

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA



GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

SELEÇÃO DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO ATRAVÉS DA VALIDAÇÃO CRUZADA GENERALIZADA: APLICAÇÕES EM GEOTOMOGRAFIA ACÚSTICA E ELETROMAGNÉTICA

NAIANE PEREIRA DE OLIVEIRA

SALVADOR – BAHIA

DEZEMBRO - 2010







Seleção do Parâmetro de Regularização através da Validação Cruzada Generalizada: Aplicações em Geotomografia Acústica e Eletromagnética

por

NAIANE PEREIRA DE OLIVEIRA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

DO

Instituto de Geociências

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

11	- morna,	
Vite B	una de Olijano.	
-	1 .	
1 men	Lemano	

Comissão Examinadora

Dr. Amin Bassrei - Orientador

Dr. Newton Barros de Oliveira

Dr. Thierry Jacques Lemaire

Data da aprovação: 20.12.2010

Dedico este trabalho aos meus pais, João e Raquel, e ao meu irmão, Robson, por me apoiarem incondicionalmente em todos os momentos da minha vida.

RESUMO

Os problemas inversos geofísicos são em geral mal-postos, pois suas soluções podem não ser únicas, não existir, ou então não depender continuamente dos dados de entrada. Além disso, geralmente, os problemas inversos geofísicos não são lineares, uma opção de resolução é realizar uma linearização do problema com o propósito de que se possa utilizar os artifícios da álgebra linear. Um método de inversão que vem sendo utilizado na Geofísica recentemente, basicamente em Geofísica de Reservatórios, é a tomografia que pode ser agrupada em duas classes distintas: tomografia cinemática que utiliza os tempos de trânsito entre fonte e receptor e a tomografia dinâmica que utiliza a forma de onda recebida. A tomografia se encaixa como um problema inverso mal-posto, sendo, necessária alguma metodologia para que soluções consistentes possam ser obtidas.

A metodologia de regularização empregada foi a Regularização de Tikhonov que introduz o termo de suavização à solução e possui um parâmetro chamado parâmetro de regularização λ , cuja escolha é de crucial importância em termos de balanceamento entre minimização de erro entre os dados e suavização dos parâmetros do modelo. Neste trabalho, apresentamos um método para se extrair o parâmetro ótimo chamada Validação Cruzada Generalizada, GCV do inglês *Generalized Cross Validation*, sendo baseada no princípio da validação cruzada que faz considerações estatísticas afim de indicar um valor mais apropriado para o parâmetro ótimo de regularização.

A utilização de dados sintéticos foi necessária a fim de se avaliar a metodologia aplicada à tomografia cinemática, pois desta forma, pode-se ponderar o erro entre os modelos verdadeiros e estimados e assim analisar com um maior controle o resultado do experimento. Nesse contexto, realizamos simulações com modelos de distribuição de velocidades que descrevem situações geológicas de complexidade suficiente para justificar o trabalho. Usamos o método GCV em tomografia sísmica e também tomografia eletromagnética, tanto na abordagem linear como também na linearizada, os resultados obtidos serviram para validar a aplicabilidade da GCV na escolha do λ ótimo de regularização.

ABSTRACT

Geophysical inverse problems are in general ill-posed, because their solutions can be non-unique, non-existent, or do not depend on the input data continuously. In addition, usually, geophysical inverse problems are non-linear. One option is to perform a linearization of the problem in order that we can use the linear algebra. Tomography is an inversion method that has been used recently in Geophysics, basically in Reservoir Geophysics, which can be grouped into two distinct classes: kinematic tomography using travel times between sources and receivers and dynamic tomography which uses the received waveform. Tomography fits like an inverse problem ill-posed, being, to necessary any methodology that consistent solutions can be obtained.

The methodology of regularization employed was the Tikhonov Regularization which introduces the term smoothing to the solution and has a parameter called optimum parameter of regularization λ , whose choice is of crucial importance in terms of balancing between minimizing the error between data and smoothing of parameters of model. In this paper, we present a method to extract the optimum parameter called Generalized Cross Validation, GCV, being based on the principle of cross-validation that makes statistical considerations in order to indicate a value more appropriate for the optimum parameter of regularization.

The use of synthetic data was necessary in order to assess the methodology applied to kinematic tomography, because this way, one can consider the error between the estimated and true models and thus analyze with greater control over the outcome of the experiment. In this context, we conduct simulations with models distribution of velocity that describe geological situations of enough complexity to justify the work. We use the GCV on seismic tomography and electromagnetic tomography linear and linearized approach, results obtained serve as basis to validate the applicability of GCV in the choice of λ optimal of regularization.

ÍNDICE

RESU	ΜΟ	iii
ABST	RACT	iv
ÍNDIC	$\Sigma \mathbf{E}$	v
ÍNDIC	E DE FIGURAS	vii
INTRO	DDUÇÃO	1
CAPÍ	ГULO 1 Teoria da Inversão	5
1.1	Formulação do Problema Inverso	6
1.2	Sistemas Lineares	6
1.3	Problemas Inversos e as Questões de Condicionamento	7
1.4	Solução de Sistemas Lineares	8
	1.4.1 Os Mínimos Quadrados	9
	1.4.2 Os Mínimos Quadrados Amortecidos	10
	1.4.3 Decomposição em Valores Singulares	10
1.5	Método Linearizado com Iteração Simples	12
CAPÍ	Geotomografia Image: Constraint of the second sec	14
2.1	Tomografia de Tempos de Trânsito	14
2.2	Tomografia Eletromagnética de Tempos de Trânsito	16
	2.2.1 A Velocidade de Propagação da Onda Eletromagnética	16
2.3	Tomografia Sísmica de Tempos de Trânsito	19
	2.3.1 A Velocidade de Propagação da Onda Acústica	20
2.4	Modelagem Tomográfica	22
2.5	Traçado de Raios	23
	2.5.1 Equação do Raio	24
	2.5.2 Ligação entre Fonte e Receptor	28
CAPÍ	ГULO 3 Validação Cruzada Generalizada na Escolha do Parâmetro	
	Ótimo de Regularização	31
3.1	Regularização	31
3.2	Estimativa do Parâmetro de Regularização	33
	3.2.1 A Validação Cruzada Generalizada	34

	3.2.2 Uma Propriedade Ótima do GCV na Estimativa do λ	35
	3.2.3 Limites da GCV	36
CAPÍ	TULO 4 Modelamento e Inversão Utilizando Raios Retos	37
4.1	Descrição do Modelo	37
4.2	Inversão de Dados Sísmicos	40
4.3	Inversão de Dados Eletromagnéticos	44
4.4	Considerações	51
CAPÍ	TULO 5Modelamento e Inversão Utilizando Raios Curvos	57
5.1	Descrição do Modelo	57
5.2	Inversão de Dados Sísmicos	59
5.3	Inversão de Dados Eletromagnéticos	64
5.4	Considerações	69
CAPÍ	Conclusões	71
Agrade	ecimentos	73
Referê	ncias Bibliográficas	74

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	O problema inverso visualizado como duas etapas	5
2.1	Exemplo de aquisição de dados e traçado de raios para levantamento to- mográfico num simples modelo de duas camadas.	23
2.2	Interpolação bilinear de uma região discretizada.	27
2.3	Representação esquemática do <i>shooting method</i> .	28
2.4	Representação esquemática do <i>linking method</i>	29
4.1	Um exemplo de percurssos com traçado de raios retos. A distância entre poços é de 200 m e a profundidade varia de 0 a 400 m .	38
4.2	Modelo verdadeiro 1 (a) Tomograma eletromagnético, velocidade em $m/\mu s$. (b) Tomograma sísmico, velocidade em m/s	39
4.3	Curva GCV para regularização de ordem 0 na inversão sísmica (Modelo 1),	00
4.4	com dados livres de ruídos	40 41
4.5	Curva GCV para regularização de ordem 2 na inversão sísmica (Modelo 1), com dados livres de ruídos	41
4.6	Modelo 1 recuperado na inversão sísmica para (a) regularização de ordem 0 (b) regularização de ordem 1 (c) regularização de ordem 2	49
4.7	Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos	42
4.8	dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 0 Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos	43
1.0	dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 1	43
4.9	Função GCV com cinco niveis diferentes de ruido gaussiano adicionado aos dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 2	44
4.10	Modelo 1 recuperado na inversão sísmica com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS),	
	(b) " $\alpha = 0.05$ " (0.5% RMS), (c) " $\alpha = 0.1$ " (1% RMS), (d) " $\alpha = 0.3$ " (3% RMS), (e) " $\alpha = 0.5$ " (5% RMS), normalização do ordere 0	45
/ 11	$\alpha = 0.5$ (5% KMS), regularização de ordein 0	40
7.11	(b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e)	
	" $\alpha = 0.5$ " (5% RMS), regularização de ordem 1	46
4.12	Modelo 1 recuperado na inversão sísmica com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS),	
	(b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e)	
	" $\alpha = 0.5$ " (5% RMS), regularização de ordem 2	47

4.13	Curva GCV para regularização de ordem 0 na inversão eletromagnética (Mo-	
	delo 1), com dados livres de ruídos	48
4.14	Curva GCV para regularização de ordem 1 na inversão eletromagnética (Mo-	
	delo 1), com dados livres de ruídos	48
4.15	Curva GCV para regularização de ordem 2 na inversão eletromagnética (Mo-	
	delo 1), com dados livres de ruídos	48
4.16	Modelo 1 recuperado na inversão eletromagnética para (a) regularização de	
	ordem 0 (b) regularização de ordem 1 (c) regularização de ordem 2	49
4.17	Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos	
	dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 0	50
4.18	Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos	
	dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 1	50
4.19	Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos	
	dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 2	51
4.20	Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5%	
	RMS), (c) " $\alpha = 0.1$ " (1% RMS), (d) " $\alpha = 0.3$ " (3% RMS), (e) " $\alpha = 0.5$ " (5% RMS),	
	regularização de ordem 0 na inversão eletromagnética	52
4.21	Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5%	
	RMS), (c) " $\alpha = 0.1$ " (1% RMS), (d) " $\alpha = 0.3$ " (3% RMS), (e) " $\alpha = 0.5$ " (5% RMS),	
	regularização de ordem 1 na inversão eletromagnética	53
4.22	Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5%	
	RMS), (c) " $\alpha = 0.1$ " (1% RMS), (d) " $\alpha = 0.3$ " (3% RMS), (e) " $\alpha = 0.5$ " (5% RMS),	
	regularização de ordem 2 na inversão eletromagnética	54
F 1	Madela conductor $2(z)$ Tours means contracted and a set $(z, (b)$ Tours	
0.1	Modelo verdadelro 2 (a) Tomograma sismico velocidades em m/s . (b) Tomo-	EO
5.0	grama electromagnetico velocidades em $m/\mu s$	98
0.2	Curva GCV em função do parametro de regularização na inversão sistinca,	50
5.0	para regularização de ordem 0, para diferentes iterações de tração de raio.	99
0.5	romograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 0, na	60
5.4	Tomograma estimada na querta itoração para regularização de ordem 0, na	00
0.4	invorsão sísmico	60
55	Curva CCV em função do parâmetro do regularização na inversão sísmica	00
0.0	para regularização de ordem 1, para diferentes iterações de tracado de raio	61
56	Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 1, na	01
0.0	inversão sísmica	61
57	Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 1, pa	01
0.1	inversão sísmica	62
5.8	Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão sísmica	02
0.0	para regularização de ordem 2 para diferentes iterações de traçado de rajo	62
	para regularização de ordem 2, para diferences nerações de traçado de falo.	02

5.9	.9 Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 2, n	
	inversão sísmica.	63
5.10	Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 2, na	
	inversão sísmica.	63
5.11	Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletro-	
	magnética, para regularização de ordem 0, para diferentes iterações de traçado	
	de raio	64
5.12	Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 0, na	
	inversão eletromagnética	65
5.13	Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 0, na	
	inversão eletromagnética	65
5.14	Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletro-	
	magnética, para regularização de ordem 1, para diferentes iterações de traçado	
	de raio	66
5.15	Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 1, na	
	inversão eletromagnética.	66
5.16	Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 1, na	
	inversão eletromagnética.	67
5.17	Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletro-	
	magnética, para regularização de ordem 2, para diferentes iterações de traçado	
	de raio	67
5.18	Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 2, na	
	inversão eletromagnética.	68
5.19	Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 2, na	
	inversão eletromagnética.	68

INTRODUÇÃO

A geotomografia foi incorporada na Geofísica de Exploração com o propósito de fornecer imagens de regiões do interior da Terra configuradas como potenciais reservatórios. Tal como a tomografia médica ela é classificada como um método de inversão de dados. A tomografia consiste em uma técnica de reconstrução de imagens por meio do mapeamento e soma dos valores de propriedades físicas em determinadas direções (Bassrei, 1990) - fato que fez gerar o termo geotomografia empregando-se ondas eletromagnéticas ou ondas mecânicas. Em outras palavras, é um tipo especial de problema inverso que permite estimar uma função utilizando-se integrais de linha.

A tomografia tradicional requer uma distribuição de fontes e receptores em torno do objeto a ser imageado (Stewart, 1991). Neste trabalho, desenvolve-se uma metodologia de inversão tomográfica em geometria de aquisição interpoços (ou também chamada de XWP *Cross Well Profile*). Nessa configuração fontes e receptores estão dispostos ao longo de poços e utilizamos, portanto, ondas transmitidas. A técnica tomográfica se agrupa em duas classes: tomografia de tempos de trânsito que leva em consideração apenas o tempo de percurso entre fontes e receptores e a tomografia dinâmica que, também, considera a forma da onda do sinal captado pelo receptor.

Neste trabalho, utilizamos a tomografia de transmissão cujos dados de entrada são os tempos de trânsito medidos entre fontes e receptores e os parâmetros de modelo são o vetor de vagarosidades (recíprocos das velocidades) do meio bidimensional, consituindo uma abordagem cinemática.

A inversão tomográfica é um problema mal-posto devido ao fato das condições de existência, unicidade e estabilidade não serem completamente satisfeitas. Na resolução numérica de tais problemas, técnicas de regularização são empregadas com a intenção de fornecer melhor condicionamento. A regularização por matrizes de derivadas, mais conhecida como regularização de Tikhonov (Tikhonov e Arsenin, 1977), é freqüentemente usada na literatura, de forma não diferente requerido neste trabalho. Esta introduz termos referente à suavidade do modelo para a resolução do problema usando aproximações numéricas de derivadas (mais precisamente matrizes de derivadas para primeira e segunda derivada) e requerendo a determinação adequada de uma constante chamada parâmetro de regularização λ .

Na presente pesquisa, propõem-se o emprego de um método estatístico na seleção deste parâmetro λ , uma vez que a boa escolha de λ garante uma boa inversão. Este método é

2

conhecido como Validação Cruzada Generalizada (GCV do inglês Generalized Cross Validation). O GCV sugere que um bom valor para o parâmetro de regularização deve prever dados do vetor de tempos de trânsito que estejam faltando ou que foram retirados. Mais precisamente, se um elemento do vetor de dados for retirado, então a solução regularizada correspondente deve prever bem essa falta. O critério GCV é baseado no principio da validação cruzada que consiste em resolver o problema inverso regularizado omitindo-se um dado do vetor de dados por vez. Em cada realização é empregado um valor diferente e determinado do parâmetro de regularização, se o λ usado for adequado espera-se que o vetor de dados calculados obtidos na modelagem direta para a k-ésima interação seja bem próximo do vetor de dados observados. O ponto ideal da curva GCV, portanto, é o minimo e a sua visualização, e a conseqüente extração do parâmetro ótimo, são tarefas triviais.

Diversas pesquisas em inversão de dados utilizando o método GCV foram conduzidas com o intuito de obter uma função invariante sobre transformações ortogonais e de fácil implementação a partir da validação cruzada convencional, uma discussão sobre GCV se encontra em Golub et al. (1979), Craven e Wahba (1979) e Wahba (1990). O GCV foi introduzido por Craven e Wahba (1979) no contexto de suavização de *splines* onde é comprovada sua experiência na experiência prática e na teoria. Foi aplicado por Girard (1987) em um problema de tomografia computadorizada, por Santos (1995) em tomografia de emissão de pósitrons em que utiliza o GCV como critério de parada em métodos Gradiente Conjugado e Técnica de Reconstrução Algébrica (ART do inglês *Algebraic Reconstruction Technique*). Na comunidade geofísica, o critério GCV foi aplicado na inversão 1-D de dados eletromagnéticos por Farquharson e Oldenburg (2004), em sismologia de exploração por Santos e Bassrei (2007) em tomografia cinemática eletromagnética, numa aplicação geofísica, e sísmica, o que torna o trabalho mais relevante

Na validação da aplicabilidade do método GCV em problemas inversos geofísicos, usouse a tomografia de tempos de trânsito sísmica e eletromagnética. Na tomografia sísmica interpoço os tempos de percursso são providos da emissão da onda acústica na propagação pelo meio de estudo, e a velocidade de propagação dependende das propriedades elásticas intrísecas do meio de propagação da energia, este relacionamento se dá por meio das constantes elásticas. Já na tomografia eletromagnética interpoço a emissão e propagação do pulso eletromagnético de alta freqüência fornece os tempos de trânsitos, e a velocidade de propagação do pulso é determinada pelas propriedades eletromagnéticas intrísecas do meio: a permeabilidade magnética μ e a permissividade dielétrica ϵ . Ambas culminam em imagens de distribuições de velocidades em alta resolução.

O primeiro passo é a resolução do problema direto de encontrar o percurso das ondas geradas para o imageamento, escolhendo o melhor algoritmo de traçado de caminhos para o modelo adotado. Neste trabalho, adota-se a discretização da região alvo com vagarosidade constante em cada célula, sendo assim, um algoritmo vantajoso e adotado para o traçado de raios é o mesmo descrito por Schots (1990), em todo caso, é sempre necessário fornecer uma distribuição de velocidades. Essa modelagem pode ser aproximada para raios retos em casos os quais não há grandes contrastes de velocidades para o meio, contudo, os meios geológicos são complexos comportando grandes mudanças de velocidades para uma mesma região. Neste caso, a modelagem é feita com traçamento de raios curvos, mas de possível linearização quando usados em métodos iterativos.

Tem-se as duas situações na simulações numéricas deste trabalho, num primeiro momento uma abordagem linear (raios retos) e, num segundo momento, abordagem linearizada (raios curvos) culminando em aproximações de estimativas da distribuição de propriedades físicas mapeadas com a tomografia sísmica e eletromagnética. Nas simulações lineares usouse dados livres e contaminados por ruídos, para as três ordens de regularização: ordem zero corresponde à matriz identidade sendo que neste caso a solução se reduz ao método dos mínimos quadrados amortecidos; ordem um equivale à primeira derivada e a regularização de ordem dois correspondendo à segunda derivada.

Para simulações mais realistas, usa-se o método linearizado simples neste trabalho, pois a tomografia de tempos de trânsito na geofísica é altamente não linear. Um método iterativo é um processo em que se obtém uma sequência de soluções aproximadas do problema, tal que cada termo da sequência atual é obtido a partir dos anteriores, nesse contexto, parte-se de um modelo inicial para começar as iterações, caso ocorra convergência, as mudanças no modelo serão pequenas, sendo a aproximação linearizada uma descrição adequada do problema.

È importante salientar que a inversão dos dados geofísicos recorreu a um processo de inversão matricial lançando mão da técnica de Decomposição em Valores Singulares (SVD do inglês *Singular Value Decomposition*) onde a matriz a ser invertida é decomposta em três matrizes, duas ortonormais e uma diagonal.

Após realizações de tais simulações com dados sintéticos sem ruído e contaminados com ruídos, observou-se que o λ escolhido com a técnica GCV permitiu recuperar os dados com boa aproximação. Essa técnica oferece maior segurança na escolha do parâmetro ótimo por indicar sempre um único ponto de convergência no intervalo de parâmetros trabalhados.

A seguir serão descritos o conteúdo de cada um dos capítulos elaborados nesse trabalho de graduação:

Capítulo 1 - Teoria da Inversão. Neste capítulo é feita uma revisão da teoria da inversão, iniciando da definição e comparação entre o problema direto e o problema inverso. Em seguida discute-se problemas estruturais da teoria da inversão: as questões de existência, unicidade e estabilidade. Uma classificação de sistemas lineares segundo Menke (1989) é apresentada, além dos principais métodos de resolução de sistemas lineares. São explanados o método SVD, sucintamente, e o método de iteração simples para sistemas linearizados, os quais foram usados nas simulações numéricas.

Capítulo 2 - Geotomografia. Faz-se uma introdução à tomografia com ênfase a tomografia de tempos de trânsito sísmica e eletromagnética. Apresenta-se um estudo sobre o método de traçamento de raios e sua aplicação em inversão tomográfica. Tal como, o modo de discretização de meios em pixels, discute-se técnicas de *ligação do raio* sendo uma parte custosa por determinar o ângulo de saída do raio da fonte de forma que atinja o receptor.

Capítulo 3 - Validação Cruzada Generalizada na Escolha do Parâmetro Ótimo de Regularização. Realiza-se um estudo da teoria de regularização por matrizes de derivadas e, com mais detalhe, a teoria que fundamenta o método GCV definindo-o e apresentado propriedades importantes.

Capítulo 4 - Modelamento e Inversão Utilizando Raios Retos. São realizadas as simulações para o caso linear para tanto desenvolve-se um modelo sintético de suficiente complexidade geológica de forma justificar a avaliação do GCV. São analisados os tomogramas recuperados sísmicos e eletromagnéticos para as três ordens de regularização com dados ruídosos e não ruídosos.

Capítulo 5 - Modelamento e Inversão Utilizando Raios Curvos. Apresenta-se um novo modelo sintético de distribuições de velocidade de suficiente complexidade geológica de forma a também justificar a aplicação, mais realista, no caso linearizado. Aplicados em tomogramas sísmico e eletromagnético.

Capítulo 6 são apresentadas as conclusões.

CAPÍTULO 1

Teoria da Inversão

Considerando o problema de Dirichlet, em que se deseja determinar a densidade das rochas em subsuperfície estimando um modelo imaginando a Terra como n camadas esféricas concêntricas, a inversão é a técnica empregada em tais problemas. A qual estima os parâmetros de um determinado modelo utilizando os dados medidos como dados de entrada. De forma contrária, a técnica de modelagem direta resulta em criar um modelo sintético para a obtenção dos referidos dados.



Figura 1.1: O problema inverso visualizado como duas etapas.

A Figura 1.1 descreve simplificadamente uma relação entre o problema direto e o problema inverso. O problema inverso é relativamente mais complicado, uma vez que, em situações reais podemos obter infinitos modelos que se adequam aos mesmos dados. Uma vez obtido os parâmetros do modelo, ou simplesmente modelo (\mathbf{m}^{est}), utilizamos os parâmetros de dados (\mathbf{d}) para analisar as propriedades deste modelo e o que ele preserva do modelo real, tal como os tipos de erro e ruídos.

Este capítulo introduz os fundamentos da teoria da inversão utilizando a notação matricial para sistemas lineares discretizados, adotado também, posteriormente, na inversão de dados geofísicos (inversão tomográfica sísmica e eletromagnética).

1.1 Formulação do Problema Inverso

Na análise de dados geofísicos o ponto de partida é a descrição dos mesmos, onde um vetor fornece um meio prático de representação desses valores. Se M medições são realizadas em um problema particular, por exemplo, pode-se considerar estes números como elementos do vetor **d** de comprimento M. Similarmente, os parâmetros do modelo podem ser representados como elementos do vetor **m**, o qual tem comprimento N:

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4, ..., d_M]^T, \mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_N]^T.$$
(1.1)

O problema inverso pode ser representado pela equação explicita linear:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m},\tag{1.2}$$

sendo esta equação a base do estudo da teoria da inversão discretizada, e

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & g_{M3} & g_{M4} & \dots & g_{MN} \end{pmatrix}$$
(1.3)

é o operador matricial, de dimensão $M \times N$, aplicado sobre os parâmetros do modelo. Essa matriz G pode ser uma aproximação de um operador g não linear: $\mathbf{d} = g(\mathbf{m})$.

Para determinação dos parâmetros do modelo \mathbf{m} o sistema na equação 1.2 é resolvido aplicando a inversa do operador G:

$$\mathbf{m} = G^{-1}\mathbf{d}.\tag{1.4}$$

No entanto, G só possui inversa se for quadrada e não-singular, ou seja, com posto completo. Do contrário, como na maioria dos problemas inversos em geofísica, tornam-se necessários procedimentos de resolução para matrizes retangulares ou de posto incompleto. O método utilizado neste trabalho para obtenção da matriz inversa, ou pseudo-inversa, foi Decomposição por Valores Singulares explanado adiante.

1.2 Sistemas Lineares

Na formulação do problema inverso, visto anteriormente, a equação explicita linear $\mathbf{d} = G\mathbf{m}$ na notação matricial pode ser reescrita como um sistema de equações lineares com M equações e N incógnitas:

Cujos elementos g_{ij} são os coeficientes do sistema acima, podendo assumir valores complexos. O vetor de incógnitas $(m_1, m_2, ..., m_N)$ é a solução do sistema linear.

A classificação do problema linear está baseado no fornecimento suficiente de informação para a determinação dos parâmetros do modelo, ou incógnitas do sistema, segundo Menke (1989). Sendo G a matriz $M \times N$ o problema será:

• Subdeterminado – quando não prover informação suficiente para determinar os parâmetros do modelo, ou seja, os problemas indeterminados ocorrem quando existem mais incógnitas do que dados, isto é M < N. Neste caso, existem várias soluções que satisfazem a sistema;

• Determinado – quando existe informação suficiente e exata, isto é M = N, temos, então, única solução;

• Sobredeterminado – quando temos mais dados que incógnitas, isto é M > N. É possível se ter problemas com algum grau de indeterminação mesmo quando M > N tal como é possível se ter algum grau de sobredeterminação mesmo quando M < N (Menke, 1989). Tratam-se de problemas singulares, freqüentes na geofísica.

1.3 Problemas Inversos e as Questões de Condicionamento

No processo de resolução do problema inverso, deve-se realizar uma análise prévia com relação às questões de existência, unicidade e estabilidade da solução, se uma dessas condições falha o problema é dito mal-posto. A noção de problema bem-posto partiu do matemático francês J.S. Hadamard com o pensamento de que os problemas mal-postos não descrevem algum fenômeno natural, posteriormente, comprovou-se a falsidade de tais idéias. Um problema inverso pode ser chamado de bem-posto, no sentido de Hadamard, se:

Existência. A solução do problema linear existe, por conseguinte, o sistema em questão deve ser inversível (matriz quadrada e não-singular), porém, quando se trata de sistemas retangulares e quadrados singulares o operador matricial possui posto incompleto (G^{-1} não existe). Os problemas com posto incompleto são caracterizados por uma matriz que tem grupo de valores singulares pequenos, um tratamento matemático de tais casos sería a extração desses pequenos valores singulares com o conhecimento da SVD da matriz em questão reformulando, desta forma, o problema com uma matriz bem-condicionada. Existem situações em que a matriz de posto incompleto possui uma inversa à esquerda ou à direita, mas não uma inversa comum e única, por esse motivo, para a solução existir deve-se saber se uma questão que é necessária é também suficiente para que alguma hipotése seja aceita.

Ambigüidade. A solução é única, a ambigüidade da solução é a possibilidade de se poder construir mais de um modelo consistente como uso dos dados de entrada, em outras palavras, mais de uma causa é sempre possível para o mesmo efeito. Daí, faz-se o uso de informações extras - informações a *priori* - no problema para torná-lo único. De todo modo, a unicidade é um aspecto importante e difícil de ser atendido nos problemas inversos geofísicos exploracionais.

Estabilidade. A solução do problema é estável, implica que a solução depende continuamente dos dados de entrada. A estabilidade é necessária se desejamos assegurar que pequenas variações nos dados produzam pequenas pertubações na solução, do contrário, o problema é instável e também chamado de mal-condicionado. Essa propagação de erro relativo na solução com respeito ao erro relativo nos dados é controlada pelo número de condição do operador matricial, por definição: $NC = ||G|| ||G^{-1}||$. Especificamente, resolvendo o problema pertubado $G(\mathbf{m} + \delta \mathbf{m}) = \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}$, temos que:

$$\frac{\|\delta \mathbf{m}\|}{\|\mathbf{m}\|} \le NC \frac{\|\delta \mathbf{d}\|}{\|\mathbf{d}\|},\tag{1.6}$$

sendo $\delta \mathbf{m}$ a variação na solução e $\delta \mathbf{d}$ a variação nos dados. Se NC é pequeno o sistema linear é bem-condicionado, se NC é grande o sistema é mal-condicionado. O número de condição NC também pode ser expresso pela razão entre o maior valor singular, σ_{max} , e o menor valor singular, σ_{min} : $NC = \sigma_{max}/\sigma_{min}$, sugere que operadores de posto incompleto também são instáveis.

Em suma, para tratarmos com êxito um problema inverso mal-posto requer que façamos o uso de algum método de regularização tal como o escolhido neste trabalho: Regularização de Tikhonov.

1.4 Solução de Sistemas Lineares

Serão esboçados alguns métodos de resolução de sistemas lineares: o método dos mínimos quadrados e os mínimos quadrados amortecidos, que consistem em casos particulares da regularização de Tikhonov, e o método da Decomposição por Valores Singulares o qual foi utilizado neste trabalho como método de obtenção da inversa matricial.

1.4.1 Os Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é aplicado sobre sistemas sobredeterminados e consiste em uma solução cujo somatório do quadrado dos erros é mínimo.

Se considerarmos um processo de modelagem em que os dados \mathbf{d}^{cal} são parâmetros de entrada do modelo e a saída é dada por: $\mathbf{d}^{cal} = G\mathbf{m}^{est}$. Temos também o vetor \mathbf{d}^{obs} que descreve o comportamento real observado. O problema é escolher os parâmetros \mathbf{d}^{cal} de forma a minimizar a diferença entre o dado real \mathbf{d}^{obs} e o previsto \mathbf{d}^{cal} . Obtemos $\mathbf{e} = \mathbf{d}^{obs} - G\mathbf{m}^{est}$, cuja medida é dada pela norma ||.||.

Sendo o sistema linear: $\mathbf{d} = G\mathbf{m}$, o somatório do quadrado dos erros é dado pela função objetivo ou função custo:

$$S = ||\mathbf{e}||^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m})$$

$$S = \mathbf{d}^T \mathbf{d} - 2\mathbf{m}^T G^T \mathbf{d} + \mathbf{m}^T G^T G\mathbf{m}.$$
(1.7)

Derivando S em relação a **m** e igualando a zero:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}^T} = 0 - 2G^T \mathbf{d} - 2G^T G \mathbf{m} = 0.$$
(1.8)

Implica que:

$$G^{T}\mathbf{d} = G^{T}G\mathbf{m}$$

$$\mathbf{m} = (G^{T}G)^{-1}G^{T}\mathbf{d}.$$
 (1.9)

Sabendo que a matriz $G \notin m \times n$ e a matriz **d** $\notin m \times 1$.

Em casos que a matriz $G^T G$ é não singular, temos solução única, para isto o posto de *G* tem de ser igual a *n*. Caso contrário, a matriz $G^T G$ é singular e aplica-se o método dos mínimos quadrados amortecidos (*damped least squares*).

Em alguns casos o cálculo de $G^T G$ para matrizes não-singulares pode causar dificuldades que podem ser facilmente resolvidas usando a decomposição QR. Veremos: se $G = Q_o R_o$ é decomposição tal que Q_o é $m \times n$ e ortogonal, enquanto R_o é $n \times n$ e triangular. Então, a equação (1.9) pode ser escrita como:

$$(Q_o R_o)^T \mathbf{d} = (Q_o R_o)^T (Q_o R_o) \mathbf{m}$$

$$R_o^T Q_o^T \mathbf{d} = R_o^T R_o \mathbf{m}$$
(1.10)

Como o posto de G é igual a n, então $R_o \in R_o^T$ são não-singulares e o problema se resume a um simples sistema que, se resolvido, fornece a solução de mínimos quadrados.

$$Q_o^T \mathbf{d} = R_o \mathbf{m}. \tag{1.11}$$

1.4.2 Os Mínimos Quadrados Amortecidos

Quando $G^T G$ é singular acrescenta-se uma pequena pertubação afim de extrair essa singularidade. Isso é obtido através da inserção do termo $\epsilon^2 \mathbf{m}^T \mathbf{m}$ na função custo utilizada nos mínimos quadrados convencional, a constante ϵ^2 é o fator de amortecimento e deve ser escolhido adequadamente de modo que a matriz passe a ser inversível sem apresentar um maior erro na solução. Deste modo, minimiza-se a seguinte função objetivo:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^{T}\mathbf{e} + \epsilon^{2}\mathbf{m}^{T}\mathbf{m}$$

$$\Phi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m}^{T})(\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + \epsilon^{2}\mathbf{m}^{T}\mathbf{m}$$

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{d}^{T}\mathbf{d} - 2\mathbf{m}^{T}G^{T}\mathbf{d} + \mathbf{m}^{T}G^{T}G\mathbf{m} + \epsilon^{2}\mathbf{m}^{T}\mathbf{m}.$$
(1.12)

Derivando $\Phi(\mathbf{m})$ em relação a \mathbf{m} e igualando a zero:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 0 - 2G^T \mathbf{d} + 2G^T G \mathbf{m} + 2\epsilon^2 \mathbf{m} = 0, \qquad (1.13)$$

implica:

$$(G^T G + \epsilon^2 I)\mathbf{m} = G^T \mathbf{d},\tag{1.14}$$

multiplicando-se ambos termos à esquerda por $(G^T G + \epsilon^2 I)^{-1}$:

$$\mathbf{m}^{est} = (G^T G + \epsilon^2 I)^{-1} G^T \mathbf{d}.$$
(1.15)

1.4.3 Decomposição em Valores Singulares

A Decomposição em Valores Singulares do inglês Singular Value Decomposition (SVD) é uma técnica empregada para a simplificação de matriz associada à uma transformação linear. As matrizes que representam problemas geofísicos são, via de regra, retangulares não existindo portanto uma matriz inversa. Nessas condições, pode-se determinar a pseudo-inversa de uma determinada matriz G utilizando-se a SVD.

Seja a transformação linear definida por meio da matriz $G_{m \times n}$: $\mathbf{d} = G\mathbf{m}$. Supondo que são usados como base dois conjuntos ortonormais arbitrários de vetores $v_1, ..., v_n \in u_1, ..., u_m$, para o espaço do domínio \Re^n e imagem \Re^m respectivamente. Então, podemos definir matrizes ortonormais $V \in U$, $n \times n \in m \times m$, por (Noble e Daniel, 1977):

$$V = [v_1, ..., v_n] \quad e \quad U = [u_1, ..., u_m], \tag{1.16}$$

então as transformações para o espaço do domínio e imagem ficam, respectivamente:

$$\mathbf{m} = V\mathbf{m}' \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{d} = U\mathbf{d}', \tag{1.17}$$

fazendo $\mathbf{d}' = U^T \mathbf{d}$, temos $\mathbf{d}' = U^T G \mathbf{m} = U^T G V \mathbf{m}'$ então $G' = U^T G V$.

Em suma, a SVD consiste na determinação de duas matrizes ortonormais $U \in V$ tais que a matriz calculada G' seja a representação mais simples possível da matriz G, ou seja, para que forneça em toda a sua generalidade a simplificação de G a uma forma diagonal G', ou Σ mudando de notação.

Precisamente, $\Sigma \notin m \times n$ se $G \notin m \times n$:

$$\Sigma = U^{T} G V$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$
(1.18)

onde $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n > 0$ para uma matriz G de posto n. Com as considerações expostas anteriormente, obtemos a decomposição:

$$G = U\Sigma V^T. (1.19)$$

De (1.19) segue-se que:

$$G^{T}G = V\Sigma^{T}U^{T}U\Sigma V^{T} = V(\Sigma^{T}\Sigma)V^{T}, \qquad (1.20)$$

onde $\Sigma^T \Sigma$ é uma matriz diagonal $n \times n$, pois $\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Como V é ortonormal os valores de σ_i^2 (os elementos diagonais de $\Sigma^T \Sigma$) são os autovalores de $G^T G$, enquanto que as colunas de V fornecem os autovalores associados. Semelhantemente:

$$GG^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T, \tag{1.21}$$

sendo $\Sigma\Sigma^T$ também diagonal cujos elementos diagonais σ_i^2 dão os autovalores de GG^T com autovetores associados dados pelas colunas de U.

Segue da definição que as raízes quadradas estritamentes positivas de σ_i dos autovalores não-nulos de $G^T G$ (e, equivalentemente, de $G G^T$) são chamados os valores singulares de G. Se, por fim, definirmos a matriz $n \times m \Sigma^+$:

$$\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} E & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.22)$$

tal que E é a matriz diagonal $k \times k$ cujo *i*-ésimo elemento é $e_{ii} = \sigma_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq k$, sendo a inversa da matriz diagonal Σ de posto k. É sempre possível determinar a inversa generalizada ou pseudo-inversa (de Moore-Penrose) G^+ de G, e será a matriz $n \times m$, pela decomposição por valores singulares:

$$G^+ = V\Sigma^+ U^T. \tag{1.23}$$

Embora a condição $G^+G = I = GG^+$ possa não ser satisfeita, a pseudo-inversa G^+ será única se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- 1. $GG^+G = G;$
- 2. $G^+GG^+ = G^+;$
- 3. $(GG^+)^T = GG^+;$
- 4. $(G^+G)^T = G^+G$.

Por conseguinte, a solução de qualquer sistema que precise de uma inversão matricial pode ser obtida com a inversa generalizada (de Moore-Penrose). Com efeito, a pseudo-inversa pode substituir a inversa clássica:

$$\mathbf{m} = G^{+}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{m} = (G^{T}G)^{+}G^{T}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{m} = (G^{T}G + \epsilon^{2}I)^{+}G^{T}\mathbf{d}.$$
(1.24)

1.5 Método Linearizado com Iteração Simples

O relacionamento entre os dados observados geofísicos e os parâmetros do modelo da Terra é, em sua maioria, de não-linearidade. Por essa razão, faz-se o uso de um procedimento de linearização de modo que aproxime tais equações à um sistema linear.

Substituímos a função não-linear pela sua expansão em série de Taylor, truncando a expressão nos termos de primeira ordem. Desta forma, supondo o sistema não-linear $\mathbf{d} = q(\mathbf{m})$ e partindo-se de um modelo inicial \mathbf{m}^0 , a expansão no ponto \mathbf{d}^0 é:

$$g(\mathbf{m}) \cong \mathbf{d}^0 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{m}} \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^0} (\mathbf{m} - \mathbf{m}^0).$$
 (1.25)

A aproximação é aceitável se os termos de ordem superiores são despresíveis, caso contrário, o processo deverá ser utilizado de forma iterativa até convergir a uma solução considerada estável. Consequentemente, a expressão (1.25) pode ser reescrita como um processo iterativo:

$$\mathbf{d}^{k+1} - \mathbf{d}^{k} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{m}} \bigg|_{\mathbf{m} = \mathbf{m}^{k}} (\mathbf{m}^{k+1} - \mathbf{m}^{k}), \qquad (1.26)$$

assim:

$$\Delta \mathbf{d}^k = G^k \Delta \mathbf{m}^k, \tag{1.27}$$

temos como resultado:

$$\Delta \mathbf{m}^{k} = G^{k,+} \Delta \mathbf{d}^{k},$$

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^{k} + \Delta \mathbf{m}^{k},$$

(1.28)

onde:

- $\Delta \mathbf{m}^k$ é a atualização estimada dos parâmetros do modelo para k-ésima iteração;
- $G^{k,+}$ a pseudo-inversa da matriz G^k na k-ésima iteração;
- $\Delta \mathbf{d}^k$ é a diferença entre os dados da iteração k + 1 e os dados da k-ésima iteração;
- \mathbf{m}^k são os parâmetros atuais do modelo na k-ésima iteração;
- \mathbf{m}^{k+1} são os parâmetros estimados para a iteração k+1.

CAPÍTULO 2

Geotomografia

A tomografia foi incorporada na geofísica exploracional a fim de fornecer imagens de regiões do interior da Terra configuradas como potenciais reservatórios proporcionando alta resolução. A tomografia consiste em uma técnica de reconstrução de imagens por meio da medida e soma dos valores de propriedades físicas em determinadas direções (Bassrei, 1990), fato que fez gerar o termo geotomografia empregrando-se ondas eletromagnéticas ou ondas acústicas. A tomografia tradicional requer uma distribuição de fontes e receptores em torno do objeto a ser imageado, o que torna a tomografia usada na geofísica exploracional mais limitada em cobertura angular haja vista que o objeto em estudo está em subsuperfície.

A técnica tomográfica se agrupa em duas classes: tomografia de tempos de trânsito que tem uma abordagem cinemática, pois leva em consideração apenas o tempo de percursso entre fontes e receptores, a qual será abordada neste trabalho; e a tomografia de difração que também considera a forma da onda do sinal captado pelo receptor. Pode-se classificar quanto ao tipo de energia empregada: eletromagnética ou mecânica. Neste trabalho, usaremos a palavra tomografia para designar:

- (i) criações de imagens,
- (ii) estimação de parâmetros petrofísicos (distribuições de velocidades).

2.1 Tomografia de Tempos de Trânsito

A tomografia de tempos de trânsito, ou tomografia de raio, utiliza os tempos de percurso da onda transmitida e/ou refletida entre fontes e receptores como vetor de dados de entrada na inversão, a forma da onda é desconsiderada (amplitude em função do tempo). Para os levantamentos tomográficos de tempos de trânsito existem duas geometrias de aquisição: *Vertical Seismic Profile* (VSP), as fontes estão dispostas na superfície e os receptores ao longo de um poço, favorecendo o uso das ondas refletidas; e a configuração interpoço, do inglês *interwell* (também conhecida como *crosshole* e XWP do inglês *Crosswell Profile*), fontes e receptores estão dispostos ao longo de distintos poços, neste caso ondas diretas (transmitidas) são utilizadas.

15

A tomografia é baseada na idéia de que um conjunto de dados observados consiste de integrais ao longo de linhas de alguma quantidade física. Sendo assim, o tempo de trânsito da energia que se propaga através de uma seção do interior da Terra, considerando que a mesma foi discretizada em N células retangulares e M distribuições de par fonte-receptor, é:

$$t_i = \sum_{k=1}^{N} g_{ik} s_k.$$
 (2.1)

A reconstrução tomográfica em termos de integral de linha é dada por:

$$\mathbf{t}_k = \int_{R_k} \mathbf{s}(x, z) dl = g[\mathbf{s}(x, z)], \qquad (2.2)$$

sendo \mathbf{t}_k o tempo de trânsito para o k-ésimo raio; R_k o raio ao longo do qual é realizada a integração; dl o elemento de raio; $\mathbf{s}(x, z)$ a vagarosidade do meio no ponto (x, z), em que xé a coordenada horizontal e z é a coordenada vertical e $g[\mathbf{s}(x, z)]$ representa a variável g em função da vagarosidade. A equação (2.2) tem um comportamento não linear por descrever com fidelidade o percurso do raio em meios não homegêneos e anisotrópicos, proporcionando uma geometria de raios complexa. Faz-se, portanto, necessária sua linearização, usando a expansão em série de Taylor e considerando somente o termo de primeira ordem:

$$t \cong t^0 + \frac{\partial g}{\partial s} \Big|_{s=s^0} (s=s^0).$$
(2.3)

No domínio discreto isto pode ser reescrito como:

$$\Delta \mathbf{t} = G \Delta \mathbf{s},\tag{2.4}$$

sendo: o vetor $\Delta \mathbf{t}$ que corresponde às diferenças entre os tempos de trânsito calculados e observados para o modelo; o vetor $\Delta \mathbf{s}$ que corresponde às diferenças entre as vagarosidades verdadeiras e estimadas do modelo; e a matriz G que contém os elementos g_{ij} correspondentes às distâncias que o *i*-ésimo raio percorre no *j*-ésimo bloco. Partindo de um modelo incial podemos calcular o valor para nova vagarosidade através da inversão, constituíndo um processo iterativo. Isto, é:

$$\Delta \mathbf{s}_k = G^{k,+} \Delta \mathbf{d}_k, \tag{2.5}$$

para a atualização da vagarosidade:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \Delta \mathbf{s}_k. \tag{2.6}$$

Dois tipos de energias são empregadas nos levantamentos geofísicos tomográficos: sísmica e eletromagnética, a primeira é influenciada pelos módulos elásticos enquanto que a segunda é afetada pela permeabilidade magnética e permissividade dielétrica.

2.2 Tomografia Eletromagnética de Tempos de Trânsito

Na tomografia eletromagnética interpoço o pulso eletromagnético de alta freqüência é transmitido por uma antena em um poço e recebido por uma antena em outro poço. A velocidade de propagação do pulso depende das propriedades elétricas intrínsecas do meio, ou seja, a condição de propagação é determinada pelas propriedades eletromagnéticas: a condutividade elétrica (σ), a permeabilidade magnética (μ) e a permissividade elétrica (ϵ).

A condutividade elétrica dos materiais é a medida da facilidade com que a corrente elétrica flui através dos materiais. A permeabilidade magnética é uma propriedade dos meios materiais que influi no comportamento da propagação da onda eletromagnética, porque mede a facilidade com que um corpo se magnetiza sobre a ação de um campo magnético externo. Expressa como $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m)$ e χ_m é a suscetibilidade magnética. Segundo Telford et al. (1990) a permeabilidade relativa $(\mu_r = \mu/\mu_0)$ raramente é apreciavelmente maior que a unidade, com exceção para poucos minerais magnéticos (ver Tabela 2.2). Significa que o parâmetro χ_m é aproximadamente igual a zero, conforme apresentado em Nabighian (1987), equivale $\mu \approx$ μ_0 , excetuando-se aqueles meios que apresentam concentrações de minerais paramagnéticos $(\chi_m > 0)$ e diamagnéticos $(\chi_m < 0)$.

Deste modo, variações nas velocidades devem ser devidas às permissividades elétricas (ϵ) . Essa grandeza representa a facilidade com que um meio semi-condutor se polariza sobre a ação de campos elétricos externos. Essa polarização pode ser eletrônica, iônica ou molecular. Nesse contexto, insere-se a constante dielétrica (K) a qual é definida pela razão $K = \epsilon/\epsilon_0$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo ($\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} F/m$). Esse parâmetro é também um indicativo de presença de acumulação de água, porque a água tem constante dielétrica de 80 para altas frequências (espectro de frequência variando na faixa de MHz) conforme Annan (2001). A Tabela 2.1 lista valores de constante dielétrica para alguns minerais e rochas.

2.2.1 A Velocidade de Propagação da Onda Eletromagnética

Uma aproximação aceitável que descreve a propagação do sinal eletromagnético é encontrada na equação da onda harmônica derivada das equações de Maxwell para o caso de um meio isotrópico e homogêneo. Tomando a equação de Maxwell e aplicando o rotacional:

Material	Const. Dielétrica (K)
Ar	1
Água destilada	80
Água fresca	80
Água do mar	80
Areia Seca	3 - 5
Areia saturada	20 - 30
Calcário	4 - 8
Argilas	5 - 40
Xisto	5 - 15
Silte	5 - 30
Gelo	3 - 4
Granito	4 - 6
Sal seco	5 - 6

Tabela 2.1: Constante dielétrica de alguns materiais para antenas com faixa de frequência de 10 a 1000 MHz. Fonte: Annan (2001).

Mineral	Permeabilidade Relativa (μ_r)
Magnetita	5
Pirrotita	2,55
Titanomagnetita	1,55
Hematita	1,05
Pirita	1,0015
Calcita	0,999987
Quartzo	0,999985
Hornblenda	1,00015

Tabela 2.2: Permeabilidade magnética relativa de alguns minerais em altas frequências. Fonte: Telford et al. (1990).

$$\nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0 \to \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\right) = 0.$$
 (2.7)

Utilizamos a equação de Maxwell para o campo magnético $\nabla \times \mathbf{h} - \partial \mathbf{d} / \partial t = \mathbf{j}$ e considerando a identidade vetorial: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$. Assim como $\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}$ e $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ e $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$. Sendo:

- e o campo elétrico (V/m);
- **b** a indução magnética (*Tesla*);
- **d** o deslocamento dielétrico (C/m^2) ;
- **h** o campo magnético (A/m);
- σ a condutividade elétrica (S/m);
- j a densidade de corrente elétrica (A/m^2) .

Então a equação é dada por:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0, \qquad (2.8)$$

que no domínio da frequência fica:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma \quad (k, número de onda complexo).$$
 (2.9)

Supondo que $k = \alpha - i\beta$, pode-se demostrar facilmente que:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2}$$
(2.10)

е

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\mu \epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}.$$
(2.11)

Quando as correntes de condução prevalecem sobre as correntes de deslocamento ($\omega \epsilon \ll \sigma$) verifica-se que $\alpha = \beta = (\omega \mu \sigma / 2)^{1/2}$. Então:

$$k = (1-i) \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{1/2} = (1-i)/\delta,$$
(2.12)

e descreve o amortecimento na dispersão da onda plana, o termo δ associado com estas ondas é chamado de *skin depth* e significa a distância sobre qual a amplitude decai de 1/e. Quando as correntes de delocamento prevalecem sobre as correntes de condução ($\omega \epsilon \gg \sigma$) temos que $\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ e $\beta \cong 0$. Então:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon},\tag{2.13}$$

descrevendo a propagação da onda plana e fornecendo a equação da velocidade da onda, considerando $v = \omega/k$:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}},\tag{2.14}$$

com as considerações realizadas anteriormente ($\mu \approx \mu_0$) e em termos da constante dielétrica, sendo c a velocidade da onda eletromagnética no vácuo (2,998 × 10⁸m/s), a velocidade da onda eletromagnética no meio rochoso é dada por:

$$v = \frac{c}{\sqrt{K}}.$$
(2.15)

No ambiente de reservatório de petróleo, os valores típicos são encontrados $\sigma \approx 0, 1S/m$ e $\epsilon/\epsilon_0 \approx 10$. Isto implica numa frequência de mudança: $f = \sigma/2\pi\epsilon \approx 100MHz$ entre o regime de propagação e dispersão. Segue que todas as medidas de transmissão poço-a-poço serão feitas a altas frequências (Nekut, 1994).

2.3 Tomografia Sísmica de Tempos de Trânsito

A tomografia sísmica interpoço consiste em obter dados de tempos de percurso de ondas acústicas emitidas por uma fonte em um poço e captada em um receptor em outro poço. A velocidade de propagação dependende das propriedades elásticas intrísecas do meio de propagação da energia, este relacionamento mantem-se por meio das constantes elásticas.

As constantes elásticas são definidas como o quociente entre as grandezas de tensão e de deformação, os quais segundo a Lei de Hooke se relacionam de forma linear. Os módulos elásticos (outro nome dado às constantes elásticas) têm as mesmas dimensões que a tensão (Nm^{-2}) , uma vez que as deformações já são dadas por quocientes entre comprimentos, e são definidos para diferentes tipos de deformações.

Considerando um meio no qual todos os stresses são iguais a zero exceto σ_{xx} . Assumindo σ_{xx} positiva, a dimensão paralela a σ_{xx} aumentará enquanto que a direção normal a

 σ_{xx} diminuirá. Nestes meios em que ϵ_{xx} é positiva (ao longo da direção x) considera-se ϵ_{yy} e ϵ_{zz} negativos, da simetria vê-se que $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$. Define-se agora as constantes elásticas:

- (i) o módulo de incompressibilidade ou de volume (K) é dado pela razão entre a pressão hidrostática e a dilatação, acontece que, em condições hidrostáticas, a tensão resulta apenas do peso por unidade de área: $K = -p/\theta$ onde $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$;
- (*ii*) o módulo de rigidez ou de cisalhamento (μ) é definido pela razão entre a tensão e a deformação cisalhante, mede a resistência à tensão de cisalhamento: $\mu = \sigma_{ij}/\epsilon_{ij}$ para $i, j = x, y, z, i \neq j;$
- (*iii*) a constante conhecida como constante de Lamé (λ) é frequêntemente usada na teoria sísmica e é definida por: $\lambda = K 2/3\mu$;
- (*iv*) o módulo de Young (E) defini-se a partir da deformação extensional constituindo a razão entre a tensão e a deformação longitudinal: $E = \sigma_{xx}/\epsilon_{xx} = \mu(3\lambda + 2\lambda)/\lambda + \mu$;
- (v) a constante de proporcionalidade (ν) entre as deformações lateral e longitudinal é uma grandeza escalar adimensional denominada como razão de Poisson: $\nu = -\epsilon_{yy}/\epsilon_{xx} = -\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx} = \lambda/2(\lambda + \mu).$

Todas essas cinco constantes relacionam-se entre si, como se pode verificar.

2.3.1 A Velocidade de Propagação da Onda Acústica

Supondo que o meio esteja em equilíbrio e que seja homogêneo, a propagação de uma pertubação mecânica nesse meio cria gradientes de tensão locais. Num volume elementar $\Delta x \Delta y \Delta z$ a componente F_x da força resultante pode ser escrita como:

$$F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z, \qquad (2.16)$$

expressões equivalentes definem as componentes F_y e F_z . Para um elemento de massa $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$, podemos escrever as equações do movimento usando a 2^a lei de Newton:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\tag{2.17}$$

onde u é o deslocamento produzido pela passagem da onda. Com equações similares para os deslocamentos em $y \in z$. Usando a forma generalizada da lei de Hooke para meios isotrópicos:

$$\frac{\partial(\lambda\theta + 2\mu\epsilon_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\epsilon_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\epsilon_{xz})}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$
(2.18)

Por definição, temos:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$
(2.19)

Sendo: $\theta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ a dilatação sofrida na propagação da onda mecânica, ϵ_{xx} , ϵ_{xz} e ϵ_{xy} as deformações longitudinal e cisalhante, respectivamente. Após manipulações algébricas obtemos:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$
(2.20)

Aplicando em ambos os lados por $\frac{\partial}{\partial x}$, efetuando de forma análoga para as direções $y \in z$ e somando estas mesmas equações de cada uma das três direções, obtem-se a equação padrão de propagação de uma onda compressiva com a velocidade V_p .

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right) \nabla^2 \theta = 0, \qquad (2.21)$$

$$V_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$
(2.22)

No entanto, a passagem da onda transversal envolve uma rotação dos elementos de volume no plano da frente de onda, sem, contudo, alterar o volume desses elementos. A rotação é dada por um vetor Ψ cujas componentes são:

$$\Psi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \Psi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \Psi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2.23)$$

desta forma, a equação padrão de propagação de um distúrbio rotacional com velocidade V_s é dada por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \nabla^2 \Psi = 0, \qquad (2.24)$$

$$V_s = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$
(2.25)

No caso da tomografia sísmica os tempos de trânsito das ondas diretas sísmicas e o raio sísmico tomográfico são usados para obter um tomograma de velocidades da onda P (primária) as mais utilizadas na sísmica. A tabela 2.3 lista valores de velocidades das ondas primárias.

Rocha	$V_p \ (\mathrm{em} \ km/s)$
Arenito	2,8 - 4,5
Folhelho	1,8 - 4,0
Lama	1,6 - 1,8
Calcário	4,0 - $5,5$
Sal	4,4 - 4,6
Petróleo	1,5 - 2,0
Água	1,4 - 1,6
Gesso e Anidrita	5,7 - 6,7
Dolomitos	4,8 - 6,5
Ígneas	5,0 - 5,7

Tabela 2.3: Intervalos de valores de velocidade de onda elástica em algumas rochas, valores baseados de Telford et al. (1990).

2.4 Modelagem Tomográfica

Uma maneira de parametrização mais simples para uma distribuição de velocidades seria dividir a região de estudo em pequenas células, denominados pixels no caso bi-dimensional e voxels no caso tri-dimensional, e atribuir valores constantes à vagarosidade (recíproco da velocidade) em cada célula. Uma ilustração da modelagem tomográfica 2-D pode ser observada na Figura 2.1, em que duas fontes são postas em um poço e dois receptores em outro, o meio é discretizado em dois blocos com dimensão de d por d com vagarosidade s_1 e s_2 . Neste caso, a matriz tomográfica G tem dimensão 4×2 e descreve o comprimento do i-ésimo raio no j-ésimo pixel, conforme mostrado:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ d\sqrt{0,5} & d\sqrt{0,5} \\ d\sqrt{0,5} & d\sqrt{0,5} \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix},$$
(2.26)

pode-se observar que, para este exemplo, o sistema é dito sobredeterminado e não existe problema de iluminação para o referido tomograma.

Por sua vez, a propagação na onda pode ser modelada através de modelagens analíticas



Figura 2.1: Exemplo de aquisição de dados e traçado de raios para levantamento tomográfico num simples modelo de duas camadas.

ou numéricas. Utilizou-se neste trabalho a modelagem 2-D e a teoria de traçado de raios como modelagem da propagação da energia atráves do meio estudado.

2.5 Traçado de Raios

Nesta abordagem, são traçados raios perpendiculares às frentes de onda que representam o caminho mínimo entre dois pontos de referência. Significa que, para meios homogêneos ou meios com contraste de velocidade relativamente baixos, o ângulo de transmissão do raio ao atravessar as interfaces do meio pode ser considerado constante concedendo uma aproximação da propagação de onda por raios retos. Todavia, geologicamente tais meios não podem ser considerados verdadeiros e a geometria dos raios é mais complexa, então obtêm-se o comprimento de arco do raio percorrido em cada célula do meio dando uma aproximação de propagação por raios curvos. O traçado de raios considerando a curvatura do raio geralmente é utilizada para métodos iterativos onde a matriz é atualizada a cada iteração. A maneira mais lógica de analisar o traçado de raios sem envolver a conceito de frente de onda é o princípio de Fermat. O conhecido princípio de Fermat afirma que a energia se propaga ao longo de caminhos que torna o tempo de trânsito mínimo, sendo este caminho denominado como raio.

$$I = \int_{P_1}^{P_2} n(x, z) ds.$$
 (2.27)

A equação 2.27 define o comprimento acústico entre os pontos P_1 e P_2 ao longo do raio, onde t é o tempo de trânsito entre dois pontos; n(x, z) = c/v(x, z) é o índice de refração bidimensional correspondente à posição (x, z) do meio para uma dada velocidade de referência c e velocidade real do meio v(x, z).

2.5.1 Equação do Raio

Vários métodos estão descritos na literatura para determinar o caminho descrito pelo raio entre dois pontos. A seguir é descrito o algoritmo numérico proposto por Andersen e Kak (1982). Aplicando o princípio de Fermat na equação integral anterior e sabendo que a equação de Euler constitue uma condição necessária para a existência de um valor extremo da integral $\int_{P_1}^{P_2} nds$, obtemos a seguinte equação diferencial para um meio heterogêneo:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n,\tag{2.28}$$

onde: n(x, z) é o índice de refração na posição (x, z); **r** é o vetor posição do raio; $d\mathbf{r}/ds$ é o vetor tangente ao raio em (x, z); ds é o elemento de comprimento de trajetória de raio; $\nabla n \equiv dn/d\mathbf{r}$ é o gradiente do índice de refração n(x, z).

Esta equação diferencial é denominada como equação do raio e para uma certa vizinhança regular, aquela em que o índice de refração varia suavemente, sua solução representa uma família de raios de menor comprimento acústico. As condições de contorno impostas é que especificam certos raios desta família (Andersen e Kak, 1982).

Desenvolvendo a equação do raio, obtêm-se:

$$\frac{dn}{ds}\frac{d\mathbf{r}}{ds} + n\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \nabla n, \qquad (2.29)$$

mas,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{d\mathbf{r}}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds},\tag{2.30}$$

então,

$$\left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) \frac{d\mathbf{r}}{ds} + n \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \nabla n.$$
(2.31)

Expandindo o vetor posição em série de Taylor no ponto $(s + \Delta s)$, onde Δs é o incremento do raio, e considerando somente os três primeiros termos:

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(\Delta s)^2.$$
 (2.32)

Isolando o vetor curvatura $d^2\mathbf{r}/ds^2$ da equação (2.31) e substituindo na equação (2.32), resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\Delta s + \frac{1}{2n} \left[\nabla n - \left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right] (\Delta s)^2.$$
(2.33)

Considerando dois pontos distintos do raio P1 $(x_k; z_k)$ e P2 $(x_{k+1}; z_{k+1})$ separados por uma distância Δs , o vetor unitário na direção de propagação pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos\alpha_k)\widehat{\mathbf{i}} + (\sin\alpha_k)\widehat{\mathbf{k}},\tag{2.34}$$

onde $\hat{\mathbf{i}} \in \hat{\mathbf{k}}$ são os vetores unitários nas direções $x \in z \in \alpha_k$ é o ângulo entre as direções tangente e horizontal ao raio na iteração k. Os valores do seno e do cosseno podem ser obtidos por:

$$sen\alpha_k = \frac{z_{k-1} - z_k}{\Delta s},\tag{2.35}$$

$$\cos\alpha_k = \frac{x_{k-1} - x_k}{\Delta s}.\tag{2.36}$$

E o gradiente do índice de refração é definido por:

$$\nabla n = \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) \hat{\mathbf{k}}.$$
(2.37)

O produto interno que aparece na equação (2.33), que será chamado de d é reescrito em função das equações (2.34) e (2.37):

$$d = \nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \cos\alpha_k + \frac{\partial n}{\partial z} \sin\alpha_k = n_x \cos\alpha_k + n_z \sin\alpha_k.$$
(2.38)

Utilizando diferenças finitas podemos aproximar as derivadas direcionais do meio discretizado por:

$$n_x(i,j) = \frac{n(i+1,j) - n(i-1,j)}{2\Delta x},$$
(2.39)

$$n_z(i,j) = \frac{n(i,j+1) - n(i,j-1)}{2\Delta z}.$$
(2.40)

O ponto seguinte do raio é estimado pelas equações:

$$x_{k+1} = x_k + \cos\alpha_k \Delta s + \frac{1}{2n_k} (n_{k,x} - d_k \cos\alpha_k) \Delta s^2$$

$$z_{k+1} = z_k + \sin\alpha_k \Delta s + \frac{1}{2n_k} (n_{k,z} - d_k \sin\alpha_k) \Delta s^2,$$

(2.41)

sendo que n_k , $n_{k,x}$ e $n_{k,z}$ são o índice de refração e a derivada direcional na direção x e z respectivamente. Observa-se nesta equação que se a seguinte substituição for realizada $n_k = c/v_k = cs_k$, onde s_k é a vagarosidade recíproco da velocidade v_k , inclusive no cálculo das derivadas direcionais, a velocidade c desaparece e as equações ficam:

$$x_{k+1} = x_k + \cos\alpha_k \Delta s + \frac{1}{2s_k} (s_{k,x} - d_k \cos\alpha_k) \Delta s^2$$

$$z_{k+1} = z_k + \sin\alpha_k \Delta s + \frac{1}{2s_k} (s_{k,z} - d_k \sin\alpha_k) \Delta s^2,$$

(2.42)

e d_k passa a ser definido como:

$$d_k = s_{k,x} \cos\alpha_k + s_{k,z} \sin\alpha_k. \tag{2.43}$$

Partindo-se de um determinado ponto inicial (x_0, z_0) , que corresponde à posição da fonte, pode-se obter os sucessivos pontos do raio uma vez que os valores de $sen\alpha_k$ e $cos\alpha_k$ são calculados com as equações (2.35) e (2.36). Quanto à vagarosidade, é determinada de forma iterativa, a partir de um valor inicial, no traçado de raio. Por conseguinte, a determinação de um valor inicial para a vagarosidade é um problema por constituir exatamente o parâmetro que se dejesa estimar.

A metodologia de traçamento de raios foi implementada computacionalmente em linguagem Fortran por Schots (1990) e usada neste trabalho, baseado no trabalho de Andersen e Kak (1982). Ainda, segundo Andersen e Kak (1982) este método tem algumas limitações no sentido de que erros causados na discretização ou transições bruscas de velocidade podem se tornar acumulativos. Para minimizar este problema, deve-se adotar uma malha com resolução suficiente para que o meio seja amostrado adequadamente, resultando em transições mais suaves de velocidade. Também podem ser utilizadas suavização do campo de velocidades e interpolação bilinear dos índices de refração e de suas derivadas parciais respectivas (Andersen e Kak, 1982). Neste contexto, para tornar o meio contínuo faz-se necessário realizar algum tipo de interpolação na distribuição das vagarosidades e de suas derivadas parciais. Considerando a interpolação bilinear descrita por Andersen e Kak (1982), que considera os quatros vértices do retângulo da atual coordenada do raio, temos que a vagarosidade de cada retângulo é assumida para o vértice de menor coordenada, ou seja, num retângulo compreendido entre os índices $i, i + 1, j \in j + 1$ seria considerada para o ponto A de coordenadas
(i, j) (Figura 2.2). A interpolação para o ponto (x_k, z_k) dentro do retângulo é dada por:

$$s_{k} = p_{A}s_{A} + p_{B}s_{B} + p_{C}s_{C} + p_{D}s_{D}$$

$$s_{k,x} = p_{A}s_{A,x} + p_{B}s_{B,x} + p_{C}s_{C,x} + p_{D}s_{D,x}$$

$$s_{k,z} = p_{A}s_{A,z} + p_{B}s_{B,z} + p_{C}s_{C,z} + p_{D}s_{D,z},$$
(2.44)

para $\beta = A, B, C \in D$: s_{β} é a vagarosidade no vértice β , $s_{\beta,x} \in s_{\beta,z}$ são as derivadas parciais da vagarosidade nos vértices do retângulo que o raio percorre; p_{β} representa os pesos de cada elemento; s_k representada a vagarosidade interpolada e, $s_{k,x} \in s_{k,z}$ representam a interpolação das derivadadas direcionais.



Figura 2.2: Interpolação bilinear de uma região discretizada.

Os pesos para a interpolação bilinear no ponto (x_k, z_k) são dados por:

$$p_{A} = 1 - p_{x} - p_{z} + p_{xz}$$

$$p_{B} = p_{x} - p_{xz}$$

$$p_{C} = p_{z} - p_{xz}$$

$$p_{D} = p_{xz},$$

$$p_{x} = x_{k} - x_{A}/\Delta x$$

$$p_{z} = z_{k} - z_{A}/\Delta z$$

$$p_{xz} = p_{x}p_{z}$$

$$(2.45)$$

 $p_A + p_B + p_C + p_D = 1.$

em que:

2.5.2 Ligação entre Fonte e Receptor

Um problema do traçado de raio consiste em encontrar as coordenadas do receptor através do raio que parte da fonte. Para um meio homogêneo essa ligação fonte-receptor configura um raio reto tornando o problema trivial, porém considerando um meio heterogêneo devese levar em consideração a curvatura agregada ao raio, neste caso o problema se resume em predizer o ângulo de lançamaneto do raio da fonte para que alcance um determinado receptor. O processo de ligação entre fonte e receptor é denominado de *ray linking*. A seguir estão descritos os três métodos mais utilizados:

a) Shooting method - Dados um ângulo inicial e final, sendo um valor máximo (θ_{max}) e outro o valor mínimo (θ_{min}) , traçam-se raios compreendidos entre estes limites com um incremento angular $\Delta \theta$ tal que o ângulo de emissão fique compreendido entre esses dois extremos. O ângulo de lançamento adotado será aquele para o qual o raio mais se aproxime do receptor desejado. Sendo assim:

$$\theta_i = \theta_{min} + i\Delta\theta, \quad para \quad i = 0, 1, 2, \dots n, \tag{2.47}$$

sendo *n* um número inteiro de valor máximo em que $\theta_i = \theta_{max}$. A Figura 2.3 mostra uma representação esquemática para este método.



Figura 2.3: Representação esquemática do shooting method.

Pode-se perceber que o custo computacional desse método é elevado a depender do valor do incremento $\Delta \theta$ tomado.

- b) Bending method São fixados os dois extremos do raio, par fonte-receptor, a curvatura do referido raio é ajustada até minimizar o tempo de trânsito total ao longo do trajeto percorrido.
- c) Linking method Utiliza o método de Newton-Raphson para aproximar o raio ao máximo das coordenadas desejadas. São traçados três raios a partir de um ângulo inicial dado θ_2 tal que os outros ângulos de lançamento são dados por:

$$\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta \tag{2.48}$$

е

$$\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta \tag{2.49}$$

Uma vez traçados tais raios, o ângulo θ_2' do raio 2 que terminará mais próximo ao receptor é calculado por:

$$\theta_2' = \theta_2 + \frac{d_{2r}}{d_{13}} 2\Delta\theta, \qquad (2.50)$$

sendo d_{2r} a distância entre as coordenadas finais do raio 2 com ângulo inicial θ_2 e do receptor; d_{13} a distância entre as coordenadas finais do raio 1 e 3. Esta equação possui sinal dependente da direção do crescimento angular e das coordenadas do raio 2 e do receptor. Pode-se observar que este método também baseia-se na estimação do ângulo de lançamento do raio, podendo ser caracterizado como um *shooting method* que utiliza o método de refinamento de Newton-Raphson para uma melhor predição do ângulo de lançamento do raio. A Figura 2.4 mostra uma representação deste método.



Figura 2.4: Representação esquemática do linking method.

Neste trabalho, a metodologia adotada para o traçado de raios foi a mesma descrita por Schots (1990) que implementou computacionalmente em linguagem Fortran, com o seguinte procedimento:

- (i) Calcula-se o ângulo e o tempo de trânsito para cada raio, utilizando-se o método descrito em c), tendo como partida o ângulo entre a linha reta que liga a fonte ao receptor e a horizontal. Havendo uma forte variação na distribuição de vagarosidades vários raios podem não alcançar os objetivos após N iterações. Neste caso, após o traçado de todos os raios, utiliza-se como partida para os raios não convergentes os ângulos dos raios mais próximos que tenham convergido.
- (*ii*) Utilizando o *shooting method* e considerando um círculo de raio dado, com centro de coordenadas do receptor (x_g, z_g) , qualquer raio que cruzar a área e terminar neste domínio pertencerá a este receptor. Utiliza-se o método Newton-Raphson para encontrar o receptor, comparando-se o tempo de trânsito deste raio com o tempo dado em *i*) ou de um raio anterior. O raio considerado será aquele de menor tempo, obedecendo o princípio de Fermat.

CAPÍTULO 3

Validação Cruzada Generalizada na Escolha do Parâmetro Ótimo de Regularização

3.1 Regularização

Na resolução numérica de problemas discretos mal-postos – isto é, aqueles que falham seja na existência, na unicidade ou mesmo na estabilidade da solução – técnicas de regularização são empregadas com o intuíto de tornar a inversão mais estável. Essas técnicas permitem solucionar não o problema original, mas um problema equivalente e mais robusto com relação a variações (ruídos) nos dados de entrada. A regularização de Tikhonov é freqüentemente usadada na literatura e não diferente requerido neste trabalho. Esta introduz termos referente à suavidade do modelo na função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$ para a resolução do problema.

Considere o problema de resolver $\mathbf{t} = G\mathbf{m}$. De uma perspectiva matemática, esses problemas mal-postos se devem, geralmente, ao fato da matriz G possuir valores singulares nulos ou muito próximos de zero. Um caminho de contornar isto, seria acrescentar uma constante λ na função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$ de tal maneira que esse sistema equivalente cuja matriz, também definida positiva, a ser invertida possua somente valores singulares distantes do zero.

Fazendo isto, mostramos a solução pela regularização de Tikhonov obtida minimizando a função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$, definida como sendo (Bassrei e Rodi, 1993):

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda L_n, \tag{3.1}$$

No segundo termo, L_n é normalmente a discretização de um operador de derivadas impondo alguma suavização na solução, λ é uma constante, $\lambda > 0$, chamada de parâmetro de regularização que controla a quantidade de suavização sobre a solução.

Referente ao termo L_n , usa-se discretizações de derivadas de primeira e segunda ordem. Podemos utilizar a diferença entre os parâmetros do modelo fisicamente adjacentes como uma aproximação da primeira derivada D_1 , o somatório destes valores podem ser definidos como flatness l_2 (Menke, 1989) do vetor solução **m**:

$$l_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1} \\ m_{2} \\ \vdots \\ m_{N} \end{bmatrix} = D_{1}\mathbf{m}$$
(3.2)

Segundo Santos (2006), as matrizes de aproximação de derivadas devem ter elementos nulos nas posições correspondentes às bordas para evitar que valores não-adjacentes no modelo 2D sejam considerados como adjacentes no vetor 1D. Desta forma, podemos também trabalhar com os parâmetros do modelo através de uma matriz que aproxima a segunda derivada D_2 , roughness l_2 (Menke, 1989):

$$l_{2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1} \\ m_{2} \\ \vdots \\ m_{N} \end{bmatrix} = D_{2}\mathbf{m}$$
(3.3)

O valor de L_n do flatness (n = 1) ou roughness (n = 2) para o vetor de pârametros **m** é definido como:

$$L_n = \| l_n \|_2^2 = (D_n \mathbf{m})^T D_n \mathbf{m}, \qquad (3.4)$$

onde n é a ordem da matriz de derivada.

Desenvolvendo, agora, a equação (4.1) e realizando as devidas substituições para $\mathbf{e} = (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) \in L_n = (D_n \mathbf{m})^T D_n \mathbf{m}$, temos:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + \lambda (D_n \mathbf{m})^T D_n \mathbf{m}, \qquad (3.5)$$

para o caso em que $\lambda = 0$ a regularização não é realizada e a inversão se reduz aos métodos dos míninos quadrados. Minimizando essa função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$ em relação aos parâmetros do modelo \mathbf{m} , obtemos.

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 2G^T G \mathbf{m} - 2G^T \mathbf{d} + 2\lambda D_n^T D_n \mathbf{m}, \qquad (3.6)$$

igualando a equação (3.6) a zero, obtêm-se uma estimativa da solução:

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = (G^T G + \lambda D_n^T D_n)^{-1} G^T \mathbf{d}.$$
 (3.7)

Quando n = 0, D_n corresponde à matriz identidade resultando em uma regularização de ordem zero e a solução se reduz ao método dos mínimos quadrados amortecidos. Para n = 1, D_n corresponde à matriz de primeira derivada e a regularização é de primeira ordem. Quando n = 2 temos a regularização de ordem dois que culmina no uso da matriz da aproximação numérica da segunda derivada.

Para o processo linearizado, partindo-se de um modelo inicial \mathbf{m}^0 homogêneo, significa atualizar os parâmetros do modelo iterativamente por meio das equações:

$$\Delta \mathbf{m}^{k} = (G^{k,T}G^{k} + \lambda D_{n}^{T}D_{n})^{+,k}G^{k,T}\Delta \mathbf{d}^{k}, \qquad (3.8)$$

sendo

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta \mathbf{m}^k. \tag{3.9}$$

É válido salientar que o parâmetro de regularização λ deve ser escolhido convenientemente, pois, como esboçado, este controla a intensidade da suavização das soluções obtidas entre os limites de escolher soluções mais suaves com maior erro ou menos suaves com menor erro. Portanto, o que define uma boa regularização é uma boa escolha do λ . Na literatura existem diversos métodos para encontrar o λ ótimo de regularização, dentre eles, podemos citar a curva-L e a Validação Cruzada Generalizada de Craven e Wahba (1979).

3.2 Estimativa do Parâmetro de Regularização

Considere o modelo de regressão padrão, descrito por um modelo cuja saída observável \mathbf{d} em resposta a um vetor de entrada \mathbf{m} , definida por:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m} - \underline{\epsilon},\tag{3.10}$$

onde $\underline{\epsilon}$ é uma amostra retirada de um processo de ruído branco de variância nula (Golub et al., 1979). Seja \mathbf{m}_{λ} uma estimativa regularizada da equação (3.10) para um valor do parâmetro de regularização λ . Isto é, \mathbf{m}_{λ} minimiza o funcional de Tikhonov:

$$minimizar \|\mathbf{d} - G\mathbf{m}\|^2 + \lambda \|D_n\mathbf{m}\|^2.$$
(3.11)

Não é uma questão trivial escolher um valor adequado para λ que controle o compromisso entre (Craven e Wahba, 1979)

• A "aspereza" da solução, medida pelo termo $\|D_n \mathbf{m}\|^2$

• A "infidelidade" dos dados, medida pelo termo $\|\mathbf{d} - G\mathbf{m}\|^2$.

3.2.1 A Validação Cruzada Generalizada

Usaremos o conceito da Validação Cruzada Generalizada (GCV do inglês Generalized Cross Validation) para a escolha do λ que foi proposta por Craven e Wahba (1979). A estimativa GCV é originada do teorema da Validação Cruzada Ordinária (OCV do inglês Ordinary Cross Validation) proposto por D. Allen. A idéia intuitiva do OCV é muito simples, começamos adaptando a forma usual de "deixando um de fora" da Validação Cruzada. Especificamente, seja a solução regularizada \mathbf{m}_{λ}^{k} a qual minimiza o funcional de Tikhonov dada na equação (3.12), onde o k-ésimo termo do vetor de dados (\mathbf{d}^{k}) foi retirado.

minimizar
$$\left\| \mathbf{d} - G\mathbf{m}_{\lambda}^{k} \right\|^{2} + \lambda \left\| D_{n}\mathbf{m} \right\|^{2}$$
. (3.12)

Fazendo isto, o argumento é que se λ for adequado, então o k-ésimo componente da solução regularizada \mathbf{m}_{λ}^{k} deve "prever" essa falta. Por conseguinte, a estimação de Validação Cruzada Ordinária de λ é definida como o valor que minimiza (Wahba, 1990):

$$V_o(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \{ d_k^{obs} - d_k[\mathbf{m}_{\lambda}^k] \}^2.$$
(3.13)

Ainda para $\mathbf{d} = G\mathbf{m}$, \mathbf{m} uma função linear dos dados \mathbf{d} , define-se a *matriz influência* como a matriz $A(\lambda)$ dada pela combinação linear (Craven e Wahba, 1979):

$$G\mathbf{m}_{\lambda} = A(\lambda)\mathbf{d}.\tag{3.14}$$

Seguido dessa definição, pode-se utilizar uma versão da $V_o(\lambda)$ que pode ser avaliada de modo mais eficiente, sem precisar resolver explicitamente o problema inverso para cada observação omitida. Foi provado em Wahba (1990) o lema "deixando um de fora" chegando a seguinte identidade:

$$\sum_{k=1}^{M} \{ d_k^{obs} - d_k[\mathbf{m}_{\lambda}^k] \} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\{ d_k^{obs} - d_k[\mathbf{m}_{\lambda}] \}}{1 - a_{kk}(\lambda)},$$
(3.15)

onde:

$$a_{kk}(\lambda) = \frac{\partial \mathbf{d}[\mathbf{m}_{\lambda}]}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}_{k}[\mathbf{m}_{\lambda}] - \mathbf{d}_{k}[\mathbf{m}_{\lambda}^{k}]}{\mathbf{d}_{k}^{obs} - \mathbf{d}_{k}[\mathbf{m}_{\lambda}^{k}]}.$$
(3.16)

Sendo $a_{kk}(\lambda)$ o k-ésimo elemento da diagonal da matriz influência $A(\lambda)$. Então, temos a seguinte OCV (Wahba, 1990):

$$V_o(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \frac{\{d_k^{obs} - d_k(\mathbf{m}_\lambda)\}^2}{[1 - a_{kk}(\lambda)]^2}.$$
(3.17)

A GCV é obtida pela susbstituição de $a_{kk}(\lambda)$ por $\mu_1(\lambda) = 1/M \sum_{i=1}^M a_{ii}(\lambda) = 1/MTrA(\lambda)$. Portanto, a função GCV, $V(\lambda)$, é definida por (Wahba, 1990):

$$V(\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \frac{\{d_k^{obs} - d_k(\mathbf{m}_\lambda)\}^2}{(1 - \mu_1(\lambda))^2} \equiv \frac{\left\|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{m}_\lambda)\right\|^2}{\{\frac{1}{M}Tr[I - A(\lambda)]\}^2}.$$
(3.18)

Para:

$$\mathbf{m}_{\lambda} = (G^T G + \lambda D_n^T D_n)^{-1} G^T \mathbf{d}^{obs}, \qquad (3.19)$$

como sendo a solução do problema para um valor particular de $\lambda \in A(\lambda)$ a matriz influência definida pela equação (3.14) e reescrita como:

$$A(\lambda) = G(G^T G + \lambda D_n^T D_n)^{-1} G^T.$$
(3.20)

Nota-se da equação (3.17) que $a_{kk}(\lambda)$ é diferente para k diferente significando que os pontos de dados em $V_o(\lambda)$ não são tratados igualmente, essa característica indesejável foi evitada ao se introduzir a GCV. Comparando as equações (3.17) e (3.18) temos a relação: $V(\lambda) = V_o(\lambda)w_{kk}$, onde w_{kk} é definido como $w_{kk} = (1 - a_{kk}(\lambda))^2/(1 - \mu_1(\lambda))^2$. Segue que se $a_{kk}(\lambda)$ for independente de k, então $V_o(\lambda) \equiv V(\lambda)$. Essa versão "generalizada" foi uma tentativa de alcançar uma certa propriedade de invariância que a Validação Cruzada geralmente não mantem. Considerando uma transformação ortogonal do sistema linear original, a função OGV fornece valores distintos de λ ótimo para o problema transformado e original, culminando em resultados diferentes para problemas equivalentes. Em outras palavras, a função GCV é invariante sobre transformação ortogonal.

3.2.2 Uma Propriedade Ótima do GCV na Estimativa do λ

GCV é um critério de predição do erro médio quadrado, o que não é surpreendente dada a sua origem. Define-se o erro médio quadrado $T(\lambda)$ como (Wahba, 1990):

$$T(\lambda) = \frac{1}{M} \|G\mathbf{m} - G\mathbf{m}_{\lambda}\|^2.$$
(3.21)

O λ ótimo é o valor particular de λ que minimiza $T(\lambda)$ e a variância $ET(\lambda)$ de $T(\lambda)$ (Wahba, 1990):

$$ET(\lambda) = E\frac{1}{M} \left\| G\mathbf{m} - G\mathbf{m}_{\lambda} \right\|^{2}.$$
(3.22)

Usando as equações (3.10) e (3.14) podemos reescrever a equação (3.22) na forma (Wahba, 1990):

$$ET(\lambda) = E \frac{1}{M} \| (I - A(\lambda)) G\mathbf{m} - A(\lambda) \epsilon \|^2$$

$$= \frac{1}{M} \| (I - A(\lambda)) G\mathbf{m} \|^2 + \frac{\sigma^2}{M} Tr A^2(\lambda)$$

$$= b^2(\lambda) + \sigma^2 \mu_2(\lambda),$$
 (3.23)

estes termos são conhecidos como bias $(b^2(\lambda))$ e variância (σ^2) . O termo bias pode ser entendido como um erro aproximativo e o termo de variância como um erro estimativo.

Em Craven e Wahba (1979) foi provado que considerando λ minimizador da função de Validação Cruzada Generalizada $V(\lambda)$ tal como de $ET(\tilde{\lambda})$ e λ^* minimizador de $ET(\lambda^*)$, para $ET(\lambda^*) = min_{\lambda}ET(\lambda)$ como o menor valor possível. É definida a *ineficiência do valor* esperado do método da Validação Cruzada (Wahba, 1990):

$$I^* = \frac{ET(\tilde{\lambda})}{ET(\lambda^*)} \le \frac{1 + h(\lambda^*)}{1 - h(\tilde{\lambda})},\tag{3.24}$$

onde:

$$h(\lambda) = \left[2\mu_1(\lambda) + \frac{\mu_1^2(\lambda)}{\mu_2(\lambda)}\right] \frac{1}{(1 - \mu_1(\lambda))^2},$$
(3.25)

e $\mu_1(\lambda) = 1/MTrA(\lambda), \ \mu_2(\lambda) = 1/MTrA^2(\lambda)$. O valor assintótico de I^* satisfaz a condição $I^* \to 1$ no limite $M \to \infty$. Em síntese, para M grande o erro médio quadrado $T(\tilde{\lambda})$ com $\tilde{\lambda}$ estimado pela função GCV deve ser próximo do menor valor possível de $T(\lambda)$, o que torna $V(\lambda)$ um bom método para estimar λ ótimo.

3.2.3 Limites da GCV

A teoria que justifica o uso da Validação Cruzada Generalizada para estimar λ é uma teoria assintótica ($\lim_{M\to\infty} I^* = 1$). Por isso, só podem ser esperados bons resultados quando o conjunto de dados disponíveis for suficientemente grande para que o sinal possa ser distinguido do ruído. A experiência prática com a Validação Cruzada Generalizada parece mostrar que ela é robusta em relação à não-homogeneidade de variâncias e a ruído não-gaussiano (Wahba, 1990). Entretanto, é bastante provável que o método produza estimativas insatisfatórias do parâmetro de regularização λ se o processo de ruído for altamente correlacionado.

CAPÍTULO 4

Modelamento e Inversão Utilizando Raios Retos

Foram construídos modelos de velocidades que descrevem situações geológicas para realizar simulações com tomogramas usando a teoria do traçado de raio. Em primeiro momento, é utilizado propagação linear (raios retos) de forma a avaliar a aplicação do critério GCV e seu comportamento frente a dados livre de ruídos e com distribuição de ruídos. E, num segundo momento, após tais resultados, usando raios curvos caracterizando uma situação mais realista. Os tempos de percursos entre fontes e receptores são providos da modelagem direta e consistem no vetor de dados de entrada na inversão. A modelagem é obtida com a teoria do traçado de raios e a estimação dos parâmetros do modelo, ou vetor de vagarosidades (recíproco da velocidade), se dá pela inversão de dados o qual foi obtido com o método da decomposição por valores singulares (SVD, do inglês Singular Value Decomposition). A matriz tomográfica descreve a geometria dos raios quer sejam retos ou curvos. Trabalhou-se com tomograma sísmico e eletromagnético para o caso linear e, na etapa final para o caso linearizado. O uso dos dois métodos serviu para avaliar as respostas do método GCV quando as propriedades que influênciam no valor da velocidade mudam com o método de obtenção de dados. O parâmetro λ é selecionado dentro de uma faixa arbitrária utilizada no processo o qual é indicado pelo método GCV. É importante salientar que em todos os modelos geológicos apresentados nos capítulos 4 e 5 existe uma área de cobertura onde a reconstrução é mais bem iluminada, porque a região mais centrada é naturalmente mais ilmuninada por raios do que as regiões mais periféricas, conforme pode-se notar na Figura 4.1.

4.1 Descrição do Modelo

A Figura 4.2 mostra o modelo geológico usado nas simulações lineares tomográficas eletromagnéticas e sísmicas, o mesmo possui seis níveis estratigráficos com três camadas consideradas como arenitos e três camadas consideradas como folhelhos intercalados entre si, os diferentes valores de velocidades para mesmas litologias estão associados, possivelmente, às diferenças nas suas propriedades petrofísicas tais como a porosidade, densidade, grau de compactação, grau de saturação em água e/ou óleo e teor de argila na camada arenosa.



Figura 4.1: Um exemplo de percurssos com traçado de raios retos. A distância entre poços é de 200 m e a profundidade varia de 0 a 400 m.

Temos duas distribuições de velocidades: *i*) distribuição eletromagnética com variação de 50 a 200 $m/\mu s$ (Figura 4.2 (a)) usado nas inversões tomográficas eletromagnéticas; *ii*) distribuição sísmica com uma variação de 1500 a 3500 m/s (Figura 4.2 (b)) usado nas inversões tomográficas sísmicas.

Estruturalamente, o modelo é descrito por um anticlinal assimétrico de origem tectônica que pode ter sofrido mecanismos de deformação anti e pós-deposicional, não obstante o objetivo em ambas inversões é o de recuperar bem as estruturas sem, com isso, realizar interpretação geológica. Tais situações geológicas são de relevância para exploração de petroléo por gerar trapas, mas precisamente trapas estruturais dominadas por dobras. As trapas são arranjos geométricos de rochas que permitem significante acumulação de hidrocarbonetos em subsuperfície, a trapa muitas vezes inclui a rocha reservatório que armazena o hidrocarboneto e a rocha selante que impede a migração para fora do reservatório (Biddle e Wielchowsky, 1994). Neste modelo, a nossa rocha reservatório está representada pela camada de arenito poroso e permeável apresentando possível acumulação de hidrocarboneto (zona de alta e baixa velocidade no tomograma eletromagnético e sísmico, respectivamente) e a rocha selante representada pelo folhelho impermeável.

O modelo é limitado lateralmente por poços com 30 fontes num poço e 30 receptores no outro poço, de modo a se ter 900 raios ou 900 equações, por conseguinte o problema é dito sobredeterminado. A discretização se deu com 800 blocos quadrados com vagarosidade constante em cada bloco o quais possuem formato quadrado de dimensão 10 m, sendo 20 blocos na horizontal e 40 blocos na vertical constituindo um modelo com 400 m na vertical e 200 m na horizontal.



Figura 4.2: Modelo verdadeiro 1 (a) Tomograma eletromagnético, velocidade em $m/\mu s$. (b) Tomograma sísmico, velocidade em m/s.

4.2 Inversão de Dados Sísmicos

Empregou-se três ordens de regularização: 0, 1 e 2 e o parâmetro ótimo selecionado deve estar associado ao mínimo de cada curva da função GCV conforme teoria explanada anteriormente. Gerou-se curvas da função GCV em relação ao parâmetro lambda como variável independente para cada exemplo, sendo uma curva para cada ordem de regularização. O procedimento foi repetido adicionando, desta vez, ruídos gaussianos ao vetor de tempos de trânsito empregando cinco níveis diferentes de ruído com fatores alpha: 0,01; 0,5; 0,1; 0,3 e 0,5. O fator alpha é uma constante multiplicada à variável aleatória (ran) no processo de inserção de ruído gaussiano. Conforme a equação: $\mathbf{d}^* = \mathbf{d} + \alpha \cdot \mathbf{ran} \cdot \mathbf{d}$, para \mathbf{d} o conjunto de dados observados e **ran** o conjunto de valores de (-0, 5; 0, 5).

A Figura 4.3 mostra a função GCV para regularização de ordem 0, a 4.4 refere-se a regularização de ordem 1 e a 4.5 a regularização de ordem 2, aduzindo, conforme esperado, um mínimo global dentro da faixa utilizada. Os repectivos modelos recuperados encontramse em seguida na Figura 4.6 e fornecem boa estimativa do modelo verdadeiro legitimando, em primeira instância, a aplicabilidade do método GCV.

Em seguida, analisamos o comportamento do critério frente a dados ruídosos cujas curvas são mostradas nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, para ordem de regularização zero, um e dois respectivamente. Percebe-se o mesmo comportamento, a curva apresentando um mínimo, porém de convergência mais suave. Para os tomogramas estimados a qualidade é relativamente perdida a medida que aumentamos o nível de ruído até um ponto em que a imagem recuperada não fornece alguma informação acerca do modelo verdadeiro, isso é verificado nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12. Como se pode notar, regularizações de ordem um e dois forneceram os melhores resultados por realizar uma suavização sem aumentar o erro na estimação do modelo.



Figura 4.3: Curva GCV para regularização de ordem 0 na inversão sísmica (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.4: Curva GCV para regularização de ordem 1 na inversão sísmica (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.5: Curva GCV para regularização de ordem 2 na inversão sísmica (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.6: Modelo 1 recuperado na inversão sísmica para (a) regularização de ordem 0 (b) regularização de ordem 1 (c) regularização de ordem 2.



Figura 4.7: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 0.



Figura 4.8: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 1



Figura 4.9: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão sísmica (Modelo 1), regularização de ordem 2.

4.3 Inversão de Dados Eletromagnéticos

A mesma técnica foi empregada servindo-se, desta vez, de dados eletromagnéticos, a intenção é avaliar a resposta do método GCV com relação às altas velocidades eletromagnéticas. Além de que, o método eletromagnético vem sendo alvo de pesquisas afim de complementar a sísmica na exploração de novos reservatórios de petróleo. Foram geradas curvas da função GCV em relação ao parâmetro lambda como variável independente para cada exemplo, sendo uma curva para cada ordem de regularização e repetindo o procedimento adicionando ruídos gaussianos ao vetor de tempos de trânsito empregando cinco níveis diferentes de ruído. A Figura 4.13 mostra a função GCV para regularização de ordem 0, a Figura 4.14 referese a regularização de ordem 1 e a Figura 4.15 a regularização de ordem 2, seguidos dos tomogramas eletromagnéticos recuperados mostrado na Figura 4.16. As curvas GCV para dados contaminados com ruídos são expostas nas Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 para ordens de regularização 0, 1 e 2, respectivamente.

Para os tomogramas eletromagnéticos estimados a qualidade, também, é perdida a medida que aumentamos o nível de ruído até um ponto em que a imagem recuperada não fornece alguma informação acerca do modelo verdadeiro, como pode ser verificado nas Figuras 4.21 e 4.22. Os tomogramas obtidos com dados eletromagnéticos ruídosos para regularização de ordem 0 mostraram-se inadequados, mesmo para um menor fator de ruído "alpha=0,01" (1% RMS) conforme visto na Figura 4.20 onde nenhuma estrutura e interfaces puderam ser visualizadas, todavia as regularizações de ordem um e dois mostaram-se adequadas.



Figura 4.10: Modelo 1 recuperado na inversão sísmica com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 0.



Figura 4.11: Modelo 1 recuperado na inversão sísmica com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 1.



Figura 4.12: Modelo 1 recuperado na inversão sísmica com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 2.



Figura 4.13: Curva GCV para regularização de ordem 0 na inversão eletromagnética (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.14: Curva GCV para regularização de ordem 1 na inversão eletromagnética (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.15: Curva GCV para regularização de ordem 2 na inversão eletromagnética (Modelo 1), com dados livres de ruídos.



Figura 4.16: Modelo 1 recuperado na inversão eletromagnética para (a) regularização de ordem 0 (b) regularização de ordem 1 (c) regularização de ordem 2.

MODELO ESTIMADO



Figura 4.17: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 0.



Figura 4.18: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 1.



Figura 4.19: Função GCV com cinco níveis diferentes de ruído gaussiano adicionado aos dados na inversão eletromagnética (Modelo 1), regularização de ordem 2.

4.4 Considerações

Na sísmica, a tomografia de tempos de trânsito fornece imagens de alta resolução de um campo de velocidades. O mesmo pode ser esperado para o imageamento eletromagnético (EM) de alta frequência. Todavia, com a inserção de ruído nos dados essa resolução diminui consideravelmente. Deve-se reputar que o modelo, o qual descreve uma situação geológica, elaborado é de relativa complexidade. Por essa perspectiva, os resultados obtidos com dados ruídosos mostraram-se bastante regulares. Nas inversões eletromagnéticas, os tomogramas obtidos para a regularização de ordem zero não se mostraram adequados para recuperação do modelo verdadeiro, isto quando aplicados ruídos gaussianos, a técnica GCV mostrou-se inadequada para escolher o λ neste caso. Esse incoveniente é contornado nas regularizações de ordem um e dois, pois as soluções são efetivamente suavizadas, fato que pode proporcionar melhor atuação do método GCV na escolha de λ .

Comparando os tomogramas sísmicos e eletromagnéticos, conclui-se que o método sísmico forneceu melhores estimativas do modelo verdadeiro. Tira-se a ilação: mesmo para uma abordagem cinemática a tomografia EM pode ser aplicada para obter imagens de subsuperfície, não obstante, é mais válido associá-la as informações de velocidades do levantamento sísmico poço-a-poço. Na comunidade geofísica, Nekut (1994) demostra a aplicabilidade do traçado de raios para tomografia EM de alta frequência obtendo imagem da distribuição de condutividades elétricas entre poços, a condutividade fornece informações acerca da distribuição de porosidade e fluido de saturação via equação de Archie. Os resultados das simulações encontram-se na Tabela 4.1, onde: $E_{d,RMS}$ é o erro RMS entre os parâmetros de



Figura 4.20: Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 0 na inversão eletromagnética.



Figura 4.21: Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 1 na inversão eletromagnética.



Figura 4.22: Modelo 1 recuperado com ruído (a) " α =0,01" (0,1% RMS), (b) " α =0,05" (0,5% RMS), (c) " α =0,1" (1% RMS), (d) " α =0,3" (3% RMS), (e) " α =0,5" (5% RMS), regularização de ordem 2 na inversão eletromagnética.

dados, dado pela equação 4.1 de forma percentual:

$$E_{d,RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} (t_i^{obs} - t_i^{cal})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} (t_i^{obs})^2}} \times 100, \qquad (4.1)$$

e $E_{m,RMS}$ é o erro RMS entre os parâmetros do modelo, dado pela equação 4.2 de forma percentual:

$$E_{m,RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (m_i^{ver} - m_i^{est})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (m_i^{ver})^2}} \times 100.$$
(4.2)

Relação dos Resultados Obtidos - Tomografia Sísmica				
Fator de Ruído (α)	D_n	λ ótimo	$E_{\mathbf{d},RMS}$ (%)	$\mathbf{E}_{\mathbf{m},RMS}$ (%)
0	0	10^{-5}	0	0,05
	1	10^{-5}		4,05
	2	10^{-5}		3,24
0,01	0	10	0,1	9,5
	1	10		7,71
	2	10		7,85
0,05	0	10^{2}	0,5	11,67
	1	10^{3}		9,26
	2	10^{2}		10,27
0,1	0	10^{2}	1	14,52
	1	10^{3}		9,83
	2	10^{3}		10,35
0,3	0	10^{3}	3	21,87
	1	10^{4}		11,43
	2	10^{4}		12,48
0,5	0	10^{3}		31,37
	1	10^{4}	5	13,98
	0	1.05		12.07
	Z	10°		13,67
Relação dos Resu	2 ltado	os Obtido	s - Tomogra	fia Eletromagnética
Relação dos Resu	2 ltado 0	10° os Obtido 10 ⁻⁵	s - Tomogra	fia Eletromagnética 0,02
Relação dos Resu 0	$\begin{array}{c} 2\\ \mathbf{ltadc}\\ 0\\ 1\end{array}$	10° os Obtido 10^{-5} 10^{-5}	s - Tomogra	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05
Relação dos Resu 0	$ \begin{array}{c} 2\\ 1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 10^{5} \\ \hline \text{os Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \end{array} $	s - Tomogra	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07
Relação dos Resu 0	2 ltado 1 2 0	$ \begin{array}{c} 10^{5} \\ \hline \text{os Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10 \end{array} $	s - Tomogra	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84
Relação dos Resu 0 0,01	2 ltado 1 2 0 1 1	$ \begin{array}{c} 10^{5} \\ \hline \text{os Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10 \\ 10 \\ 10 \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26
Relação dos Resu 0 0,01	2 Itado 0 1 2 0 1 2	$ \begin{array}{c} 10^{5} \\ \hline \text{os Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26 17,52
Relação dos Resu 0 0,01	2 Itado 1 2 0 1 2 0 1 2 0	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \\ 10^{2} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26 17,52 395,89
Relação dos Resu 0 0,01 0,05	2 Itado 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 1 1 2	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1 0,5	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26 17,52 395,89 22,12
Relação dos Resu 0 0,01 0,05	2 Itado 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1 0,5	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26 17,52 395,89 22,12 23,38
Relação dos Resu 0 0,01 0,05	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1 0,5	13,87 fia Eletromagnética 0,02 1,05 3,07 57,84 19,26 17,52 395,89 22,12 23,38 443,13
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1	2 Itado 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{3} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1	$\begin{array}{r} 13,87\\ \hline \textbf{fia Eletromagnética}\\ \hline 0,02\\ \hline 1,05\\ \hline 3,07\\ \hline 57,84\\ \hline 19,26\\ \hline 17,52\\ \hline 395,89\\ \hline 22,12\\ \hline 23,38\\ \hline 443,13\\ \hline 22,41\\ \end{array}$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1	2 Itado 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2 1 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{3} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{2}$	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1	$\begin{array}{r} 13,87\\ \hline \textbf{fia Eletromagnética}\\ \hline 0,02\\ \hline 1,05\\ \hline 3,07\\ \hline 57,84\\ \hline 19,26\\ \hline 17,52\\ \hline 395,89\\ \hline 22,12\\ \hline 23,38\\ \hline 443,13\\ \hline 22,41\\ \hline 26,13\\ \end{array}$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{3} \\ 10^{2} \\ 10^{3} \\ 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\$	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1	13,87fia Eletromagnética $0,02$ $1,05$ $3,07$ $57,84$ $19,26$ $17,52$ $395,89$ $22,12$ $23,38$ $443,13$ $22,41$ $26,13$ $44,29$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1 0,3	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \end{array} $	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1 3	$\begin{array}{r} 13,87\\ \hline \textbf{fia Eletromagnética}\\ \hline 0,02\\ \hline 1,05\\ \hline 3,07\\ \hline 57,84\\ \hline 19,26\\ \hline 17,52\\ \hline 395,89\\ \hline 22,12\\ \hline 23,38\\ \hline 443,13\\ \hline 22,41\\ \hline 26,13\\ \hline 44,29\\ \hline 23,80\\ \end{array}$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1 0,3	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{3} \\ 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{5} \\ 1$	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1 3	$\begin{array}{r} 13,87\\ \hline \textbf{fia Eletromagnética}\\ \hline 0,02\\ \hline 1,05\\ \hline 3,07\\ \hline 57,84\\ \hline 19,26\\ \hline 17,52\\ \hline 395,89\\ \hline 22,12\\ \hline 23,38\\ \hline 443,13\\ \hline 22,41\\ \hline 26,13\\ \hline 44,29\\ \hline 23,80\\ \hline 24,87\\ \end{array}$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1 0,3	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline \text{ps Obtido} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{3} \\ 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{1$	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1 3	13,87fia Eletromagnética $0,02$ $1,05$ $3,07$ $57,84$ $19,26$ $17,52$ $395,89$ $22,12$ $23,38$ $443,13$ $22,41$ $26,13$ $44,29$ $23,80$ $24,87$ $155,31$
Relação dos Resu 0 0,01 0,05 0,1 0,3 0,5	$ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0$	$ \begin{array}{c} 10^{3} \\ \hline 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{-5} \\ \hline 10^{2} \\ 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{2} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{3} \\ \hline 10^{4} \\ 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\ 10^{4} \\ \hline 10^{4} \\$	s - Tomogra 0 0,1 0,5 1 3 5	13,87fia Eletromagnética $0,02$ $1,05$ $3,07$ $57,84$ $19,26$ $17,52$ $395,89$ $22,12$ $23,38$ $443,13$ $22,41$ $26,13$ $44,29$ $23,80$ $24,87$ $155,31$ $25,25$

Tabela 4.1: Resultados obtidos para a inversão tomográfica com traçado de raios retos, utilizando cinco níveis de ruído, matrizes de derivadas de ordem 0, 1 e 2 e o método GCV para extração do λ ótimo de regularização.

CAPÍTULO 5

Modelamento e Inversão Utilizando Raios Curvos

Uma vez validada a aplicação do método GCV, inserimos um contexto mais realista com a modelagem do traçado de raios curvos, pois a tomografia de tempos de trânsito na geofísica é altamente não linear. Isso é devido ao percurso da frente de onda ser uma curva que depende da vagarosidade. Não obstante, é praticável a linearização do problema, para tanto, lançamos mão do método de iteração simples descrito no capítulo 1, mas incluindo a regularização cuja expressão pode ser vista no capítulo 3. Um método iterativo é um processo em que se obtém uma sequência de soluções aproximadas do problema, tal que cada termo da sequência atual é obtido a partir dos anteriores.

Para um problema não linear resolvido usando um procedimento iterativo, o GCV pode ser empregado em cada iteração, por significar cada iteração um problema linear particular, e por sua vez um λ ótimo é escolhido na iteração respectiva. Nas iterações finais, caso ocorra convergência, as mudanças no modelo serão pequenas, sendo a aproximação linearizada uma descrição adequada do problema (Santos, 2006). Por fim, construiu-se um outro modelo sintético com suficiente complexidade geológica de modo justificar esta aplicação e analisar a metodologia empregada de tomografia linearizada.

5.1 Descrição do Modelo

A Figura 5.1 mostra o modelo geológico usado nas simulações linearizadas tomográficas eletromagnéticas e sísmicas. Foram dispostos 30 fontes num poço e 30 receptores no outro poço, de modo a se ter 900 raios ou 900 equações. O meio geológico foi discretizado em 800 blocos quadrados com vagarosidade (recíproco da velocidade) constante em cada bloco, sendo 20 blocos na horizontal e 40 blocos na vertical. Resultando num problema dito sobredeterminado, isto é, existem mais equações que incógnitas. Conforme se pode ver na Figura 5.1 existem cinco níveis estratigráficos distribuídos entre três camadas representando arenitos e duas camadas que representam folhelhos, intercalados a duas camadas de arenitos. Sugere-se, novamente, que os diferentes valores de velocidades para mesmas litologias estão associados às diferenças nas suas propriedades petrofísicas tais como a porosidade, densidade, grau de compactação, grau de saturação em água e/ou óleo e teor de argila na camada arenosa, além das propriedades elétricas do material rochoso. Temos duas distribuições de velocidades: *i*) distribuição sísmica com uma variação de 2000 a 3000 m/s (Figura 5.1 (a)) usado nas inversões tomográficas sísmicas; *ii*) distribuição eletromagnética com variação de 120 a 200 $m/\mu s$ (Figura 5.1 (b)) para as inversões tomográficas eletromagnéticas.

Na descrição de estruturas do modelo, observa-se a presença de falha reversa na camada arenosa a qual se encontra intercalada por folhelhos. As falhas podem ser extremamente importante para a viabilidade de uma armadilha, fornecendo tanto selos quanto pontos de fuga, elas são capazes de agir como selos de topo, lateral ou de base, através da justaposição de rochas relativamente impermeáveis contra unidades permeáveis (Biddle e Wielchowsky, 1994). Baseado na restrição para uso do termo *combinação de trapas* encontrado em Biddle e Wielchowsky (1994), pode-se classificar esse arranjo como uma trapa mista, pois nem a estrutura e a estratigrafia atuaram sozinhos como elementos formadores da trapa, mas ambos foram essenciais - a falha impedindo possível migração lateral e as camadas impermeáveis selando topo e base do reservatório apresentando acumulação de hidrocarbonetos (zona de alta e baixa velocidade no tomograma eletromagnético e sísmico, respectivamente). O bom imageameento deste arranjo, portanto, é de interesse para a indústria do petróleo uma vez que constituem potencias armazenamento de hidrocarbonetos.



Figura 5.1: Modelo verdadeiro 2 (a) Tomograma sísmico velocidades em m/s. (b) Tomograma eletromagnético velocidades em $m/\mu s$

5.2 Inversão de Dados Sísmicos

Empregamos três ordens de regularização: 0, 1 e 2 e o parâmetro ótimo selecionado deve estar associado ao mínimo de cada curva da função GCV e é escolhido na respectiva iteração. Na primeira iteração partiu-se de um modelo inicial de velocidade acústica constante igual a 3000 m/s equivalendo ao traçado de raios retos. Para a regularização de ordem 0, a Figura 5.2 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando, conforme esperado, um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. A Figura 5.3 mostra a recuperação tomográfica para a primeira iteração e a Figura 5.4 para a quarta iteração. O critério de parada foi considerado quando a variação nos valores de velocidades torna-se mínima conforme se verifica entre as diferentes iterações.

No caso da regularização de ordem 1, a Figura 5.5 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. As Figuras 5.6 e 5.7 mostram a recuperação tomográfica equivalente. Tal qual o caso anterior verificou-se que 4 iterações são suficientes. Finalmente, para a regularização de ordem 2, a Figura 5.8 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram a recuperação tomográfica na iteração 1 e 4, de forma recorrente a solução considerada estável foi a quarta iteração. Note-se que para as três ordens a imagem recuperada na quarta iteração mostra boa coerência com o modelo verdadeiro.



Figura 5.2: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão sísmica, para regularização de ordem 0, para diferentes iterações de traçado de raio.



Figura 5.3: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem0,na inversão sísmica.



Figura 5.4: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 0, na inversão sísmica.



Figura 5.5: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão sísmica, para regularização de ordem 1, para diferentes iterações de traçado de raio.



Figura 5.6: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 1, na inversão sísmica.



Figura 5.7: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 1, na inversão sísmica.



Figura 5.8: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão sísmica, para regularização de ordem 2, para diferentes iterações de traçado de raio.


Figura 5.9: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 2, na inversão sísmica.



Figura 5.10: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 2, na inversão sísmica.

5.3 Inversão de Dados Eletromagnéticos

A metodologia agora é aplicada sobre dados eletromagnéticos, espera-se o mesmo comportamento para a função GCV, mas características diferentes para os tomogramas estimados. Por conseguinte, empregou-se três ordens de regularização: 0, 1 e 2 com o parâmetro de regularização escolhido em cada iteração em particular. Na primeira iteração partiu-se de um modelo inicial de velocidade eletromagnética constante igual a 150 $m/\mu s$ correspondendo ao traçado de raios retos. Para a regularização de ordem 0, a Figura 5.11 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. A Figura 5.12 mostra a recuperação tomográfica para a primeira iteração e a Figura 5.13 para a quarta iteração. Verificou-se convergência e o critério de parada foi considerado quando a variação nos valores de velocidades torna-se mínima conforme se verifica entre as diferentes iterações. No caso da regularização de ordem 1, a Figura 5.14 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. As Figuras 5.15 e 5.16 mostram a recuperação tomográfica equivalente. Tal qual o caso anterior verificou-se convergência para a solução e que 4 iterações são suficientes. Finalmente, para a regularização de ordem 2, a Figura 5.17 mostra a curva GCV para as 4 iterações realizadas mostrando um λ ótimo associado ao mínimo em cada iteração. As Figuras 5.18 e 5.19 mostram a recuperação tomográfica na iteração 1 e 4, recorrentemente a solução considerada estável foi a quarta iteração.



Figura 5.11: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletromagnética, para regularização de ordem 0, para diferentes iterações de traçado de raio.



Figura 5.12: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 0, na inversão eletromagnética.



Figura 5.13: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 0, na inversão eletromagnética.



Figura 5.14: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletromagnética, para regularização de ordem 1, para diferentes iterações de traçado de raio.



Figura 5.15: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 1, na inversão eletromagnética.



Figura 5.16: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 1, na inversão eletromagnética.



Figura 5.17: Curva GCV em função do parâmetro de regularização na inversão eletromagnética, para regularização de ordem 2, para diferentes iterações de traçado de raio.



Figura 5.18: Tomograma estimado na primeira iteração para regularização de ordem 2, na inversão eletromagnética.



Figura 5.19: Tomograma estimado na quarta iteração para regularização de ordem 2, na inversão eletromagnética.

5.4 Considerações

Começando o estudo dos resultados pela observação dos tomogramas e da Tabela 5.1 ambas inversões sísmicas e eletromagnéticas convergiram para uma solução estável, por não se tratar de uma região de variações suaves uma delimitação com mais precisão da estrutura de falha não foi obtida. Ambas inversões tomográficas delimitaram as interfaces adequadamente e possibilitaram a visualização da zona de acumulação de petróleo, esse sucesso deve-se, provávelmente, as distribuições de velocidades, porque como se pode notar na Figura 5.1 essa região apresenta elevado contraste com relação às camadas adjacentes.

O critério GCV mostra-se conveniente para estimativa do λ ótimo no método iterativo simples. Nota-se, por meios dos tomogramas estimados, que é sempre melhor utilizar as regularizações de ordem um e dois, quando for aplicada a regularização por matrizes de derivadas usando GCV. Pois, uma ordem está sempre oferecendo estimações superiores à outra (e vice-versa) eliminando dúvidas e erros numa interpretação geológica.

Relação dos Resultados Obtidos - Tomografia Sísmica				
Ordem da iteração	D_n	λ ótimo	$E_{\mathbf{d},RMS}$ (%)	$E_{\mathbf{m},RMS}$ (%)
1 ^a	0	10^{2}	0,004	0,19
	1	10^{3}	0,42	19,47
	2	10^{3}	0,43	19,60
2 ^a	0	10^{2}	0,0025	0,06
	1	10^{3}	0,32	5,39
	2	10^{3}	0,33	5,81
3 ^a	0	10^{4}	0,003	0,005
	1	10^{4}	0,28	0,64
	2	10^{4}	0,30	0,89
4ª	0	10^{5}	0,003	4×10^{-4}
	1	10^{9}	0,28	0,02
	2	10^{10}	0,31	0,06
Relação dos Resultados Obtidos - Tomografia Eletromagnética				
1 ^a	0	10^{2}	0,004	0,13
	1	10^{3}	0,44	13,62
	2	10^{3}	0,46	13,94
2ª	0	10^{3}	0,004	0,044
	1	10^{3}	0,37	5,1
	2	10^{2}	0,32	6,88
3ª	0	10^{4}	0,004	0,006
	1	10^{4}	0,33	0,87
	2	10^{2}	0,25	4,42
4 ^a	0	10^{4}	0,003	0,0035
	1	10^{5}	0,35	0,22
	2	10^{3}	0,36	3,40

Tabela 5.1: Resultados obtidos para a inversão tomográfica com traçado de raios curvos, utilizando matrizes de derivadas de ordem 0, 1 e 2 e o método GCV para extração do λ ótimo de regularização.

CAPÍTULO 6

Conclusões

A geotomografia é uma excelente ferramenta geofísica por fornecer imagens de distribuições de propriedades físicas no interior da Terra, porém também é mais um problema inverso mal-posto. Por conseguinte, validar metodologias para garantir um bom condicionamento e, assim, obter soluções factíveis é de fundamental importância. Nesse intuito, empregou-se a regularização por matrizes de derivadas a qual insere um parâmetro de regularização λ . O emprego do método de validação cruzada generalizada desempenha um papel crucial por selecionar um λ ótimo na regularização proporcionando soluções suavizadas sem aumentar o erro na estimativa. Validamos a aplicação do método Validação Cruzada Generalizada (GCV do inglês *Generalized Cross Validation*) em geotomografia por meio de simulações numéricas.

Os testes efetuados para o caso linear sobre o Modelo 1 descrito por um anticlinal assimétrico permitiram validar a técnica GCV para situações com dados ruídosos assim como livres de ruído. Utilizou-se cinco níveis de ruídos para as três ordens de regularização por matrizes de derivadas e quando os dados são livres de ruídos a função GCV oferece um mesmo valor para o λ ótimo nas três ordens de regularização para simulações sísmicas e eletromagnéticas, culminando em tomogramas estimados semelhantes. Com o acréscimo do nível de ruído, esse comportamento passa a mudar indicando que para ruídos mais altos as regularizações atuaram de forma diferente conferindo modelos estimados sem qualidade semelhante. Ainda, verifica-se que a regularização deve ser mais intensa devido ao aumento do valor de λ .

Para a regularização de ordem zero na inversão eletromagnética (EM) a função GCV mostrou-se inadequada, no sentido de não fornecer uma estimativa do Modelo 1. Entendendo que a regularização é aplicada aos dados e na regularização de ordem 0 tem-se um amortecimento com os elementos da diagonal principal enquanto que nas regularizações de ordens superiores aplica-se uma efetiva suavização pelos termos de matrizes de derivadas, este resultado é previsível. Por esse motivo, é sempre melhor utilizar as regularizações de ordem 1 e 2 concomitantemente, quando for aplicada a regularização por matrizes de derivadas usando GCV. Pois, as soluções são devidamente suavizadas e não amortecidas, fato que pode proporcionar melhor atuação do método GCV na escolha de λ . E uma ordem está sempre oferecendo estimações superiores à outra (e vice-versa) eliminando dúvidas e erros numa interpretação geológica.

Simulações foram efetuadas para o caso linearizado sobre o Modelo 2 descrito pela presença de falha inversa. Empregado as três ordens de regularização, escolhendo um λ ótimo em cada iteração. Com sucesso na metodologia, ambas inversões sísmicas e eletromagnéticas convergiram para uma solução estável a partir de um modelo inicial, cujo critério de parada foi considerado quando a variação nos valores de velocidades torna-se mínima. Nesse sentido, quatro iterações mostra-se suficiente, efetivamente três iterações são suficientes a quarta iteração desempenha a função de provar a convergência para a solução. Os tomogramas recuperados delimitaram as interfaces adequadamente e possibilitaram a visualização da zona de acumulação de petróleo. Observa-se que a regularização refina a resposta e atua mais intensamente a medida que o número de iteração aumenta evidenciado pelo aumento no valor de λ , esse fato é mais expressivo na inversão sísmica.

As simulações permitiram concluir que apesar do critério GCV apresentar baixo custo computacional e a extração do parâmetro de regularização com essa técnica ser bastante simplificada por estar associado ao mínimo da curva para uma faixa arbitrária de valores de λ , para se adquirir bons resultados é requerida a qualidade dos dados de entrada, além da boa cobertura, isto é, uma boa iluminação do meio pela passagem dos raios pelo mesmo. Na modelagem usando a teoria de traçado de raios é sempre necessário fornecer uma distribuição de velocidades e conhecer esta em subsuperfície é o parâmetro que se deseja estimar. Então, a distribuição fornecida na modelagem direta constitui sempre uma aproximação, um "chute" inicial baseado nas informações geológicas e geofísicas já conhecidas da área de estudo.

Agradecimentos

À Deus por tudo.

À minha mãe Raquel e ao meu pai João pelo amor e confiança.

Ao meu irmão Robson pelo apoio e amizade.

A toda minha família, especialmente à minha madrinha Noeli, tio Jaime, tia Nair, prima Laís e vovô Roque, pela paciência e grande apoio.

Ao meu namorado, Vitor, pelo companherismo, amor e amizade.

Aos meus amigos Alan (tio) e Caio (tio caio) pelos auxilios computacionais e pela grande amizade, à Rodrigo (digo), Rejhane (rejhe), Dalila, Fernanda (nandinha), Liège (lilica), Carlos Américo (meca), Misael, Carlos Alberto, Nayguel, Thiago Pereira, Kleriston, Ramon, Alan, Thiago Cabral, Gabriel e Pedro. À todos aqui mensionados e os não mensionados que por ventura não citei os nomes, meus sinceros agradecimentos pelo conhecimento doado e pela amizade.

Ao professor Amin Bassrei meu sincero agradecimento pela grande oportunidade de ter a sua orientação. E pela ótima administração como coordenador.

Aos professores Geraldo Girão e Jacira Freitas por terem sido grandes mestres. Principalmente, à professora Jacira pelo carinho desprendido.

A todos os professores do curso de graduação em geofísica pelo conhecimento transmitido.

Aos funcionários Ana, Joaquim Lago e Marcelinho.

Ao convênio UFBA/ANP-PRH08, à FAPESB e ao CNPQ pela bolsa de iniciação científica.

Ao CPGG/UFBA e ao LAGEP/UFBA pelos recursos computacionais.

Finalmente, a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este Trabalho de Graduação fosse concluído.

Referências Bibliográficas

- Andersen, A. H. e Kak, A. C. (1982) Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields, Journal of Acoustical Society of America, 72(5):1593–1606.
- Annan, A. P. (2001) Ground Penetrating Radar workshop notes, In: *Physical Properties I*, cap. 3, Sensors & Software Inc., Mississauga, Ontario, Canada.
- Bassrei, A. (1990) Inversão de dados geofísicos inidimensionais através da entropia relativa mínima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Bassrei, A. e Rodi, W. L. (1993) Regularization and inversion of linear geophysical data, In: Proceedings of the Third International Congress of the Brazilian Geophysical Society, vol. 1, pp. 111–116, Rio de Janeiro, Brazil, SBGf.
- Biddle, K. T. e Wielchowsky, C. C. (1994) Hydrocarbon Traps, In: The Petroleum System From Source to Trap, vol. M60, cap. 13, Exxon Exploration Company, Houston, Texas, U.S.A.
- Craven, P. e Wahba, G. (1979) Smoothing noisy data with spline functions estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation, Numer. Math., **31**:377–403.
- Farquharson, C. G. e Oldenburg, D. W. (2004) A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear problems, Geophysical Journal International.
- Girard, D. A. (1987) Optimal regularized reconstruction in computerized tomography, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8 (6):934–950.
- Golub, G. H.; Heath, M. T. e Wahba, G. (1979) Generalized cross-validation as a method for choosing a good reidge parameter, Technometrics, **21**:215–223.
- Menke, W. (1989) Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, Academic Press, California.
- Nabighian, M. N. (1987) Eletromagnetic Methods in Applied Geophysics Theory, Volume 1, Society of Exploration Geophysics, Tulsa.
- Nekut, A. G. (1994) Electromagnetic ray-trace tomography, Geophysics, 59:371–377.
- Noble, B. e Daniel, W. (1977) Algebra Linear Aplicada, Prentice Hall, New Jersey.
- Santos, E. T. F. (2006) Inversão tomográfica símica anisotrópica com regularização ótima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

- Santos, E. T. F. e Bassrei, A. (2007) Application of GCV in geophysical diffraction tomography, 69th European Association of Geoscientists and Engineers Conference e Exhibition, Londres, Reino Unido, pp. 5, CD–ROM.
- Santos, R. J. (1995) Problemas Inversos: métodos iterativos, regularização e validação cruzada generalizada, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, São Paulo.
- Schots, H. A. (1990) Tomografia símica poço a poço e poço a superfície utilizando ondas diretas, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Stewart, R. R. (1991) Exploration Seismic Tomography: Fundamentals, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- Telford, W. M.; Geldart, L. P. e Sheriff, R. E. (1990) Applied Geophysics 2nd ed., Cambridge Un. Press, Cambridge.
- Tikhonov, A. N. e Arsenin, V. Y. (1977) Solutions of Ill-Posed Problems, Wiley, New York.
- Wahba, G. (1990) Spline Models for Observational Data, SIAM, Philadelphia.