  para  $d_{j,k}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,k}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 160 para coeficientes  $c_{l,k}$  e 480 para coeficientes do tipo  $d_{j,k}^\mu$  devido ao valor diferenciado de  $k_{2_{max}}$ .

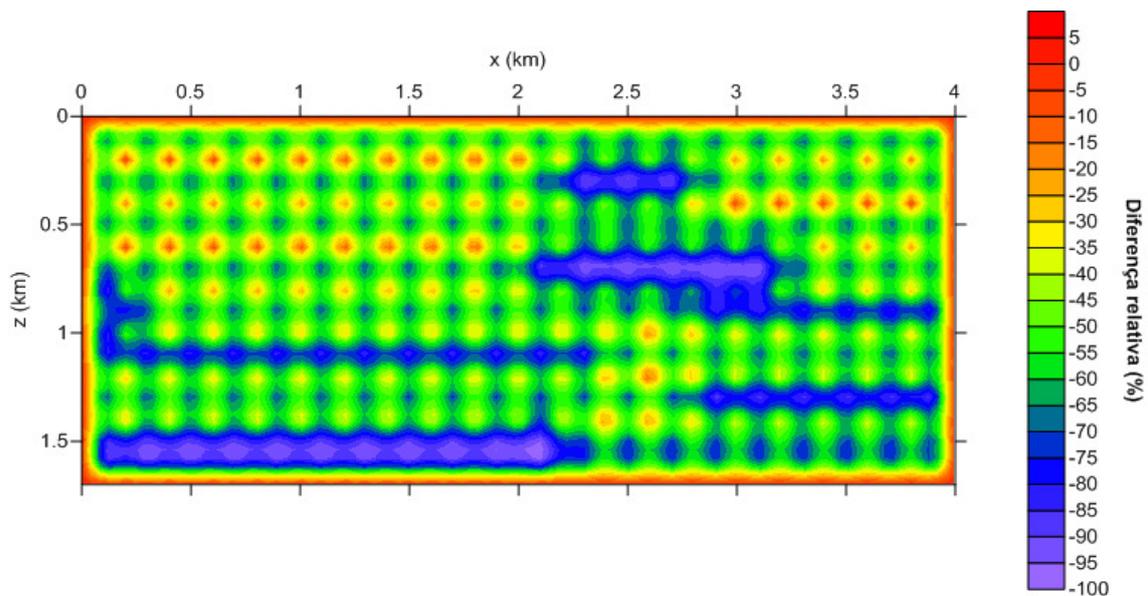


Figura 5.4: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{1_{P_1}}$  e o original numérico  $M_{1_N}$ .

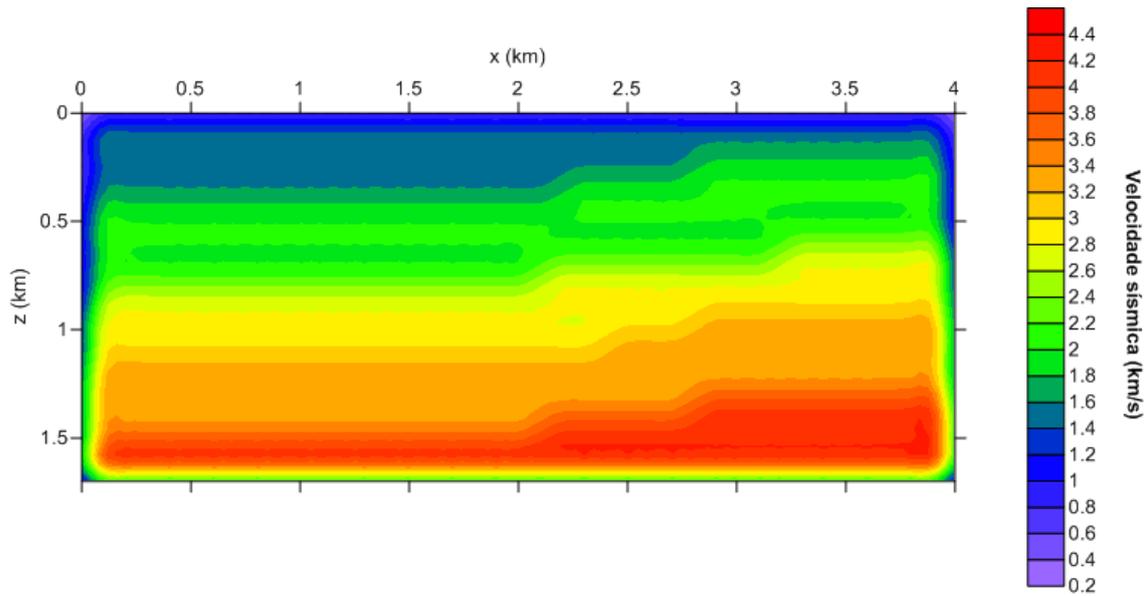


Figura 5.5: Modelo parametrizado,  $M_{1P_2}$ , obtido através da parametrização de  $M_{1N}$  utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 39\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 16\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 680$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 2040$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ .

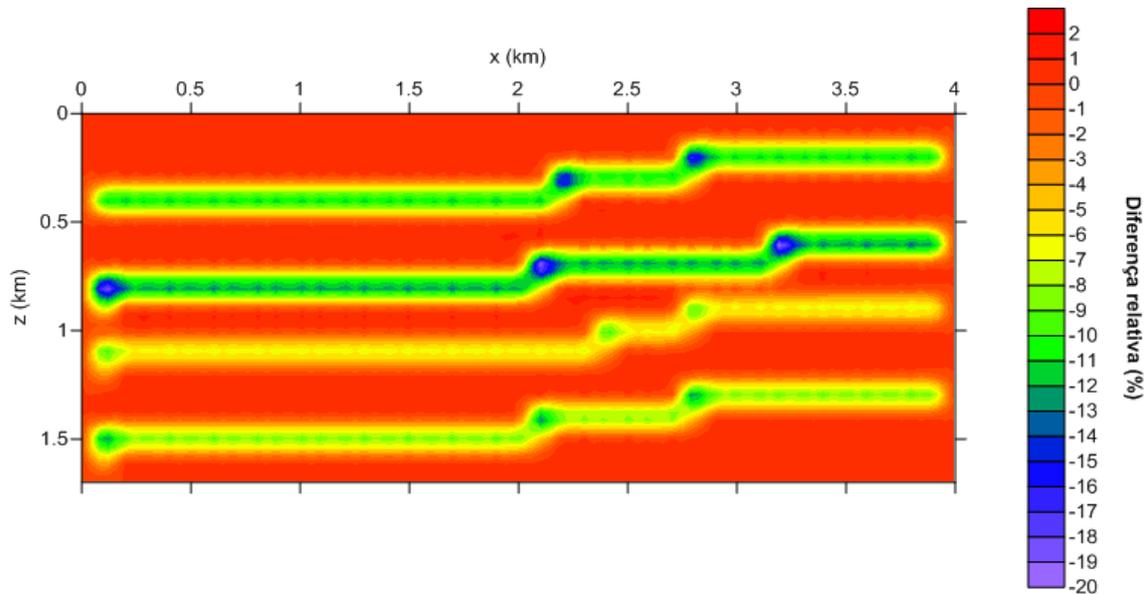


Figura 5.6: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{1P_2}$  e o original numérico  $M_{1N}$ .

### 5.1.2 Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos

Os resultados obtidos após a redução sucessiva de coeficientes pela média nos sub-intervalos para o modelo parametrizado que mais se aproximou do numérico original entre os testados,  $M_{1P_2}$ , estão representados na Fig. 5.7.

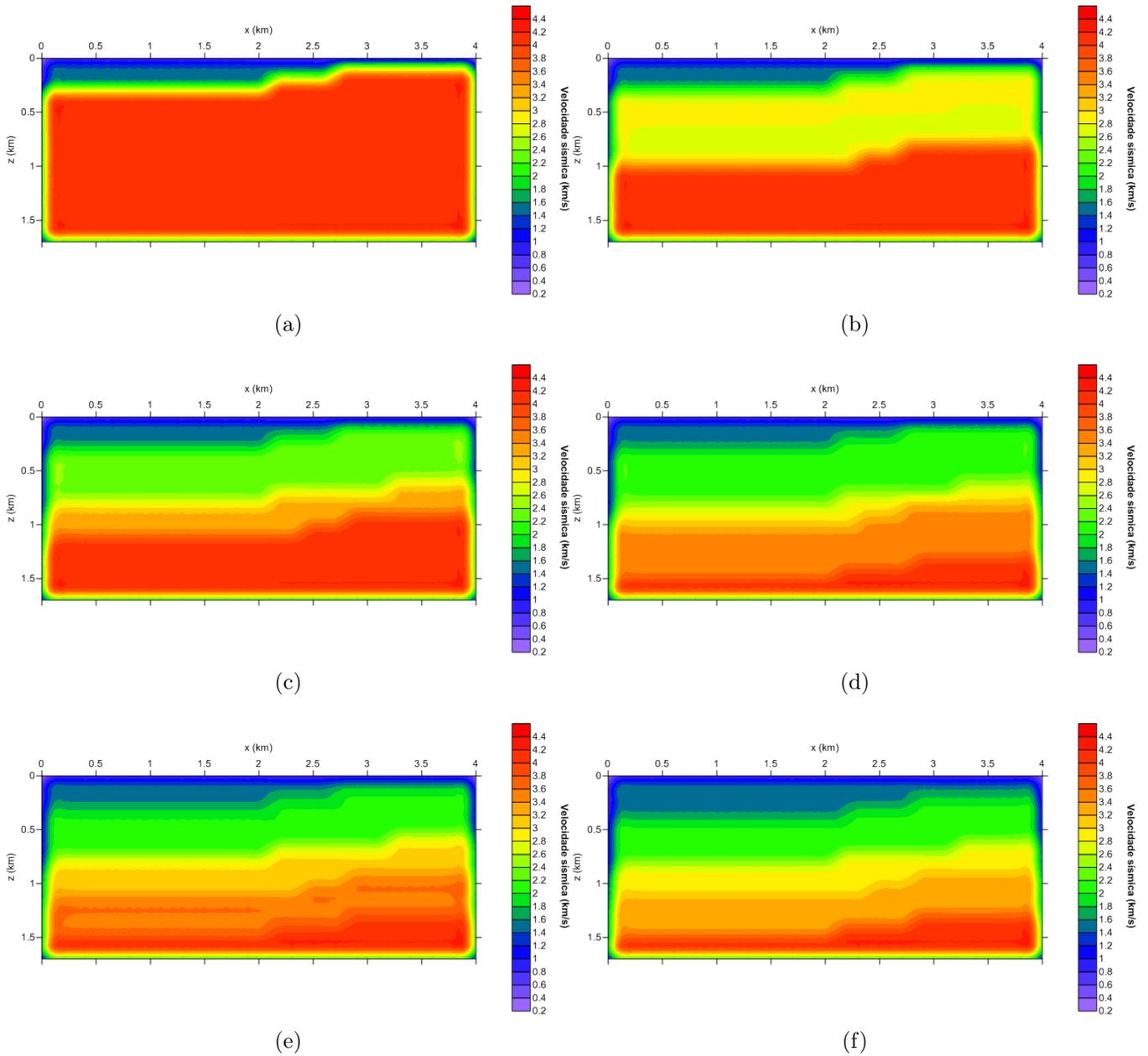


Figura 5.7: Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado  $M_{1P_2}$  com variação na quantidade dos valores de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100.

## 5.2 Campo de velocidades sísmicas do modelo de falha compressional ( $M_2$ )

Utilizamos o mesmo procedimento para o campo de velocidades sísmicas proveniente do modelo geológico de falhas comuns a ambientes compressoriais (falhas de empurrão) representado na Fig. 5.8, modelo  $M_2$ . O campo numérico,  $M_{2N}$  referente a  $M_2$  está graficamente representado em suas coordenadas  $(x, z)$  por valores de velocidade  $V_2(x, z)$  na Fig. 5.9 com dimensão horizontal de 4,9 km e profundidade de 2,9 km.

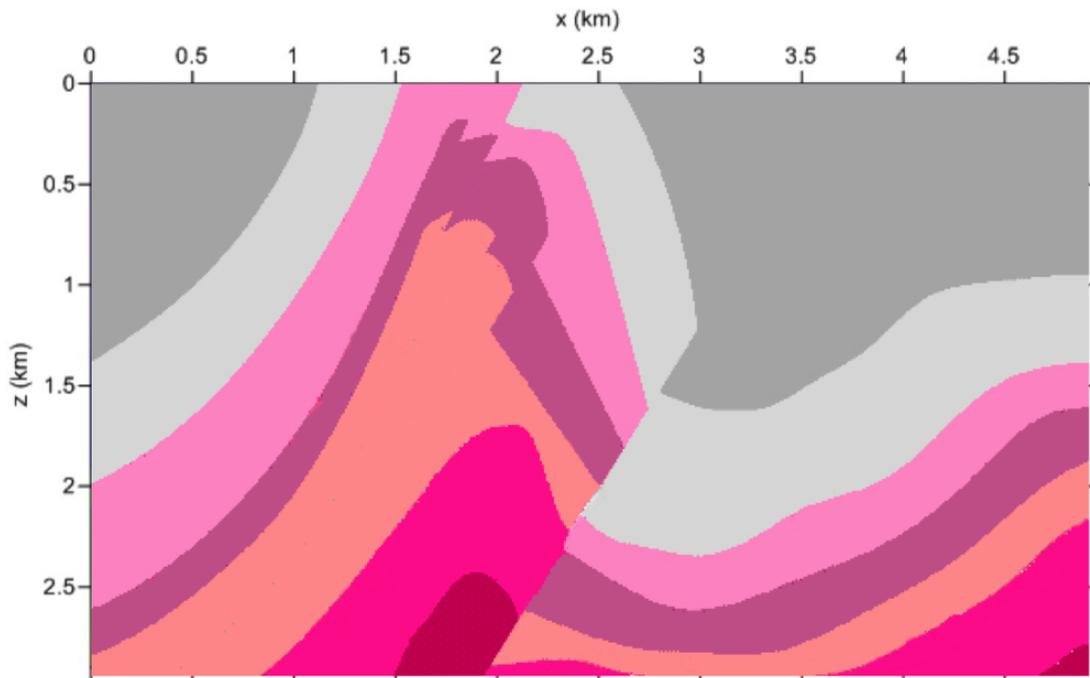


Figura 5.8: Modelo geológico de falha compressional,  $M_2$  (Soares Filho et al., 2002)

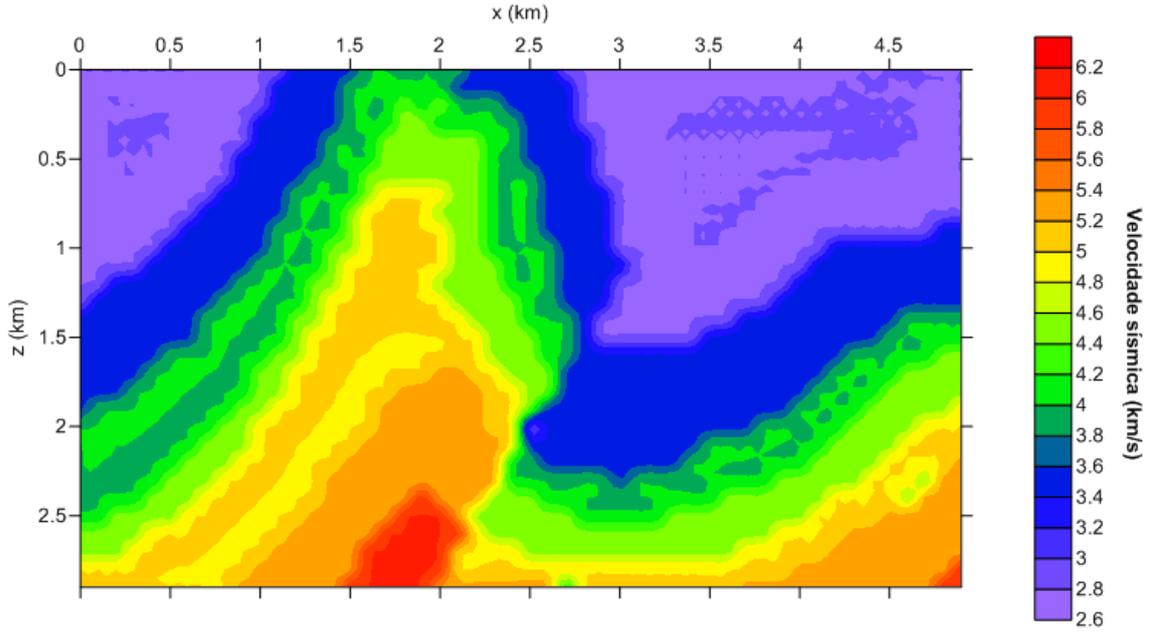


Figura 5.9: Modelo numérico  $M_{2_N}$  para o campo de velocidades  $V_2(x, z)$  utilizado na geração dos campos parametrizados.

### 5.2.1 Parametrizações

A unidade de comprimento considerada na parametrização foi o hectômetro (hm). Portanto:  $x_{min} = 0$  hm,  $x_{max} = 49$  hm,  $z_{min} = 0$  hm,  $z_{max} = 29$  hm. Sendo assim, para qualquer  $j$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^j \cdot 0) = 0$ . Além disso, temos para:

- $j = -1$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot x_{1_{max}} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 49 - 1) = \text{INT}(23,5) = 24$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot z_{2_{max}} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 29 - 1) = \text{INT}(13,5) = 14$ ; e
- $j = 0$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 49 - 1) = \text{INT}(48) = 48$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 29 - 1) = \text{INT}(28) = 28$ .

Para a primeira parametrização ( $M_{2_{P_1}}$ ) utilizamos os índices  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 24\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 14\}$ , respectivamente. As Figs. 5.10 e 5.11 apresentam graficamente a parametrização,  $M_{2_{P_1}}$ , e a diferença relativa entre  $M_{2_N}$  e  $M_{2_{P_1}}$ . Entretanto, fez-se  $k_{1_{max}} = 23$  e  $k_{2_{max}} = 13$  no programa utilizado para evitar acesso a valores não disponíveis da matriz de entrada.

A segunda parametrização,  $M_{2_{P_2}}$ , foi feita utilizando-se os índices  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Então,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 48\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 28\}$ , respectivamente. As Figs. 5.12 e 5.13 apresentam graficamente  $M_{2_{P_2}}$  e a diferença relativa entre  $M_{2_N}$  e  $M_{2_{P_2}}$ .

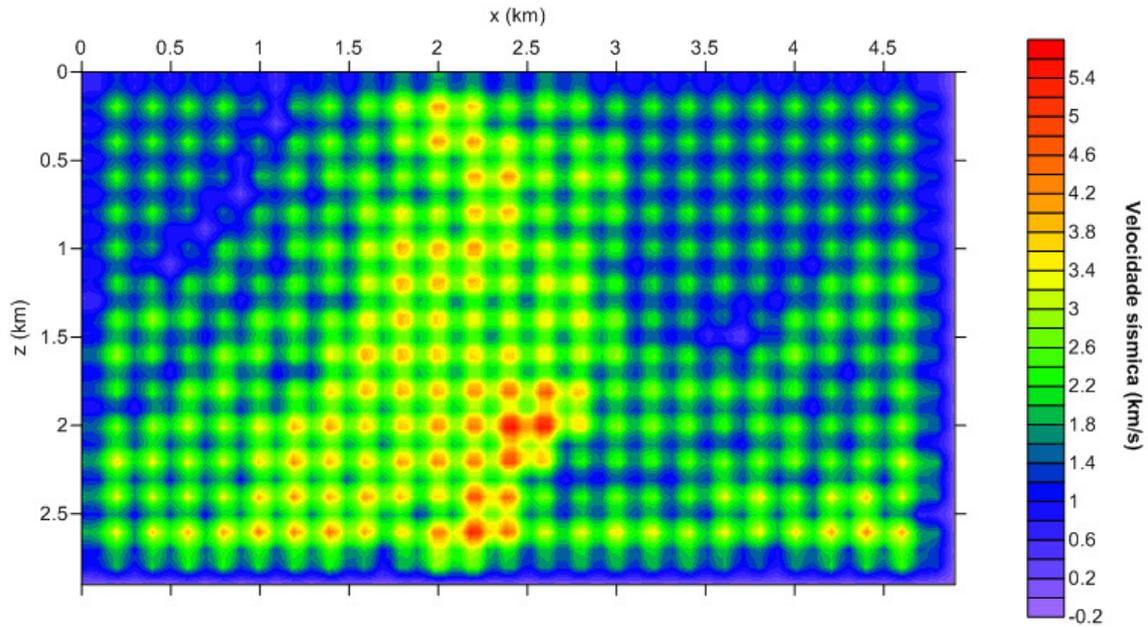


Figura 5.10: Modelo parametrizado  $M_{2P_1}$  obtido através da parametrização de  $M_{2N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 24\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 14\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 375$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 1125$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 336 para coeficientes  $c_{l,\mathbf{k}}$  e 1008 para coeficientes do tipo  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$  devido ao valor diferenciado de  $k_{1max}$  e  $k_{2max}$ .

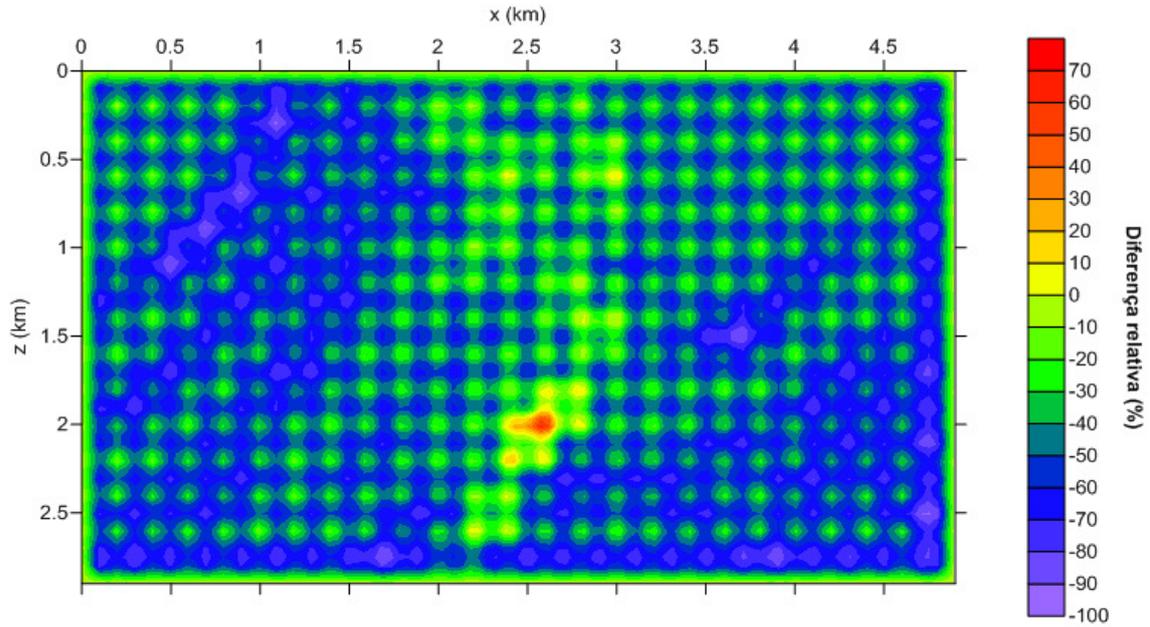


Figura 5.11: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{2P_1}$  e o original numérico  $M_{2N}$ .

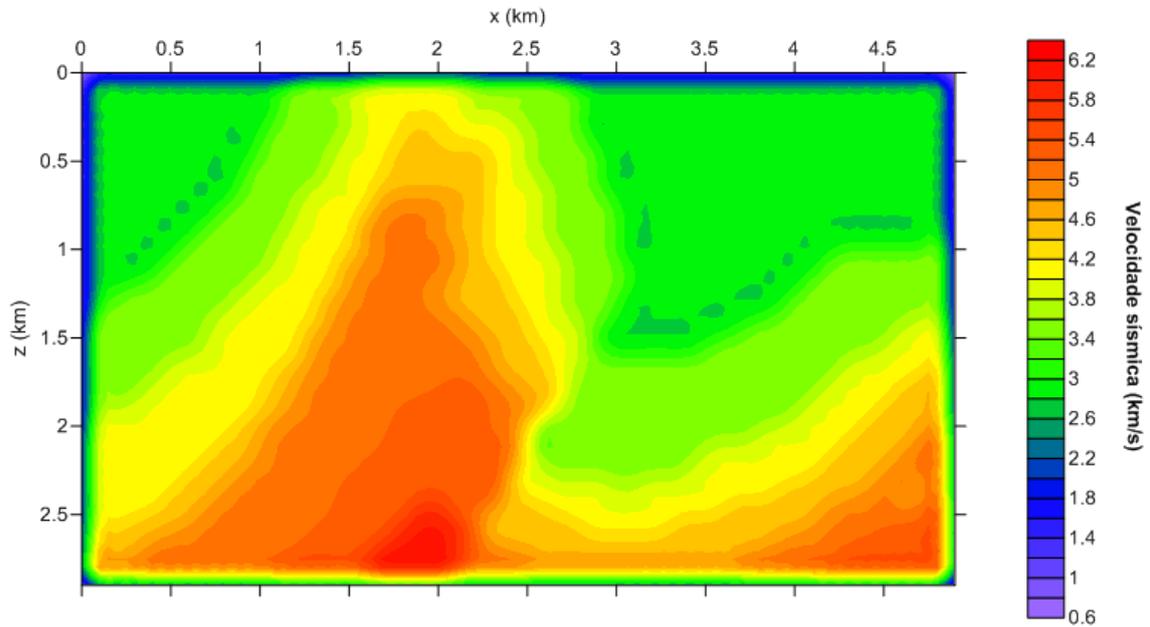


Figura 5.12: Modelo parametrizado  $M_{2P_2}$  obtido através da parametrização de  $M_{2N}$  utilizando a série de ondaletas Haar bidimensional com  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 48\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 28\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 1421$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 4263$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ .

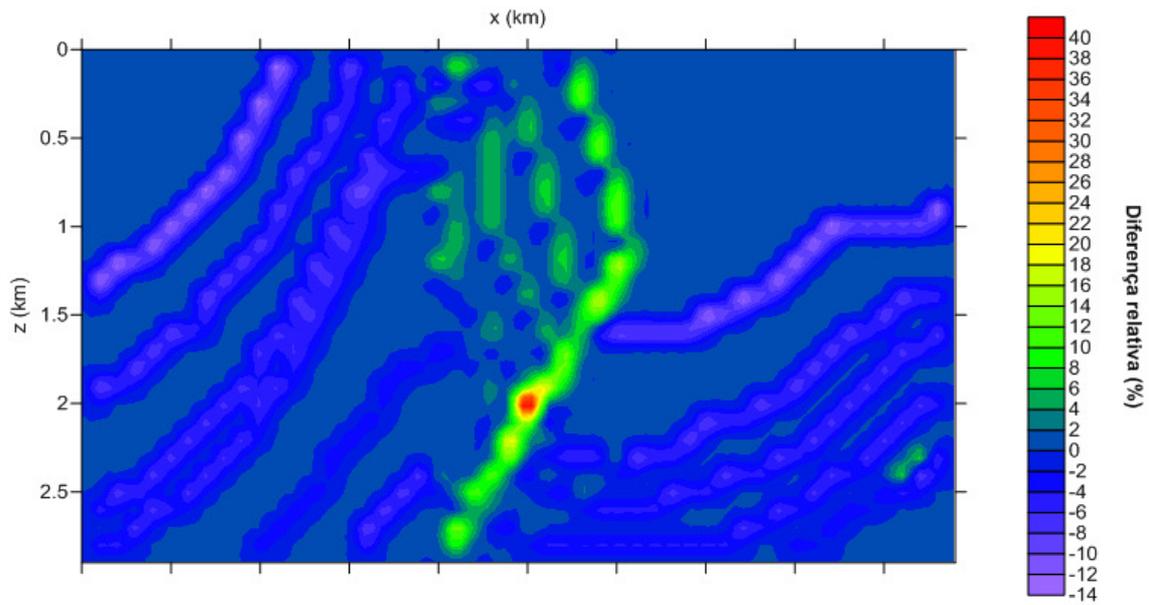


Figura 5.13: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{2P_2}$  e o original numérico  $M_{2N}$ .

### 5.2.2 Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos

Os resultados obtidos após a redução sucessiva de coeficientes pela média nos sub-intervalos para o modelo parametrizado mais acurado,  $M_{2P_2}$ , estão representados na Fig. 5.14.

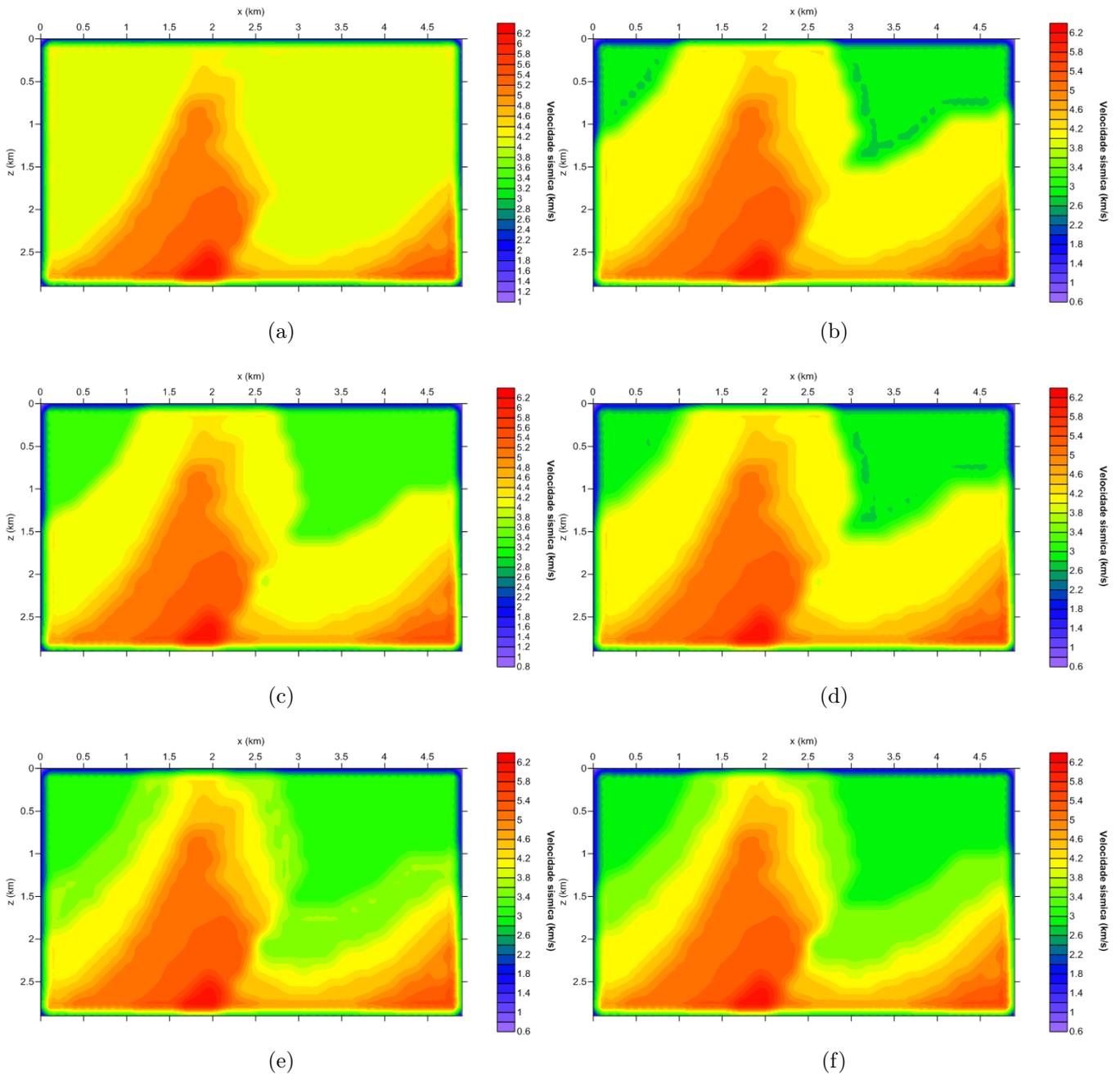


Figura 5.14: Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado  $M_{2P_2}$  com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100.

### 5.3 Campo de velocidades sísmicas do modelo da falha distensional ( $M_3$ )

Aplicamos o mesmo estudo da parametrização ao modelo geológico da falha distensional  $M_3$ , representativo de ambientes geológicos sujeitos a um regime distensivo, como vales de rifte. O modelo é ilustrado na Fig. 5.15. O campo numérico,  $M_{3N}$ , referente a  $M_3$ , utilizado na parametrização, está graficamente ilustrado na Fig. 5.16 por seus valores de velocidade  $V_3(x, z)$ . As dimensões do modelo são: 6,4 km (extensão horizontal) e 2,8 km (profundidade).

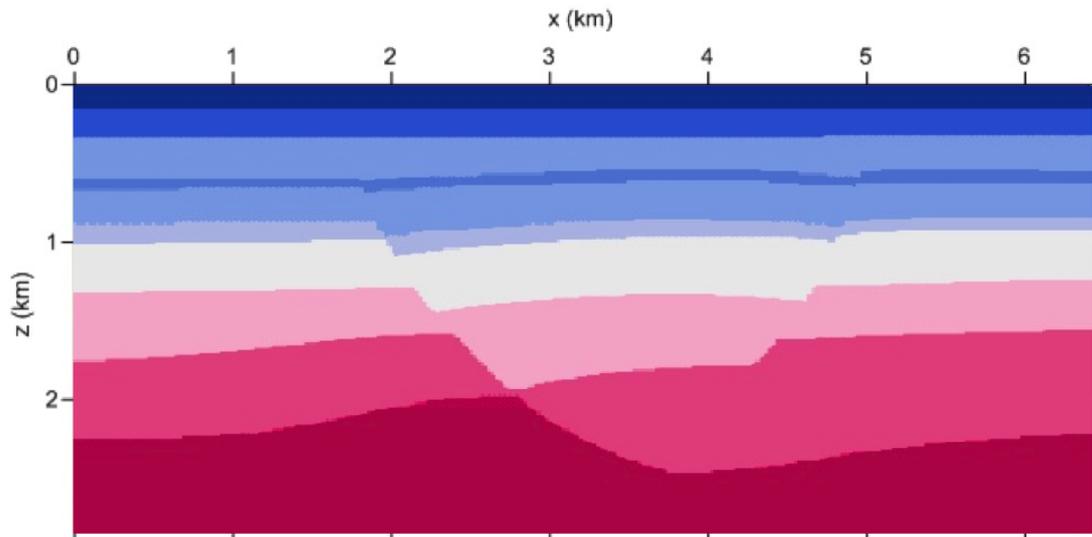


Figura 5.15: Modelo geológico da falha distensional,  $M_3$  (Soares Filho et al., 2002).

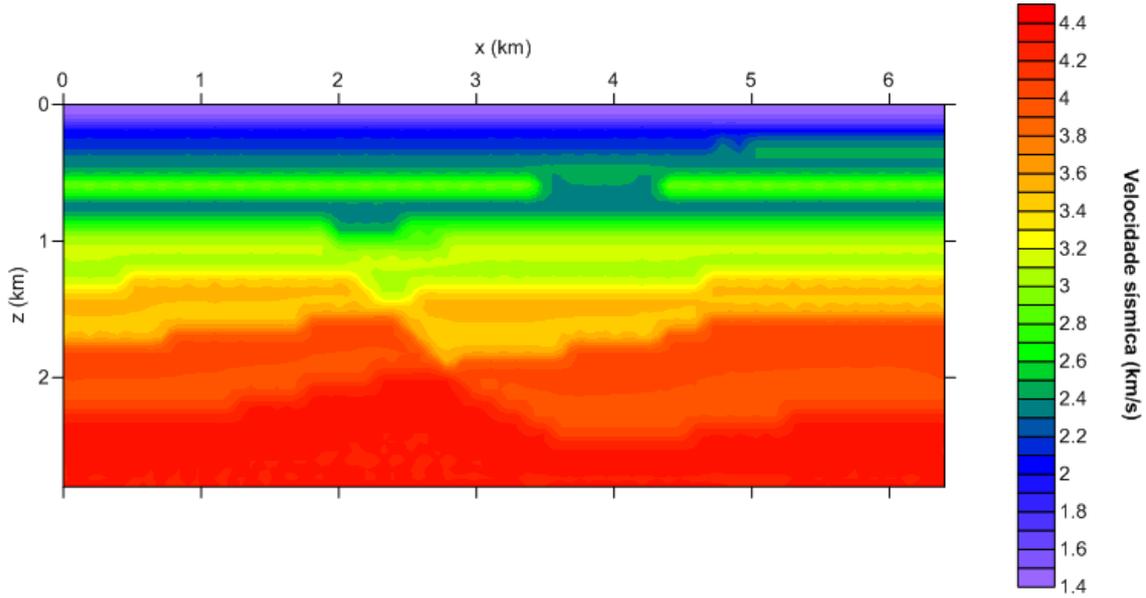


Figura 5.16: Campo numérico  $M_{3N}$  para o campo de velocidades  $V_3(x, z)$  utilizado na geração dos campos parametrizados.

### 5.3.1 Parametrizações

Como indicado anteriormente, a unidade de comprimento utilizada na parametrização foi o hectómetro (hm). Portanto,  $x_{min} = z_{min} = 0$  hm,  $x_{max} = 64$  hm e  $z_{max} = 28$  hm. Sendo assim, para qualquer  $j$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^j \cdot 0) = 0$ . Além disso, temos para:

- $j = -1$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot x_{1_{max}} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 64 - 1) = \text{INT}(31) = 31$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot z_{2_{max}} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 28 - 1) = \text{INT}(13) = 13$ ; e
- $j = 0$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 64 - 1) = 63$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 28 - 1) = 27$ .

A primeira parametrização,  $M_{3P_1}$ , foi realizada utilizando-se os índices  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Então,  $k_1$  e  $k_2$  variam nos conjuntos  $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ , respectivamente. As Figs. 5.17 e 5.18 apresentam graficamente o resultado do campo parametrizado,  $M_{3P_1}$ , e a diferença entre  $M_{3P_1}$  e o campo original  $M_{3N}$ .

Para a segunda parametrização (modelo  $M_{3P_2}$ ) empregamos os índices  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 63\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 27\}$ , respectivamente. As Figs. 5.19 e 5.20 apresentam o resultado desta parametrização,  $M_{3P_2}$ , e a diferença entre  $M_{3P_2}$  e o campo original,  $M_{3N}$ .

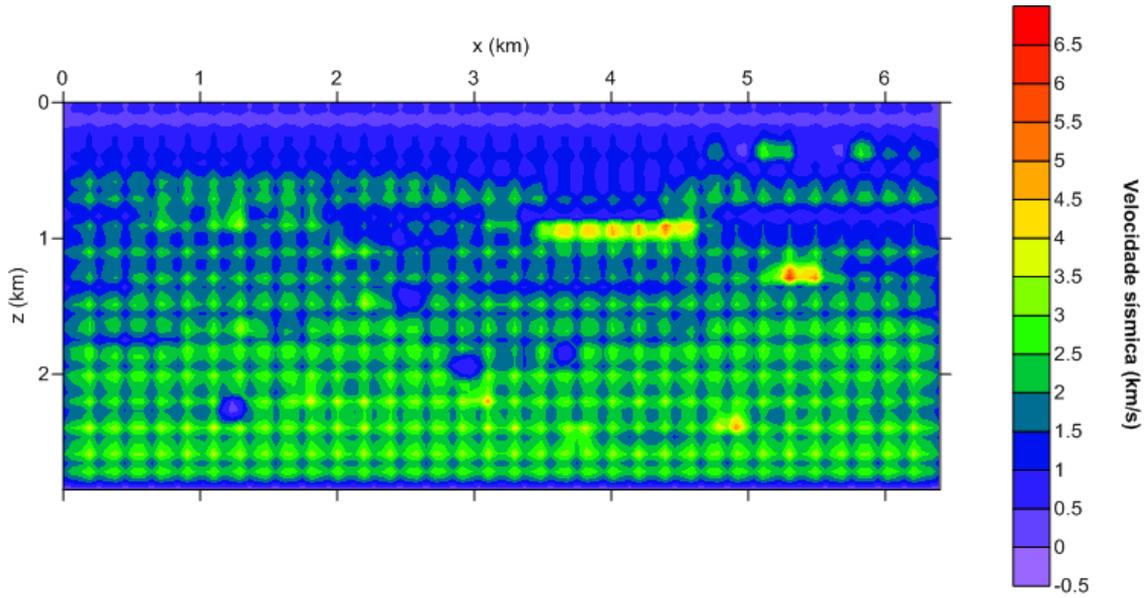


Figura 5.17: Modelo parametrizado  $M_{3P_1}$  obtido através da parametrização de  $M_{3N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 448$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 1344$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ .

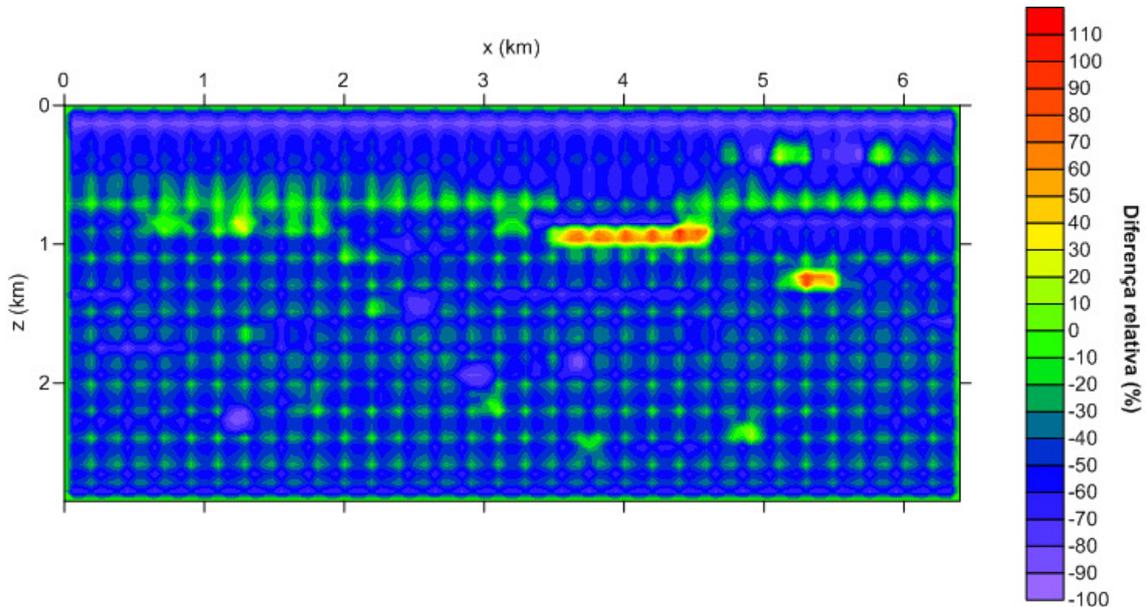


Figura 5.18: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{3P_1}$  e o original numérico  $M_{3N}$ .

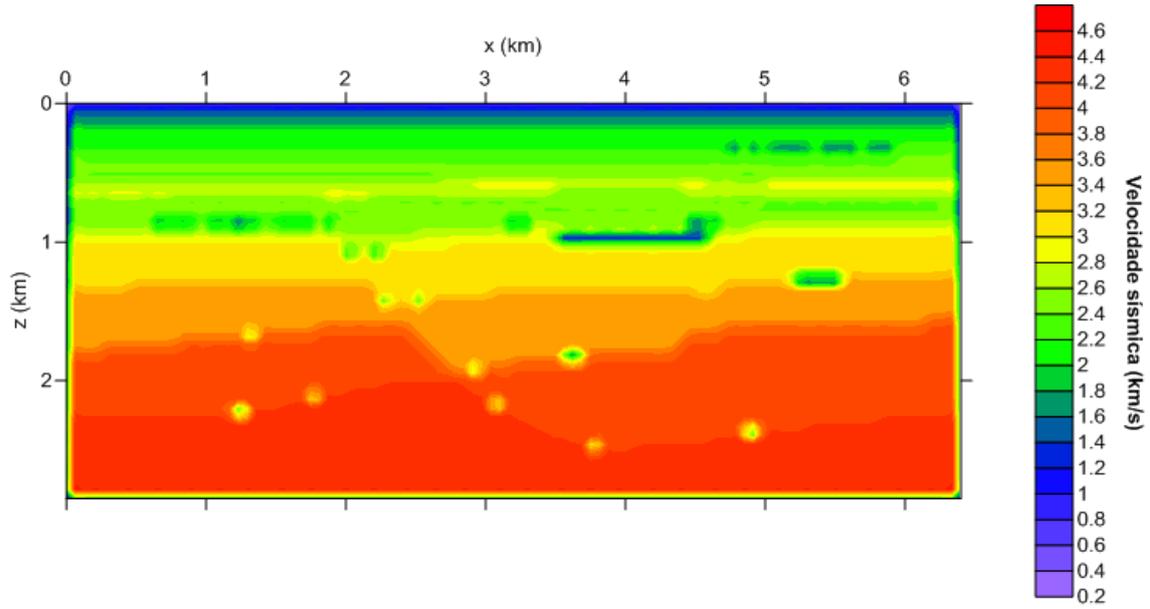


Figura 5.19: Modelo parametrizado  $M_{3P_2}$  obtido através da parametrização de  $M_{3N}$  utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Então,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 63\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 27\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 1792$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 5376$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ .

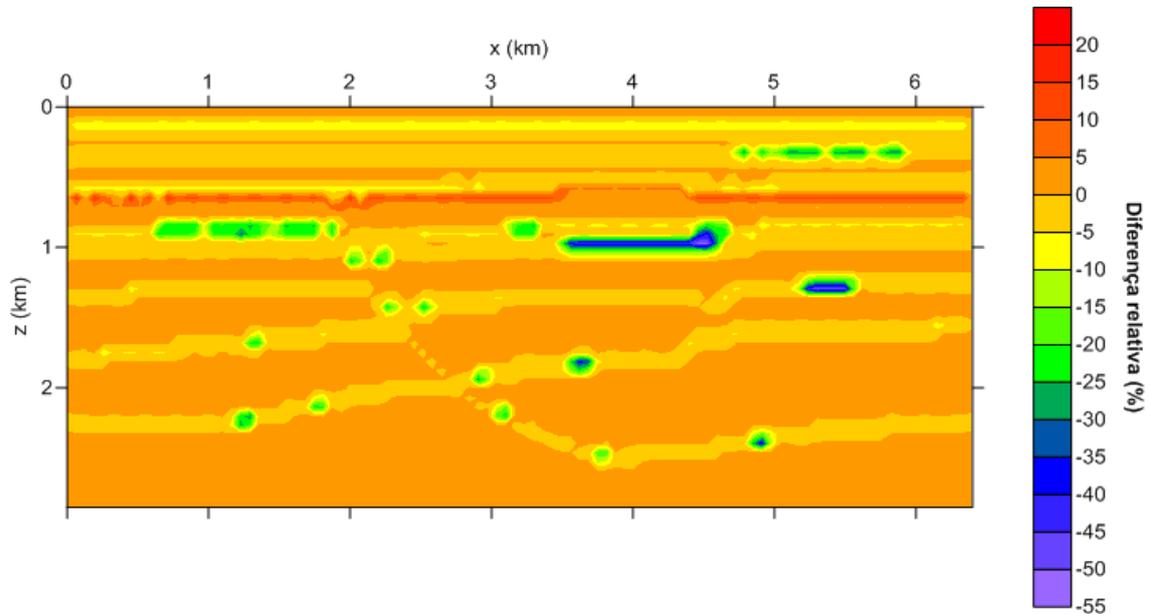


Figura 5.20: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{3P_2}$  e o original numérico  $M_{3N}$ .

### 5.3.2 Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos

Os resultados obtidos após a redução sucessiva de coeficientes pela média nos sub-intervalos para o modelo parametrizado mais acurado,  $M_{3P_2}$ , estão representados na Fig. 5.21.

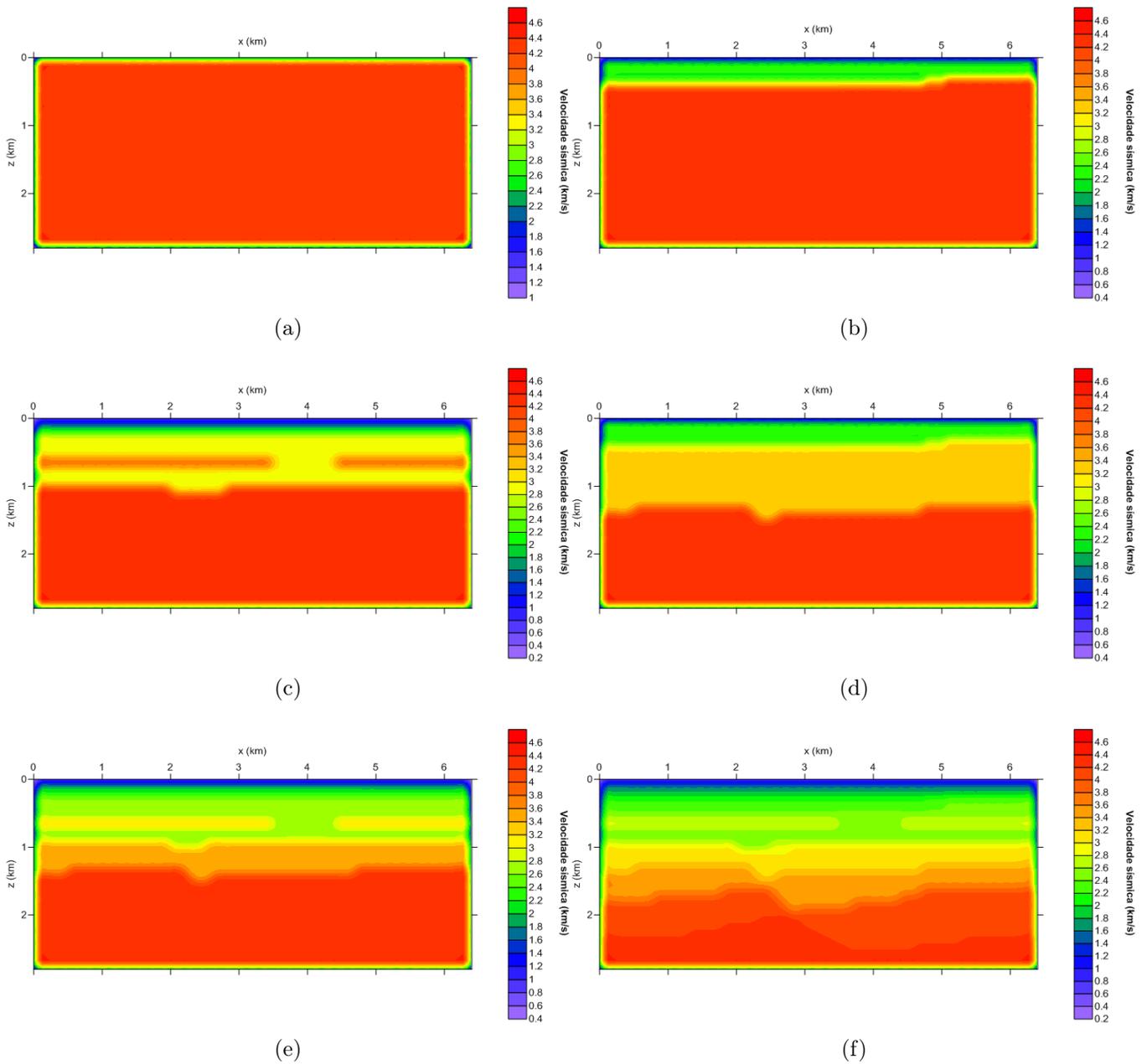


Figura 5.21: Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado  $M_{3P_2}$  com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100.

## 5.4 Campo de velocidades sísmicas do modelo do anticlinal ( $M_4$ )

Tal como em casos anteriores, o mesmo método foi aplicado agora ao modelo geológico da dobra anticlinal ( $M_4$ ). O modelo geológico está representado na Fig. 5.22. O modelo numérico empregado na parametrização é dado na Fig. 5.23 com valores de velocidade  $V_4(x, z)$ . Consideramos o modelo com extensão horizontal igual a 6,1 km e profundidade de 3,7 km.

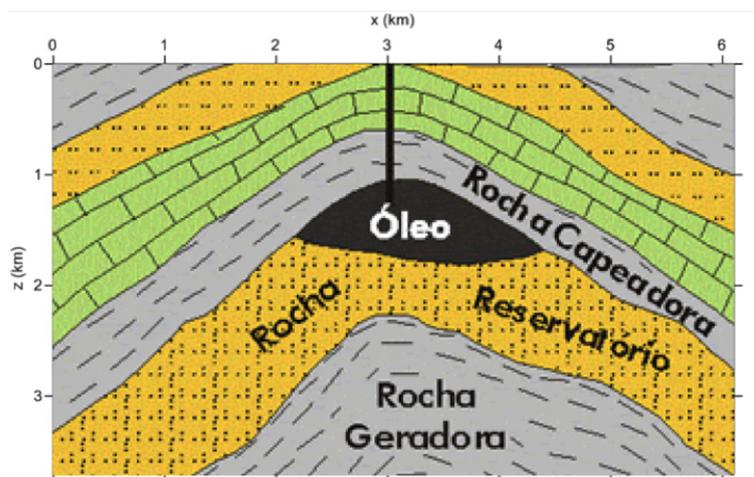


Figura 5.22: Modelo geológico do anticlinal,  $M_4$  (Teixeira et al., 2000)

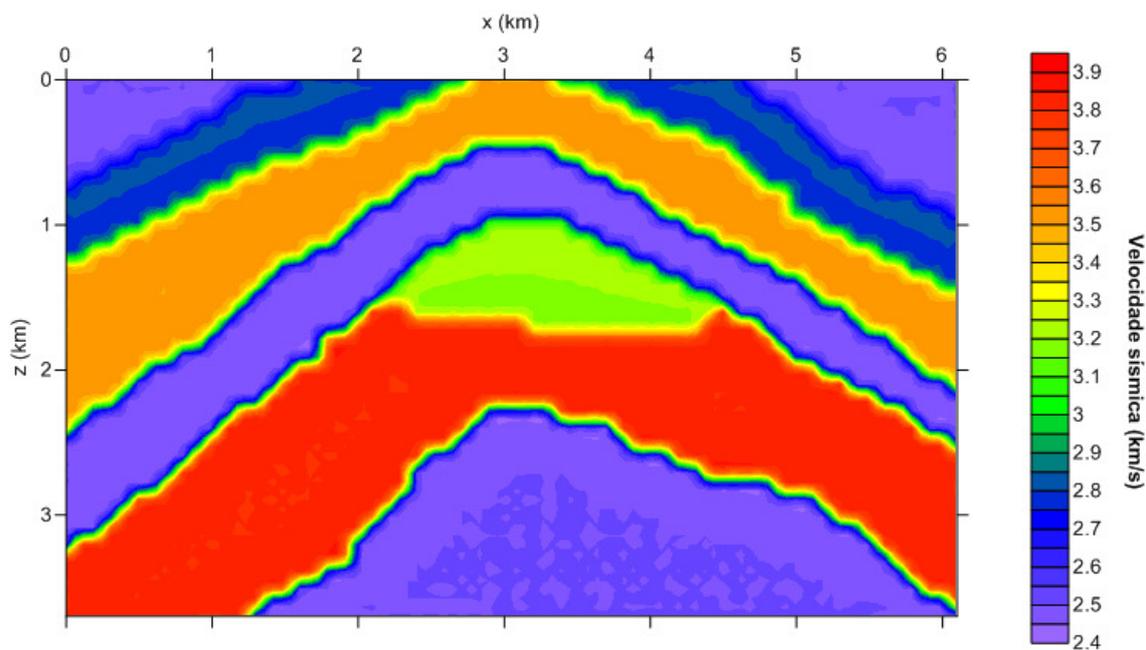


Figura 5.23: Modelo numérico  $M_{4N}$  para o campo de velocidades  $V_4(x, z)$  utilizado na geração dos campos parametrizados.

### 5.4.1 Parametrizações

A unidade de comprimento considerada na parametrização foi o hectômetro (hm). Portanto:  $x_{min} = 0$  hm,  $x_{max} = 61$  hm,  $z_{min} = 0$  hm e  $z_{max} = 37$  hm. Sendo assim, para qualquer  $j$ ,  $k_{1_{min}} = k_{2_{min}} = \text{int}(2^j \cdot 0) = 0$ . Além disso, temos para:

- $j = -1$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot x_{max} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 61 - 1) = \text{INT}(29, 5) = 30$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^j \cdot z_{max} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 37 - 1) = \text{INT}(17, 5) = 18$ ; e
- $j = 0$ ,  $k_{1_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 61 - 1) = 60$  e  $k_{2_{max}} = \text{INT}(2^0 \cdot 37 - 1) = 36$ .

Para a parametrização inicial (modelo  $M_{4P_1}$ ) empregamos os índices  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Sendo assim,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 30\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 18\}$ , respectivamente. As Figs. 5.24 e 5.25 apresentam o resultado do campo parametrizado,  $M_{4P_1}$ , e a diferença entre  $M_{4P_1}$  e o campo numérico  $M_{4N}$ . Entretanto,  $k_{1_{max}} = 29$  e  $k_{2_{max}} = 17$  no programa utilizado neste trabalho para evitar acesso a valores não disponíveis da matriz de entrada.

A segunda parametrização (modelo  $M_{4P_2}$ ) foi gerada com os índices  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 60\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 36\}$ , respectivamente. As Figs. 5.26 e 5.27 apresentam o resultado da parametrização,  $M_{4P_2}$ , e a diferença entre  $M_{4P_2}$  e o campo original  $M_{4N}$ .

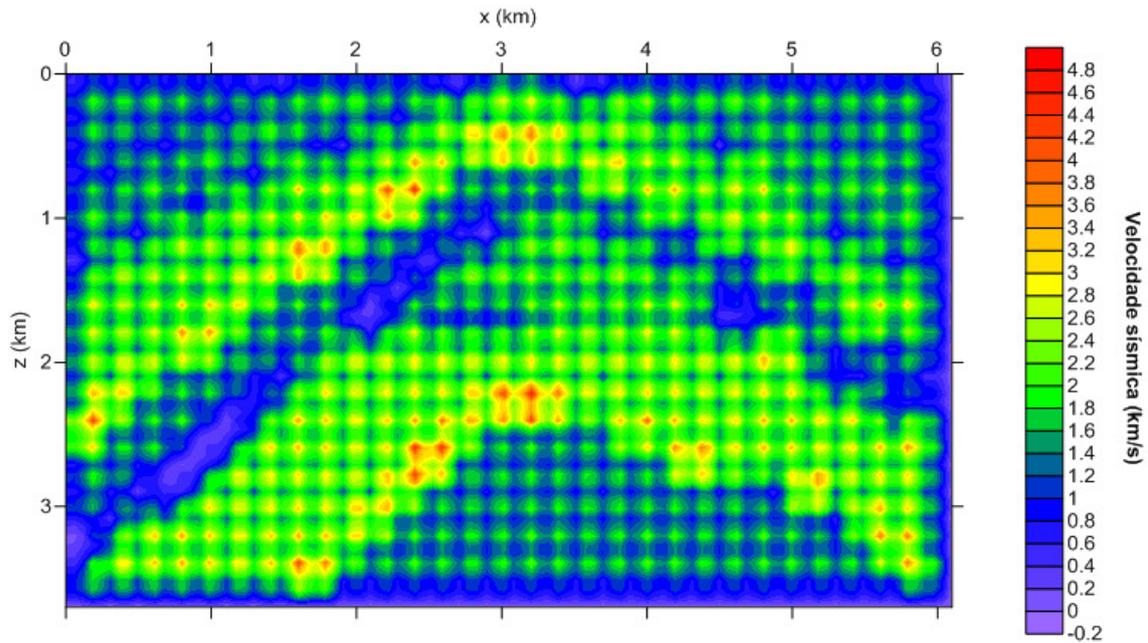


Figura 5.24: Modelo parametrizado  $M_{4P_1}$  obtido através da parametrização de  $M_{4N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Sendo assim,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 30\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 18\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 589$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 1767$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ . Porém, no programa utilizado estes valores foram: 540 para coeficientes  $c_{l,\mathbf{k}}$  e 1620 para coeficientes do tipo  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$  devido ao valor diferenciado de  $k_{1_{max}}$  e  $k_{2_{max}}$ .

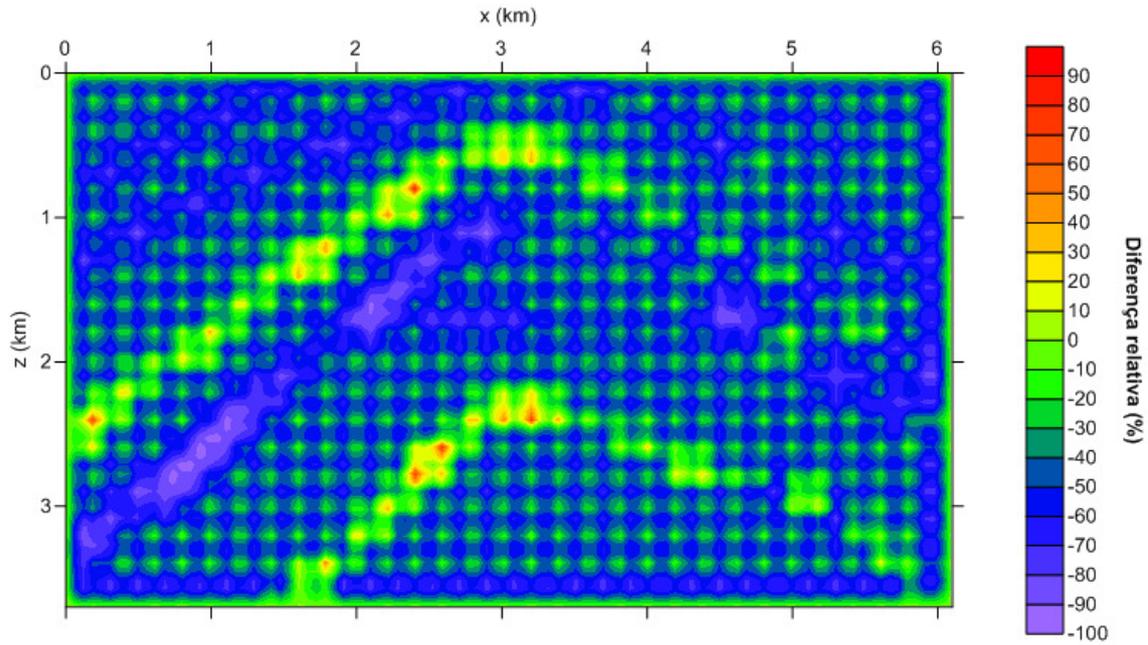


Figura 5.25: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{4P_1}$  e o original numérico  $M_{4N}$ .

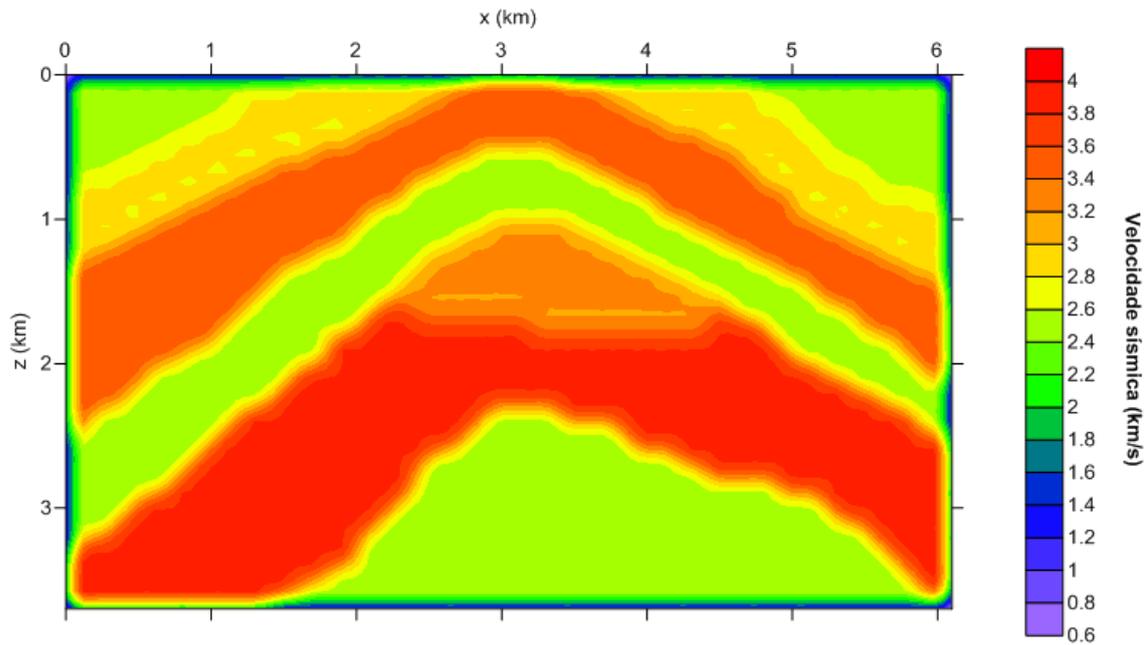


Figura 5.26: Modelo parametrizado  $M_{4P_2}$  obtido através da parametrização de  $M_{4N}$  utilizando a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Então,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 60\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 36\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1_{max}} - k_{1_{min}} + 1)(k_{2_{max}} - k_{2_{min}} + 1) = 2257$  para  $c_{l,k}$  e  $3 \cdot N_c = 6771$  para  $d_{j,k}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,k}$ .

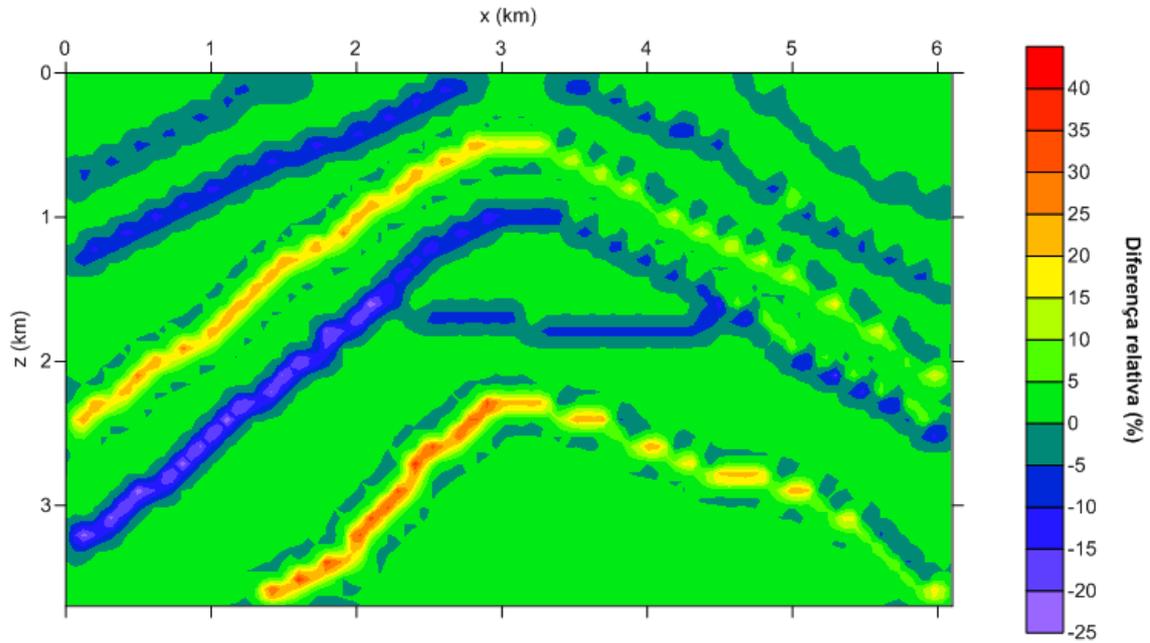


Figura 5.27: Diferença relativa entre os campos parametrizado  $M_{4P_2}$  e o original numérico  $M_{4N}$ .

#### 5.4.2 Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos

Os resultados obtidos após a redução sucessiva de coeficientes pela média nos sub-intervalos para o modelo parametrizado mais acurado,  $M_{4P_2}$ , estão representados na Fig. 5.28.

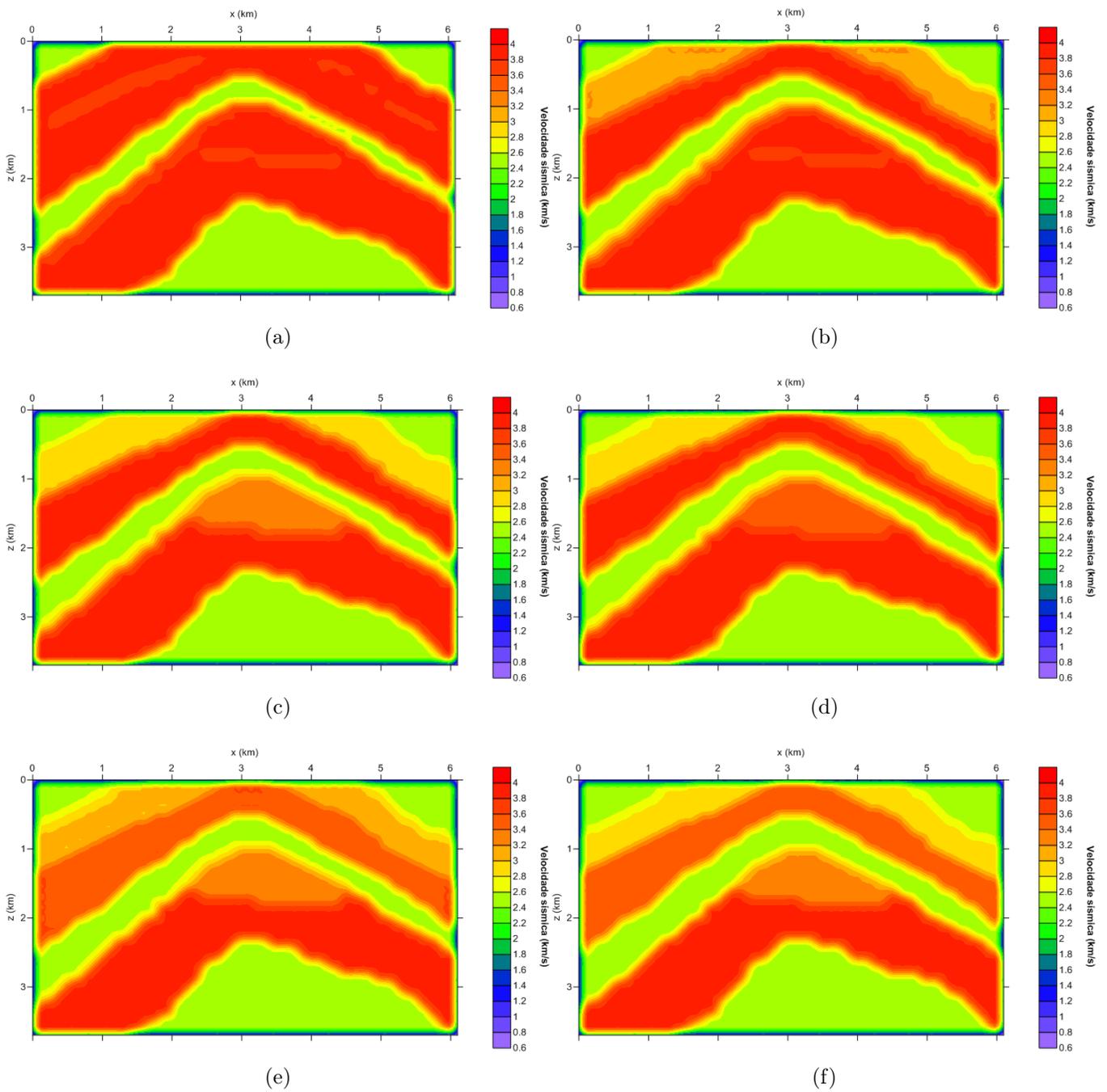


Figura 5.28: Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado  $M_{4P_2}$  com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100.

## 5.5 Campo de velocidades sísmicas do modelo do domo de sal ( $M_5$ )

Aplicamos o método proposto neste trabalho ao modelo geológico do domo de sal ( $M_5$ ) que está representado na Fig. 5.29. O modelo numérico,  $M_{5,N}$ , empregado na parametrização é dado na Fig. 5.30 com valores de velocidade dados pela função  $V_5(x, z)$ . Consideramos o modelo com extensão horizontal igual a 7,2 km e profundidade de 5,4 km.

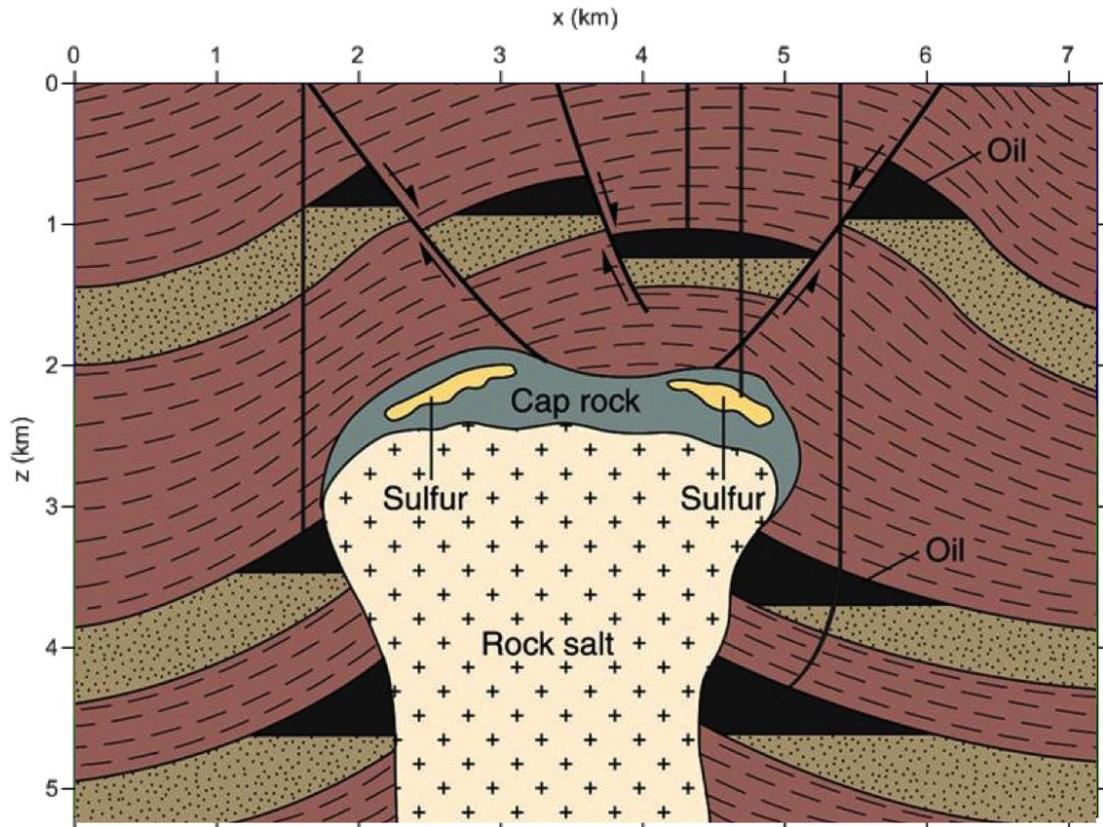


Figura 5.29: Modelo geológico do domo de sal,  $M_5$  (McGraw Hill Companies, Inc).

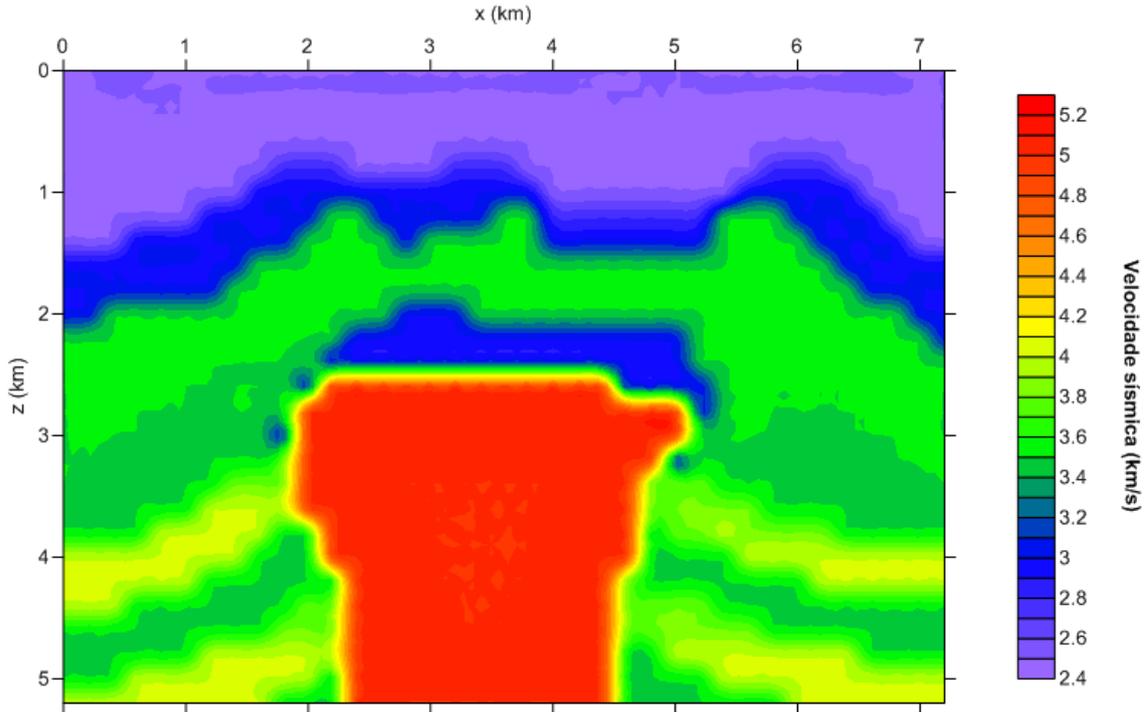


Figura 5.30: Campo numérico  $M_{5N}$  para o campo de velocidades dado pela função  $V_5(x, z)$  utilizado na geração dos campos parametrizados.

### 5.5.1 Parametrizações

A unidade de comprimento considerada na parametrização foi o hectômetro (hm). Portanto:  $x_{min} = 0$  hm,  $x_{max} = 72$  hm,  $z_{min} = 0$  hm,  $z_{max} = 54$  hm. Sendo assim, para qualquer  $j$ ,  $k_{1min} = k_{2min} = \text{int}(2^j \cdot 0) = 0$ . Além disso, temos para:

- $j = -1$ ,  $k_{1max} = \text{INT}(2^j \cdot x_{max} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 72 - 1) = 35$  e  $k_{2max} = \text{INT}(2^j \cdot z_{max} - 1) = \text{INT}(2^{-1} \cdot 54 - 1) = 26$ ; e
- $j = 0$ ,  $k_{1max} = \text{INT}(2^0 \cdot 72 - 1) = 71$  e  $k_{2max} = \text{INT}(2^0 \cdot 54 - 1) = 53$ .

A primeira parametrização (modelo  $M_{5P_1}$ ) está representada na Fig. 5.31. Empregamos os índices  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Sendo assim,  $k_1$  e  $k_2$  variam nos conjuntos  $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 26\}$ , respectivamente. A Fig. 5.32 apresenta a diferença entre a parametrização e o modelo original  $M_{5N}$  graficamente.

Para a segunda parametrização (modelo  $M_{5P_2}$ ) foram utilizados os índices  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 71\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 53\}$ , respectivamente. As Figs. 5.33 e 5.34 apresentam graficamente o resultado da parametrização modelo,  $M_{5P_2}$ , e a diferença entre o modelo parametrizado  $M_{5P_2}$  o modelo original  $M_{5N}$ .

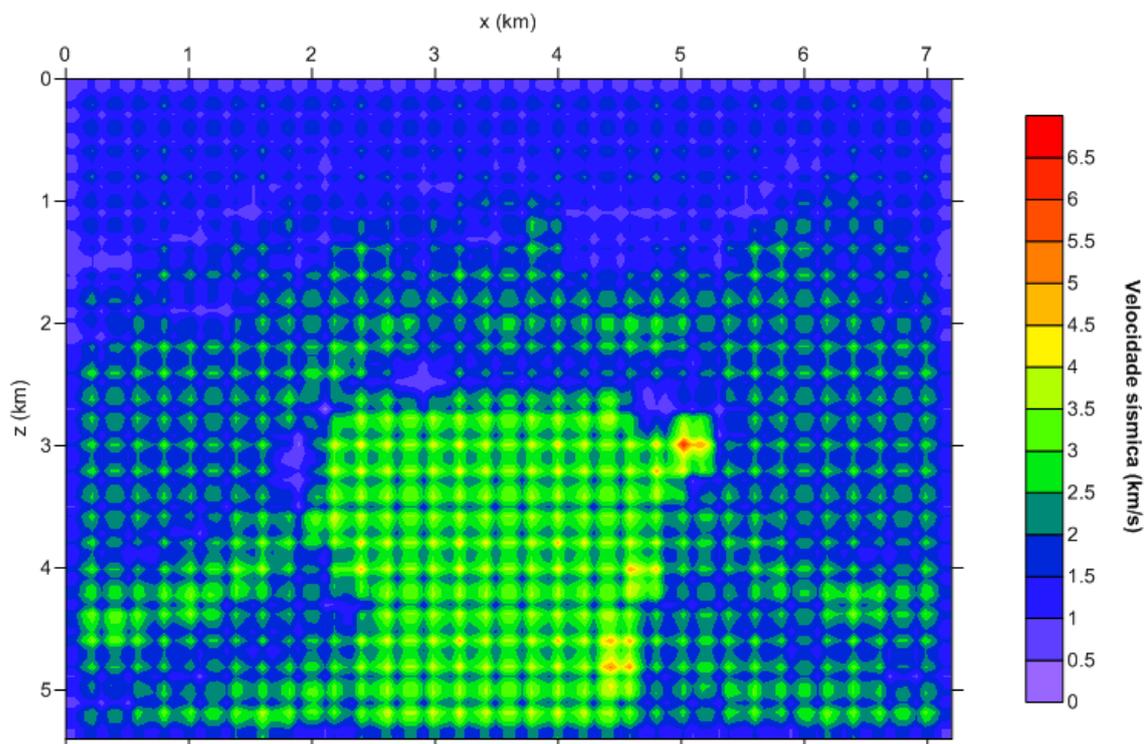


Figura 5.31: Modelo parametrizado  $M_{5P_1}$  obtido através da parametrização de  $M_{5N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = -1$  e  $j_{max} = -1$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 26\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 972$  para  $c_{l,\mathbf{k}}$  e  $3 \cdot N_c = 2916$  para  $d_{j,\mathbf{k}}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,\mathbf{k}}$ .

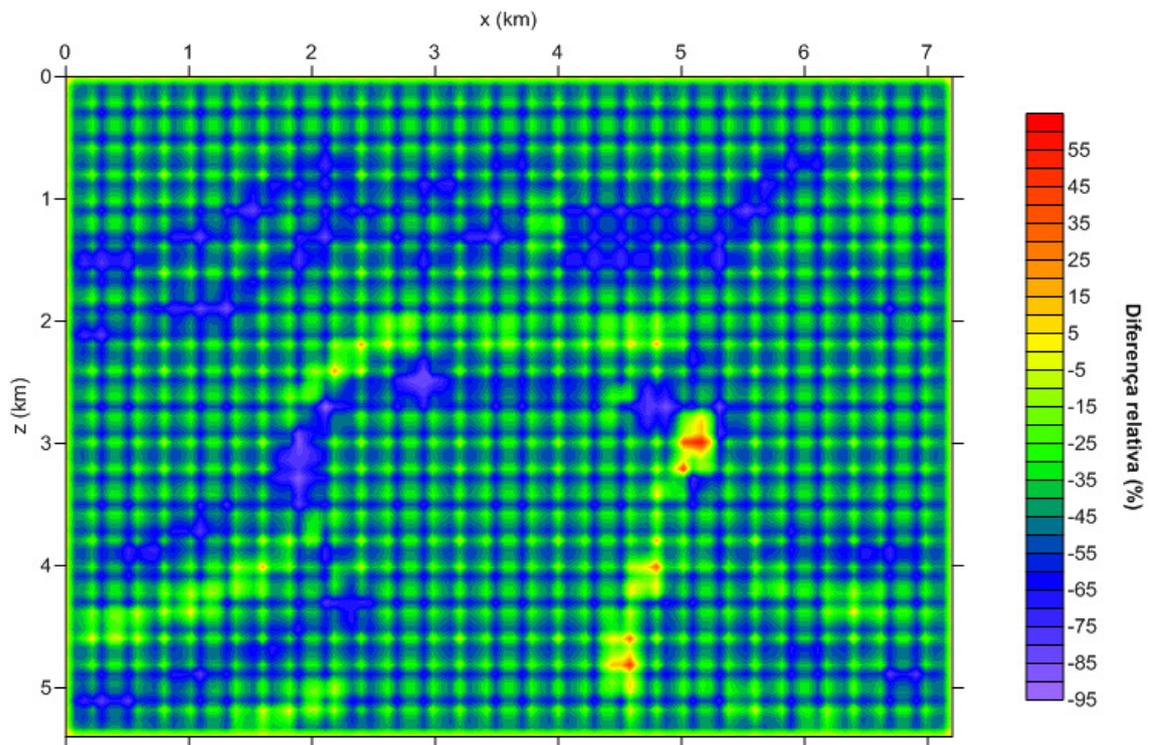


Figura 5.32: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{5P_1}$  e o original numérico  $M_{5N}$ .

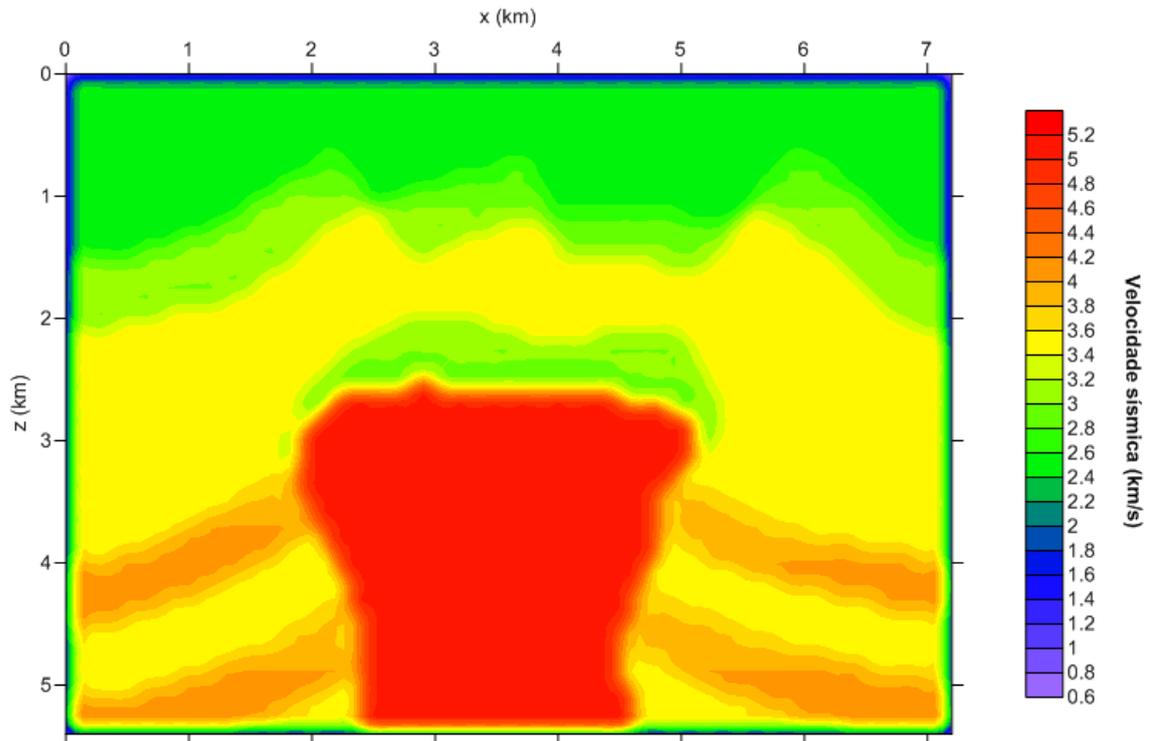


Figura 5.33: Modelo parametrizado  $M_{5P_2}$  obtido através da parametrização de  $M_{5N}$  utilizando-se a série ondaleta Haar bidimensional com  $l = 0$  e  $j_{max} = 0$ . Logo,  $k_1$  e  $k_2$  variam em  $\{0, 1, 2, \dots, 71\}$  e  $\{0, 1, 2, \dots, 53\}$ , respectivamente. O total de coeficientes é:  $N_c = (k_{1max} - k_{1min} + 1)(k_{2max} - k_{2min} + 1) = 3888$  para  $c_{l,k}$  e  $3 \cdot N_c = 11664$  para  $d_{j,k}^\mu$ , onde  $N_c$  é o número de coeficientes do tipo  $c_{l,k}$ .

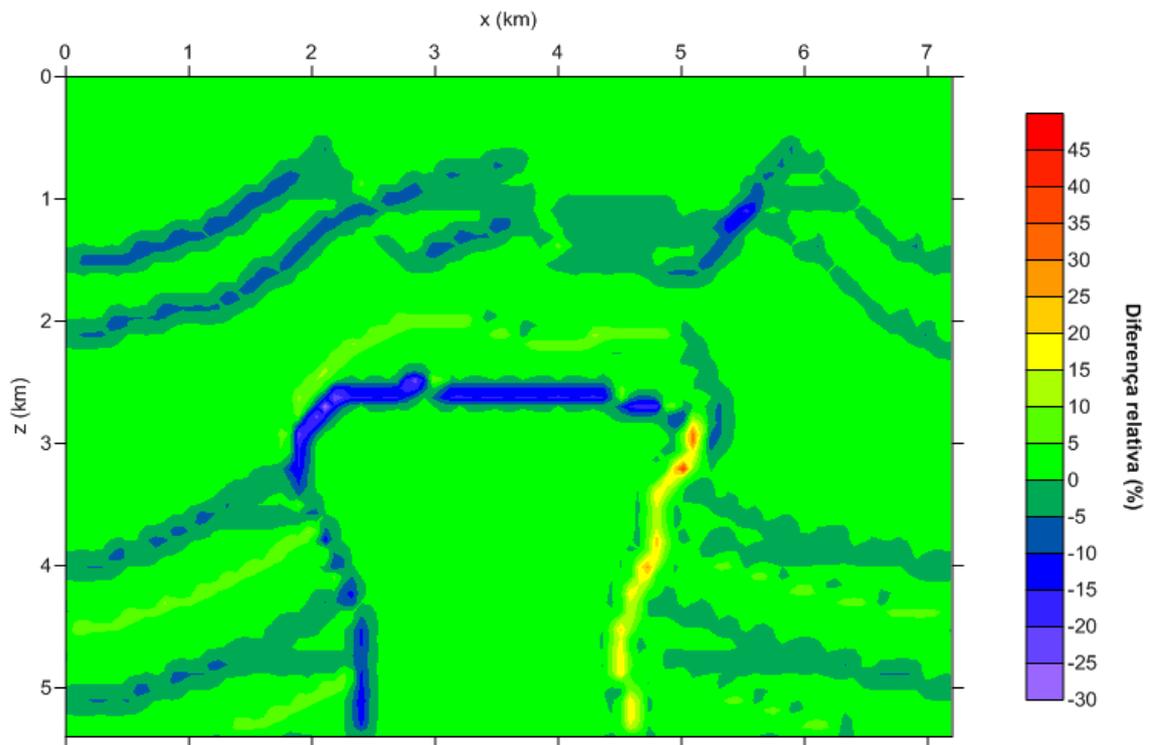


Figura 5.34: Diferença relativa entre os modelos parametrizado  $M_{5P_2}$  e o original numérico  $M_{5N}$ .

### 5.5.2 Redução de coeficientes pela média nos sub-intervalos

Os resultados obtidos após a redução de coeficientes pela média em sub-intervalos para o modelo parametrizado mais acurado  $M_{5P_2}$  estão representados na Fig. 5.35.

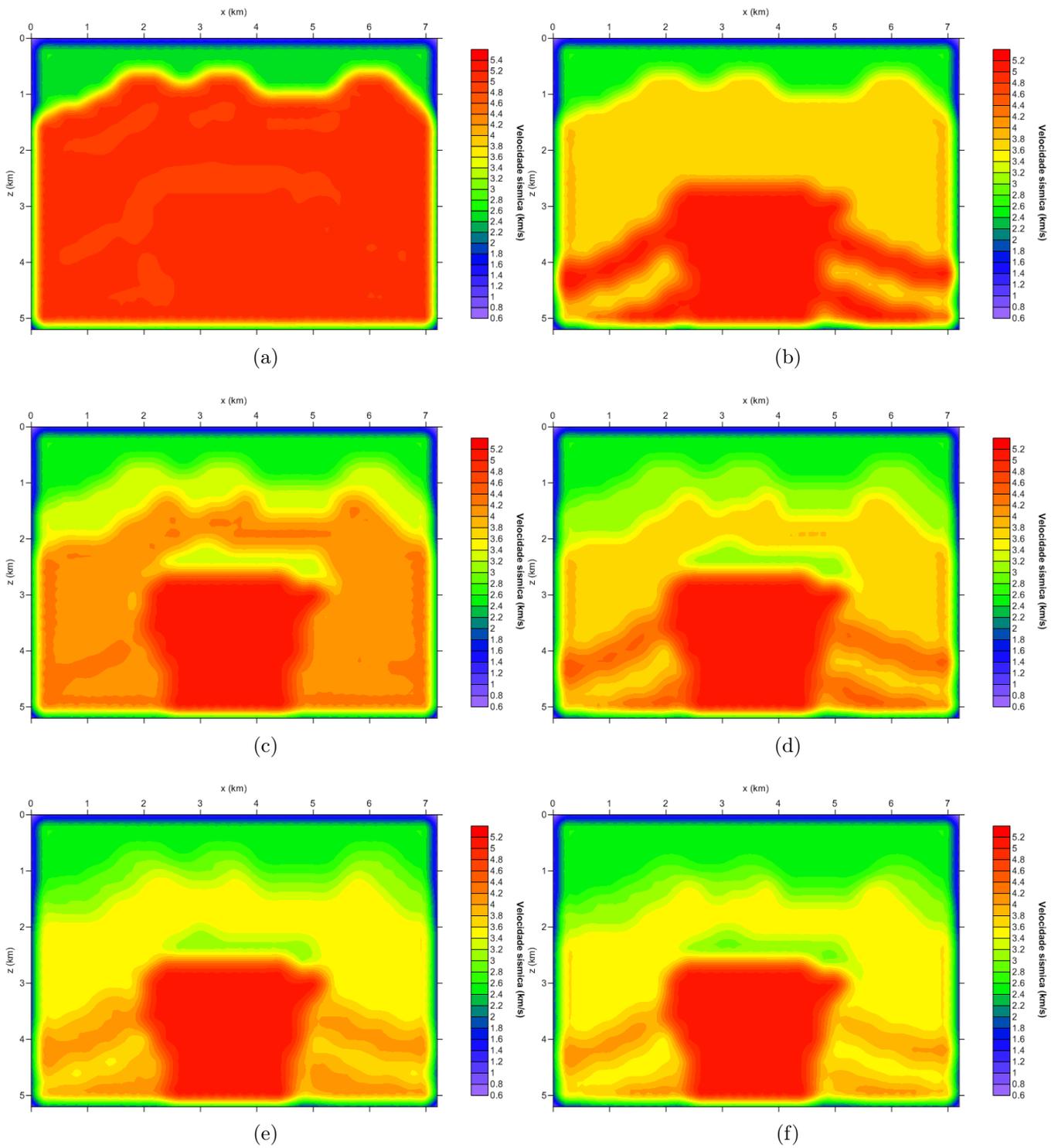


Figura 5.35: Resultados obtidos pela aplicação da redução pela média de coeficientes do modelo parametrizado  $M_{5P_2}$  com variação na quantidade de coeficientes válidos totais conforme segue: (a) 4, (b) 6, (c) 8, (d) 10, (e) 12, e (f) 100.

# CAPÍTULO 6

## Discussão

Neste estudo observamos que a série ondaleta Haar bidimensional pode ser utilizada na parametrização de campos bidimensionais.

A representação da função bidimensional  $f(x, y) = x^2 + x + y + 1$  mostra que é possível parametrizar modelos bidimensionais com razoável acurácia (diferença relativa ao redor de 10%) utilizando índices adequados. Observando-se as representações sucessivas para a função verificamos que o aumento do valor do índice  $l$  produz um melhoramento substancial na representação, enquanto que para o valor do índice  $j_{max}$  a melhora se dá na representação de detalhes. Como sabemos, a representação exata da função seria obtida variando-se os índices  $l$ ,  $j_{max}$ ,  $k_1$  e  $k_2$  de  $-\infty$  a  $\infty$ , o que não é praticável computacionalmente.

A parametrização escolhida também se mostrou satisfatória para a representação de campos de velocidades sísmicas de complexidades diversas. Notamos que a representação da feição geológica e de valores de velocidade sísmica se mostrou aceitável para coeficientes com índice acima de  $l = 0$ . O índice  $j$  tem papel fundamental para ajuste de detalhes nas representações e foi mantido no menor valor possível a fim de reduzir a quantidade de coeficientes para cada parametrização. Valores adicionais (com  $j$  entre 0 e 3) foram testados para este índice em cada modelo, porém não verificamos melhora nítida nas representações.

Em geral, a representação apresenta maior erro nas discontinuidades das velocidades sísmicas nas camadas em subsuperfície para cada modelo. A parametrização também apresentou menor eficiência na representação do modelo  $M_{5_N}$ , onde grandes alterações de velocidade em menor espaço não foram satisfatoriamente parametrizados.

As reduções pela média de coeficientes consecutivas demonstraram que o aumento de coeficientes permite a representação de áreas variadas do modelo; conforme ampliamos o número de coeficientes disponíveis para a representação melhoramos as feições representadas no modelo parametrizado. Este fato é evidenciado na redução pela média de coeficientes do modelo  $M_{1_N}$ , o modelo acamadado, onde as diversas camadas se tornam visíveis e são representadas com melhor acurácia a cada aumento do número de coeficientes. Um exemplo interessante desta tendência é o modelo  $M_{5_N}$ , o modelo do domo de sal, onde as camadas levemente dobradas às laterais do domo são representadas com 4 coeficientes que, aparentemente, desaparecem na representação com 6 coeficientes e retornam nas reduções pela média

de coeficientes seguintes com valores acurados.

Além disso, observamos que as reduções pela média de coeficientes permitiram representações satisfatórias e pode ser utilizada na diminuição do custo computacional sem altos prejuízos à acurácia uma vez que a quantidade de cálculos de coeficientes pode ser restrita. Para modelos de menor complexidade, como o modelo  $M_{1N}$  (modelo acamadado), observamos velocidades sísmicas e feição geológica razoavelmente representadas com o uso de 12 coeficientes. Para os outros modelos, conseguimos uma representação satisfatória com o emprego de 100 coeficientes. Ambos os resultados demonstram um ótimo produto quando comparados às parametrizações antecessoras, com número de coeficientes totais da ordem de  $10^6$ . A redução percentual no número de coeficientes com resultado satisfatório foi superior a 90% em todas as reduções pela média de coeficientes.

Sugerimos que a origem dos efeitos de borda observados em todos os modelos seja provocada pelo *software* utilizado para representação gráfica destes, uma vez que esses efeitos não são observados nos arquivos que geram as imagens. Outros métodos de interpolação poderiam ser testados para verificar esta sugestão.

Para a representação bidimensional o presente trabalho apresenta a utilização da série de ondaletas bidimensionais gerada a partir da base  $\mathcal{B}$  (Eq. 1.26).

Em estudos futuros, sugerimos: a busca da quantidade ideal de coeficientes para uma representação satisfatória, a análise do traçamento de raios em cada campo de velocidades sísmicas e o cálculo de tempos de trânsito.

# CAPÍTULO 7

## Conclusões

As possibilidades de aplicação da teoria de ondaletas são inúmeras. Neste trabalho usamos a série ondaleta Haar para representar funções e parametrizar campos de velocidades sísmicas em um contexto 2D.

Verificamos que é possível construir um algoritmo para a utilização da série ondaleta Haar para parametrizar funções e campos de velocidades sísmicas, obtendo, com esse propósito resultados satisfatórios. Nos modelos estudados, a representação da feição geológica e valores de velocidade sísmica se mostrou aceitável utilizando-se índices superiores a  $l = 0$ , enquanto que o índice  $j$  apresentou maior importância para ajuste de detalhes.

Através da redução pela média de coeficientes disponíveis para representação da referida série, observamos que é possível parametrizar os campos com uma menor quantidade de coeficientes. A redução percentual no número de coeficientes com resultado satisfatório foi superior a 90% nas reduções pela média em todos os modelos testados.

Recomendamos que o uso da série ondaleta Haar 2D seja explorado em maior extensão: na sísmica para traçamento de raios em modelos de campos de velocidades, no cálculo de tempos de trânsito, e em métodos de migração e inversão.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado a graça de realizar este trabalho e a todos que Ele colocou em meu caminho para me ajudar nesta tarefa.

Agradeço aos meus pais José e Severina, sem o seu exemplo de determinação, amor e força, a caminhada teria sido muito mais difícil. Se em qualquer momento fui bem sucedida foi devido aos seus conselhos e apoio.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Wilson Figueiró pela ajuda, ensinamentos e paciência. Por ter me ajudado a aplicar e expandir o meu conhecimento em tantas conversas e orientações.

Agradeço também a meu irmão George por me trazer tanto orgulho, felicidade e carinho. Aos meus amigos de escola, CEFET e intercâmbio: Catarina, Gerlon, Caren, Rebeca, Gabriele, Suane, Fernanda, Rosana e Clara pelas risadas, conselhos e desabafos. Aos meus colegas de profissão e de turma, em especial Yves, Diego, Taíris, Dett e Alex.

Agradeço: aos professores e funcionários da UFBA, ao CPGG-UFBA, e ao projeto da Rede Temática de Estudo em Geofísica Aplicada do CENPES-Petrobras pela bolsa de graduação oferecida.

Agradeço aos funcionários da Universidade de Leeds pelo suporte e por terem me proporcionado uma grande experiência acadêmica e profissional, em especial: Luisa Nanovo, Scott Martin e professores Phil Murphy, Phil Livermore e Jeffrey Peakall.

## Referências Bibliográficas

- Alaei, B. (2012) Seismic modeling of complex geological structures, In: *Seismic Waves - Research and Analysis*, cap. 11, InTech, Tulsa, Oklahoma.
- Antoine, J.-P.; Murezi, R.; Vandergheynst, P. e Ali, S. T. (2004) *Two-Dimensional Wavelets and Their Relatives*, Cambridge University Press, London.
- Bastos, I. P. (2013) *Parametrização Unidimensional de Campos de Velocidades Sísmicas por Ondaleta de Morlet*, Trabalho de Graduação em Geofísica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Cerqueira, A. G. (2013) *Otimização Empírica de Coeficientes na Parametrização por Série Ondaleta Haar de Campos de Velocidades Sísmicas*, Trabalho de Graduação em Geofísica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Cerveny, V. (2001) *Seismic Ray Theory*, Cambridge University Press, London.
- Chui, C. K. (1992) *An Introduction to Wavelets, Wavelet Analysis and Its Applications*, Academic Press, San Diego.
- Chui, C. K. (1997) *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Fagin, S. W. (1991) *Seismic Modeling of Geologic Structures: Applications to Exploration Problems*, vol. 2, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- Foufoula-Georgiou, E. e Kumar, P. (1994) *Wavelets in Geophysics*, vol. 4, Academic Press, London.
- Gomes, J. (1999) *Function representation, scale spaces and wavelets*, SIGGRAPH 99 Course 'From Fourier Analysis to Wavelets.
- Haar, A. (1910) *Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme*, *Mathematische Annalen*, **69**(3):331–371.
- Kearey, P.; Brooks, M. e Hill, I. (2002) *An Introduction to Geophysical Exploration*, Blackwell Science, Oxford.
- Martinez, A. C. (2012) *Modelagem Sísmica de Tempos de Trânsito para Campos Bidimensionais de Velocidades Parametrizados por Ondaleta Haar*, Trabalho de Graduação em Geofísica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Morettin, P. A. (1999) *Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*, EDUSP, São Paulo.

- dos Santos, R. H. M. (2002) Modelagem Acústica Bidimensional usando Diferentes Parametrizações do Campo de Velocidade, Dissertação de Mestrado em Geofísica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Soares Filho, D. M.; Figueiró, W. M. e Botelho, M. A. B. (2002) Desenvolvimento de Metodologia de Modelagem Física e Numérica de Dados Geofísicos 3D em Diferentes Escalas, Rel. Téc. FINEP: 65.99.0473.00 e FAPEX: 001280 e 001399 (Projeto CTPETRO), CPGG-UFBA, CENPES-Petrobras, Salvador, Bahia.
- de Souza, A. E. C. M. (2004) Campos de Tempo de Trânsito obtidos por Traçamento de Raios Sísmicos em Campos de Velocidade com Parametrização Polinomial, Trabalho de Graduação em Geofísica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Stensrud, D. J. (2007) Parameterization Schemes: Keys to Understanding Numerical Weather Prediction Models, Cambridge University Press, London.
- Teixeira, W.; Fairchild, T.; Taioli, F. e Toledo, M. C. M. (2000) Decifrando a Terra, Companhia Editora Nacional, São Paulo.
- Yilmaz, O. (2001) Seismic Data Analysis, Society of Exploration Geophysicists, Oxford.
- Zhou, H.-W. (2014) Practical Seismic Data Analysis, Cambridge University Press, London.