



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE INVERSÃO  
LINEARIZADA E DO ALGORITMO GENÉTICO NA  
INVERSÃO DE SONDAGENS ELÉTRICAS  
VERTICAIS

ROMMEL MELHOR MENDES

SALVADOR – BAHIA

NOVEMBRO – 1998

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE INVERSÃO LINEARIZADA  
E DO ALGORITMO GENÉTICO NA INVERSÃO DE  
SONDAGENS ELÉTRICAS VERTICAIS

por

ROMMEL MELHOR MENDES

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA  
DO  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora

\_\_\_\_\_ Dr. Milton José Porsani - Orientador  
\_\_\_\_\_ MC. Joaquim Xavier Cerqueira Neto  
\_\_\_\_\_ MC. Sérgio Cavalcante Guerreiro

Data da aprovação: 11 de novembro de 1998

“É muito mais fácil reconhecer  
o erro do que encontrar a verdade.

O erro esta na superfície,  
e por isso é fácil erradicá-lo.

A verdade repousa no fundo  
e não é qualquer um que consegue  
chegar até ela.”

*Johann Wolfgang Von Goethe*

A meus pais.

# RESUMO

A equação físico-matemática que descreve o comportamento das curvas de eletrorresistividade, é o ponto de partida para a inversão das sondagens elétricas verticais (SEV). São vários os métodos que permitem a inversão das resistividades reais e espessuras das camadas, dentre os quais, a inversão linearizada e os algoritmos genéticos. Neste trabalho, o desempenho e eficiência desses métodos foram objeto de pesquisa.

A inversão linearizada (I.L) é utilizada em problemas que envolvam funções não lineares, onde pode produzir resultados interessantes, especialmente se lhe for fornecido um bom modelo inicial. Entretanto, a não linearidade da função, lhe atribui um comportamento polimodal que muitas vezes leva o método a convergir para um mínimo local. Modificações na proposta original procuraram dinamizar o processo de convergência. A primeira delas foi a adoção do fator de amortecimento de Marquardt, que facilita a convergência, visto que ela ocorre na direção do maior gradiente. O conceito de norma de um vetor, adaptado ao método (Porsani, 1993), transformou-o em inversão linearizada com norma arbitrária. Por fim, a adoção do domínio logarítmico (Johansen, 1977) possibilitou a investigação do comportamento do método de inversão ao se lidar com desvios estabelecidos na forma logarítmica.

Os algoritmos genéticos (A.G), são métodos que visam a determinação de mínimos (ou máximos) globais das funções-objetivo, utilizando conceitos ligados à mecânica da seleção natural, e à genética. Podem alcançar uma região de mínimo global, pois ao contrário da técnica anterior, não são limitados por restrições sobre o universo de pesquisa tais como continuidade, existência de derivadas e unimodalidade. Entretanto, a ocorrência de mínimos locais nas funções- objetivo, constitui-se também aqui um aspecto preocupante, visto que haverá a possibilidade de que se verifique o fenômeno da convergência prematura. Porém, segundo Goldberg e Segrest (1987), a escolha adequada do tamanho da população ( $Pop$ ) e da probabilidade de mutação ( $Pm$ ), podem garantir o alcance da região de mínimo global.

A fase de testes com dados sintéticos foi realizada nos dois casos. Na I.L, utilizou-se um modelo sintético que foi invertido com normas 1, 2 e 3, fator de amortecimento 1 e 2, domínios linear e logarítmico, em todas as combinações possíveis. Utilizando o A.G, o mesmo modelo foi invertido com Populações de 5 e 50 indivíduos, e probabilidades de mutação de 0,20 e 0,02, a fim de se determinar para quais combinações entre esses parâmetros o risco de convergência prematura seria mais amenizado. Os dados de campo, adquiridos nos municípios baianos de Serrolândia e Quixabeira, foram invertidos em I.L no domínio linear, normas 1 e 2, fator de amortecimento 1.1 e 2. Em A.G, foram invertidos com  $Pop=5$ ,  $Pm=0,02$ . Os resultados obtidos, foram ainda analisados à luz dos dados de poços disponíveis.

# ABSTRACT

The physical-mathematical equation that describes the behavior of the curves of resistivity is the starting point for the inversion of the vertical electric surveys (VES). Several methods allow the inversion of the real resistivity and thickness of the layers, among which, the linearized inversion and the genetic algorithms. The performance and efficiency of such methods were object of research of that work.

The linearized inversion (L.I) is used in problems that involve non-linear functions, in which it can produce interesting results, especially if it starts from a good initial model. However, the non-linear nature of the function gives it several minima which at times lead the method to converge to a local minimum. Some changes in the original proposal sought to improve the convergence process. The first one was the adoption of the weakening factor of Marquardt, that smoothes the convergence, due to its action in the direction of the largest gradient. The norm concept of a vector, adapted to the method (Porsani, 1993), transformed it in a linearized inversion with arbitrary norm. Finally, by adopting of the logarithmic domain (Johansen, 1977), the investigation of the behavior of the inversion method becomes easier when working with deviations established in the logarithmic form.

The genetic algorithms (G.A) are methods that seek the determination of global minimum (or maximum) of the objective functions, using concepts of the natural selection mechanism, and the genetics. They can reach a region of global minimum, because unlike the previous technique, they are not limited by restrictions on the research universe such as continuity, existence of derived and one single least. However, the occurrence of local minimum in the objective function is also here an aspect for concern once there might be a possibility of occurrence of the premature convergence phenomenon. However, according to Goldberg and Segrest (1987), the choice of size of the population ( $Pop$ ) and of the mutation probability ( $Pm$ ) can assure the reaching of the global minimum region.

Tests with synthetic data was carried out in the two instances. In L.I, a synthetic model was inverted with norms 1, 2 and 3, using a weakening factor 1 and 2, in the linear and logarithmic domains, and all the possible combinations were used. As for the G.A, the same model was inverted with populations of 5 and 50 individuals, and probabilities of mutation of 0.2 and 0.02 in order to determine for which combinations among those parameters the premature convergence would be avoided. The field data, acquired in the cities of Serrolândia and Quixabeira, on central part of the Bahia state, were inverted in L.I in the linear domain, norms 1 and 2 and weakening factor 1.1 and 2. In G.A, they were inverted with  $Pop=5$ ,  $Pm=0.02$ . The obtained results were analyzed in the light of the data of available wells.

# ÍNDICE

<b>RESUMO</b> . . . . .	ii
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	iii
<b>ÍNDICE</b> . . . . .	iv
<b>ÍNDICE DE TABELAS</b> . . . . .	v
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> . . . . .	vi
<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	1
<b>CAPÍTULO 1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DA ÁREA ESTUDADA</b> . . . . .	3
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 Localização e acesso . . . . .	4
1.3 Aspectos hidrogeológicos . . . . .	4
1.4 Metodologia de campo . . . . .	10
1.5 Curvas obtidas das sondagens elétricas verticais . . . . .	11
<b>CAPÍTULO 2 ELETORRESISTIVIDADE</b> . . . . .	14
2.1 Introdução . . . . .	14
2.2 Fundamentos teóricos . . . . .	15
2.3 O arranjo Schlumberger . . . . .	18
2.4 Determinação da função resistividade aparente . . . . .	22
2.5 Sondagem elétrica vertical . . . . .	27
<b>CAPÍTULO 3 O MÉTODO DE INVERSÃO LINEARIZADA</b> . . . . .	30
3.1 Introdução . . . . .	30
3.2 Modelagem direta . . . . .	32
3.3 Inversão linearizada com norma 2 . . . . .	33
3.4 Inversão linearizada com norma $L_p$ . . . . .	36
3.5 Inversão linearizada no domínio logarítmico . . . . .	38
3.6 O fator de amortecimento para estabilizar a I.L. . . . .	39
3.7 O método aplicado a modelos sintéticos . . . . .	40
3.8 Alguns testes com dados reais . . . . .	60
3.9 O método aplicado aos dados de campo . . . . .	65

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>ALGORÍTMICO GENÉTICO</b>	81
4.1	Introdução	81
4.2	Codificação e o problema da otimização	82
4.3	Etapas de desenvolvimento do método	84
4.4	Como os AG's trabalham	85
4.5	Como o cruzamento afeta os esquemas	86
4.6	O teorema fundamental dos AG's	87
4.7	Cruzamento, mutação e o problema da convergência prematura	89
4.8	Testes com dado sintético	90
4.9	O método aplicado aos dados de campo	97
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	111
<b>AGRADECIMENTOS</b>		115
<b>APÊNDICE A</b>	<b>Expansão por série de Taylor</b>	116
<b>APÊNDICE B</b>	<b>Conceitos e propriedades de norma de um vetor</b>	119
<b>APÊNDICE C</b>	<b>O método dos mínimos quadrados</b>	120
<b>APÊNDICE D</b>	<b>O método conjugado gradiente</b>	122
<b>Referências</b>		125

# ÍNDICE DE TABELAS

2.1	Comparativo entre os arranjos utilizados em métodos elétricos. Os números representam uma ordem, onde 1 indica o melhor desempenho, e 5, o pior. Fonte: (Ward, 1990) . . . . .	21
3.1	Valores dos parâmetros do modelo sintético escolhido . . . . .	41
3.2	Valores dos parâmetros invertidos com domínio linear e modelo inicial bom. . . . .	42
3.3	Valores dos parâmetros invertidos com domínio linear e modelo inicial ruim. . . . .	43
3.4	Valores dos parâmetros invertidos com domínio logarítmico e modelo inicial bom. . . . .	44
3.5	Valores dos parâmetros invertidos com domínio logarítmico e modelo inicial ruim. . . . .	44
3.6	Valores dos parâmetros invertidos do primeiro modelo de campo. . . . .	60
3.7	Valores dos parâmetros invertidos do segundo modelo de campo. . . . .	61
3.8	Valores dos parâmetros invertidos do terceiro modelo de campo. . . . .	61
3.9	Valores típicos de resistividades de algumas rochas. Valarovich e Parkhomenko, (1976) . . . . .	66
3.10	Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 1 . . . . .	67
3.11	Modelos inicial e ajustado da SEV 1 . . . . .	67
3.12	Modelos inicial e ajustado da SEV 2 . . . . .	67
3.13	Modelos inicial e ajustado da SEV 3 . . . . .	68
3.14	Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 4 . . . . .	69
3.15	Modelos inicial e ajustado da SEV 4 . . . . .	69
3.16	Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 5 . . . . .	69
3.17	Modelos inicial e ajustado da SEV 5 . . . . .	70
3.18	Modelos inicial e ajustado da SEV 6 . . . . .	70
3.19	Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 7 . . . . .	71
3.20	Modelos inicial e ajustado da SEV 7 . . . . .	71
3.21	Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 8 . . . . .	72
3.22	Modelos inicial e ajustado da SEV 8 . . . . .	72

4.1	Valores dos parâmetros do modelo sintético, ajustados com algoritmo genético	90
4.2	Universo de procura estabelecido para a inversão do modelo sintético. . . . .	91
4.3	Parâmetros ajustados para a SEV 1. . . . .	97
4.4	Parâmetros ajustados para a SEV 2. . . . .	98
4.5	Parâmetros ajustados para a SEV 3. . . . .	98
4.6	Parâmetros ajustados para a SEV 4. . . . .	98
4.7	Parâmetros ajustados para a SEV 5. . . . .	99
4.8	Parâmetros ajustados para a SEV 6. . . . .	99
4.9	Parâmetros ajustados para a SEV 7. . . . .	99
4.10	Parâmetros ajustados para a SEV 8. . . . .	100
4.11	Quadro de valores mínimos e máximos dos parâmetros utilizados na inversão das SEV's. . . . .	101
4.12	Variáveis de entrada: suas definições e valores adotados . . . . .	102

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Mapa de localização da área. . . . .	6
1.2	Mapa geológico da região de Caldeirão Grande . . . . .	7
1.3	Legenda do mapa geol. de Caldeirão Grande . . . . .	8
1.4	Localização dos pontos de sondagens. . . . .	9
1.5	Dados de campo relativos às sondagens 1, 2, 3 e 4. . . . .	12
1.6	Dados de campo relativos às sondagens 5, 6, 7 e 8. . . . .	13
2.1	Configuração do arranjo Schlumberger . . . . .	19
2.2	Modelo de $n$ camadas horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada $m$ . . . . .	23
2.3	Embreagens realizadas nos trabalhos de campo. . . . .	29
2.4	Variação da densidade de corrente com a profundidade. . . . .	29
3.1	Representação esquemática da função-objetivo não linear e linearizada . . . . .	32
3.2	Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1 . . . . .	46
3.3	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	47
3.4	Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2 . . . . .	48
3.5	Idem, Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	49
3.6	Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 1 . . . . .	50
3.7	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	51
3.8	Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2 . . . . .	52
3.9	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	53
3.10	Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1 . . . . .	54
3.11	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	55
3.12	Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2 . . . . .	56
3.13	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	57
3.14	Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2 . . . . .	58
3.15	Idem, comportamento dos parâmetros ao longo das iterações. . . . .	59
3.16	Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 e norma 2. . . . .	62
3.17	Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 e norma 2. . . . .	63
3.18	Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 e norma 2. . . . .	64
3.19	Inversão da SEV 1 com IL. . . . .	73
3.20	Inversão da SEV 2 com IL. . . . .	74
3.21	Inversão da SEV 3 com IL. . . . .	75
3.22	Inversão da SEV 4 com IL. . . . .	76

3.23	Inversão da SEV 5 com IL. . . . .	77
3.24	Inversão da SEV 6 com IL. . . . .	78
3.25	Inversão da SEV 7 com IL. . . . .	79
3.26	Inversão da SEV 8 com IL. . . . .	80
4.1	Função-objetivo do tipo polimodal, com vários pontos de máximo e mínimos locais. . . . .	81
4.2	Hipercubo formado por hiperplanos com esquemas de ordem 1. . . . .	86
4.3	Resultados das inversões com diferentes populações e probabilidades de mutação. . . . .	92
4.4	Comportamento dos parâmetros invertidos, durante as gerações. . . . .	93
4.5	Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da primeira camada do modelo sintético durante as gerações. . . . .	94
4.6	Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da segunda camada do modelo sintético durante as gerações. . . . .	95
4.7	Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da terceira camada do modelo sintético durante as gerações. . . . .	96
4.8	Resultados da inversão da SEV 1 feita com A.G. . . . .	103
4.9	Resultados da inversão da SEV 2 feita com A.G. . . . .	104
4.10	Resultados da inversão da SEV 3 feita com A.G. . . . .	105
4.11	Resultados da inversão da SEV 4 feita com A.G. . . . .	106
4.12	Resultados da inversão da SEV 5 feita com A.G. . . . .	107
4.13	Resultados da inversão da SEV 6 feita com A.G. . . . .	108
4.14	Resultados da inversão da SEV 7 feita com A.G. . . . .	109
4.15	Resultados da inversão da SEV 8 feita com A.G. . . . .	110

# INTRODUÇÃO

O objetivo ao se empregar quaisquer dos métodos geofísicos de prospecção, é inferir a distribuição das propriedades físicas do meio investigado. Na técnica de sondagem elétrica vertical procura-se determinar a partir de medidas elétricas efetuadas na superfície da terra a variação da resistividade elétrica dos materiais com a profundidade. Neste caso, os parâmetros que se deseja calcular são resistividade real e espessura de cada camada. O método usual pelo qual se obtém tais parâmetros, consiste em determinar um ajuste ótimo entre os valores de resistividade aparente observados e calculados através da já conhecida função que relaciona o potencial medido com a resistividade aparente: ( $\rho_a = k \cdot \frac{\Delta V}{I}$ ). Um procedimento largamente utilizado neste tipo de problema, é o chamado método de mínimos quadrados, que promove a determinação do mínimo da função representada pelo somatório do erro quadrático. Entretanto, esse método possui como limitação a característica de ser utilizado apenas em inversões onde estejam envolvidas funções lineares, e o problema de inversão de sondagens elétricas verticais, a exemplo de muitos outros tratados em geofísica, possui uma natureza não linear. Isto quer dizer que a expressão que estabelece a resistividade aparente em função dos parâmetros a serem determinados não tem característica de uma equação polinomial. Neste caso, é preciso linearizá-la, isto é, estabelecer uma aproximação linear apropriada que descreva a resposta geofísica de modo similar.

O objetivo desse trabalho, é implementar a inversão linearizada, com a adoção dos conceitos de norma arbitrária, fator de amortecimento e domínio logarítmico e utilizá-la em parceria com o algoritmo genético na tarefa de inversão de sondagens elétricas verticais.

Na I.L, adota-se o método de Gauss-Newton, o qual permite linearizar a expressão do desvio através de sua forma expandida por série de Taylor. É essa expressão do erro, já linearizada, que deve ser minimizada. Entretanto, deve-se lembrar que a adoção do conceito de norma arbitrária, permite que se determine o mínimo não só da expressão do erro quadrático, mas elevado a qualquer outro expoente. Trabalhos anteriores com norma arbitrária, mostraram que quando se dispõe de desvios distribuídos de forma gaussiana, a utilização da norma L2 (que admite a minimização do erro quadrático) fornece resultados satisfatórios. Todavia, em problemas que admitam grandes desvios, pode ser mais eficaz minimizar com norma L1 (somatório dos valores absolutos dos desvios). No sentido de se discriminar a eficácia na utilização das várias normas, foram realizados aqui diversos testes com modelos sintéticos e reais minimizados com algumas delas.

Não é no entanto, o conceito de norma o único a ser introduzido no processo de inversão

linearizada apresentado nesse trabalho. Foi investigada também, a questão do domínio no qual se realizam as inversões, utilizando-se para tanto a forma convencional, na qual se pretende minimizar a função formada pelo somatório dos valores absolutos do erro ao quadrado, e uma versão menos convencional, na qual a função-objetivo é formada pelo somatório do logaritmo dos valores absolutos do erro quadrático. A pesquisa no domínio logarítmico, altera as características dessa função, o que poderá ampliar o poder de convergência do método.

O processo de linearização de uma função, resolve de forma altamente eficiente o problema de minimização através da técnica de mínimos quadrados. Entretanto, para funções não lineares, persiste o problema da convergência para mínimos locais. Como solução a este problema, pode-se utilizar os métodos de otimização global, em particular o algoritmo genético, que também foi objeto de estudo desse trabalho. O método é teoricamente mais indicado no tratamento com funções não lineares, pois ao contrário da técnica de inversão linearizada, ele não exige que se estabeleça um modelo inicial (que deverá sempre estar o mais próximo possível da realidade), e os processos pelos quais permitem-no convergir a um ponto de mínimo não envolvem técnicas tais como convergência através do gradiente, que muitas vezes pode se tornar uma armadilha para mínimos locais. Trata-se de um método de otimização baseado nos princípios genéticos de seleção natural, onde um conjunto inicial de parâmetros é escolhido de forma aleatória e a partir daí, faz-se a escolha dos indivíduos mais aptos utilizando-se regras probabilísticas que envolvem os processos de seleção, cruzamento e mutação.

O presente trabalho foi realizado em duas etapas: na primeira delas, viajou-se a campo, para se obter medidas de sondagens elétricas verticais. Em seguida iniciou-se a etapa de inversão dos dados com os métodos estudados. Em sua organização, procurou-se obedecer a ordem cronológica dos acontecimentos, e em vista disso tem-se no capítulo 1, a localização e descrição da região na qual foram coletados os dados de campo, seguida por um discurso sobre os fundamentos teóricos do método de eletrorresistividade, visto no capítulo 2. Os conceitos, fundamentos teóricos e resultados das inversões dos dados sintéticos e de campo, com os métodos de inversão linearizada e algoritmo genético podem ser vistos respectivamente nos capítulos 3 e 4. O último capítulo, relaciona as conclusões a que se chegou a respeito das inversões com os métodos estudados, bem como propõe trabalhos futuros nessas linhas de pesquisa.

# CAPÍTULO 1

## CARACTERÍSTICAS GERAIS DA ÁREA ESTUDADA

### 1.1 Introdução

A região nordeste do país, em particular o sertão nordestino, com seus 937 000  $km^2$  de extensão, possui como se sabe sérios problemas infra-estruturais agravados por um fator crucial: a falta de água. A região é dominada por um clima semi-árido que trás como principal característica um baixo índice pluviométrico anual. A escassez de chuva e a rede de drenagem superficial deficitária, fazem com que os rios e lagos não sejam perenes, permanecendo secos a maior parte do ano. Esse é o fator responsável pela quantidade insuficiente de reservas hidrológicas superficiais, o que vem a causar sérios problemas de abastecimento de água na região.

O problema de escassez de água no sertão nordestino já é conhecido e estudado há décadas. Órgãos governamentais ligados ao estudo de recursos hídricos têm ao longo desses anos feito diversas análises e proposto soluções, dentre as quais uma das mais consistentes e viáveis seria a propeção e conseqüente exploração da água subterrânea na região.

Geologicamente, 2/3 da região de sertão nordestino está acomodada sobre uma zona de rochas ígneas pertencentes ao complexo cristalino pré-cambriano. As rochas cristalinas na maioria dos casos não se constituem aquíferos, pois a gênese e estrutura cristalina lhes confere baixíssimos índices de permo-porosidade. As regiões aquíferas de ambiente fissural existem porém, sob condições especiais, onde haja intemperismo gerando um manto de alteração relativamente espesso, e neste caso os aquíferos se localizarão no topo do embasamento. E regiões de embasamento cristalino fissurado, onde as fissuras podem atingir dezenas de metros de comprimento. Como a primeira hipótese parece não se verificar na região em estudo, resta apenas a verificação de camadas aquíferas relacionadas a ambientes de embasamento fissurado. É certo que o sucesso na detecção de camadas aquíferas esta associado não somente a existência de ambiente cristalino fissurado, mas também de uma rede de drenagem sub superficial que lhes proporcione um fluxo considerável de água.

Os critérios para a locação de poços existentes na região tem sido até então puramente

geológicos, com base em análise de fotografias aéreas, estudos topográficos, e em outros dados de geologia de superfície. A utilização exclusiva desses métodos tem entretanto, causado um elevado índice de insucessos na locação dos poços, basicamente por se tratar de uma região de rochas cristalinas, onde as zonas aquíferas possuem características particulares e diferentes das regiões sedimentares. Dessa forma, o que se tem freqüentemente observado, são poços perfurados e mais tarde abandonados por não apresentarem desempenho suficiente nos testes de vazão, ou possuírem água com um alto índice de salinidade, imprópria portanto ao consumo humano.

A utilização de métodos geofísicos de prospecção, em particular do método de eletroresistividade como contribuinte na tarefa de caracterização das zonas aquíferas da região do sertão nordestino, poderá contribuir para a diminuição no índice de insucessos na locação dos poços. A expectativa é que a aplicação do método forneça dados suficientes de forma a permitir uma avaliação a cerca da estrutura geométrica dos aquíferos bem como uma análise prévia da qualidade da água, no que diz respeito ao índice de salinidade.

## 1.2 Localização e acesso

As sondagens foram realizadas nos municípios baianos de Serrolândia e Quixabeira e quase sempre junto a poços. A localização exata pode ser vista na figura (1.4). Na figura (1.1) podem ser visualizadas as sedes municipais, as áreas parciais de outros municípios e as principais vias rodoviárias e ferroviárias, com um destaque para a região onde foram realizadas as sondagens.

## 1.3 Aspectos hidrogeológicos

Em ambientes de rochas cristalinas, o aparecimento de estruturas que permitam um acúmulo de água em subsuperfície esta diretamente associado a esforços mecânicos impostos pela tectônica regional. Tais esforços desencadeiam um processo de rupturas que dão origem a fraturas ou falhas que são orientadas de acordo com os planos de fraqueza das rochas. A presença dessas estruturas dão origem aos aquíferos denominados fissurais. Os padrões de drenagem, que são controlados por fendilamentos ou meandros sobre áreas relativamente intemperizadas (Chada Filho, 1965), quando associados a feições estruturais favoráveis, viabilizam a presença de uma região aquífera desenvolvida, que por sua vez, na maioria das ocasiões, é condicionada pela existência de um riacho, cujo curso é estruturalmente controlado, em conexão direta com o aquífero (Cruz, 1974). A água seria então drenada por escoamento superficial, e a partir daí então percolaria em profundidade através das fendas do cristalino. A parcela de água a abastecer os aquíferos vinda de outras regiões que não

próximas a um riacho, pode ser desconsiderada haja vista a sua pouca contribuição. Entretanto, lhe é atribuída a característica peculiar de promover um acréscimo considerável da salinidade do aquífero, pois carrega consigo sais desprendidos do solo (Costa, 1965).

Se por um lado, pode-se condicionar o processo de acúmulo de água no cristalino à existência de um riacho nas proximidades, seria correto afirmar também a importância da existência de fraturas bem dimensionadas na região. Sabe-se entretanto, que a porosidade em geral decresce com a profundidade, devido a pressão do material sobrejacente, e ao confinamento lateral. Em geral se verifica como padrão que aproximadamente 80% das fraturas ocorrem acima da profundidade de 60 metros, e que abaixo de 100 metros elas praticamente não são encontradas (Chada Filho, 1965 e Cruz, 1974).

No que diz respeito a qualidade, é importante destacar os altos teores de sais dissolvidos nas águas da região de embasamento cristalino do nordeste, fenômeno este causado por fatores como clima, aspectos petrográficos, e até uma possível influência marinha, permitindo uma infiltração da água durante a última transgressão, o que cobriu todo o nordeste brasileiro no cretáceo inferior. Existe ainda uma última hipótese que relaciona a salinidade presente na água com a migração de sal marinho em suspensão na forma de aerossóis. O processo seria facilitado pelas altas taxas de evaporação, adicionados aos efeitos de uma lixiviação incompleta dos produtos do intemperismo.

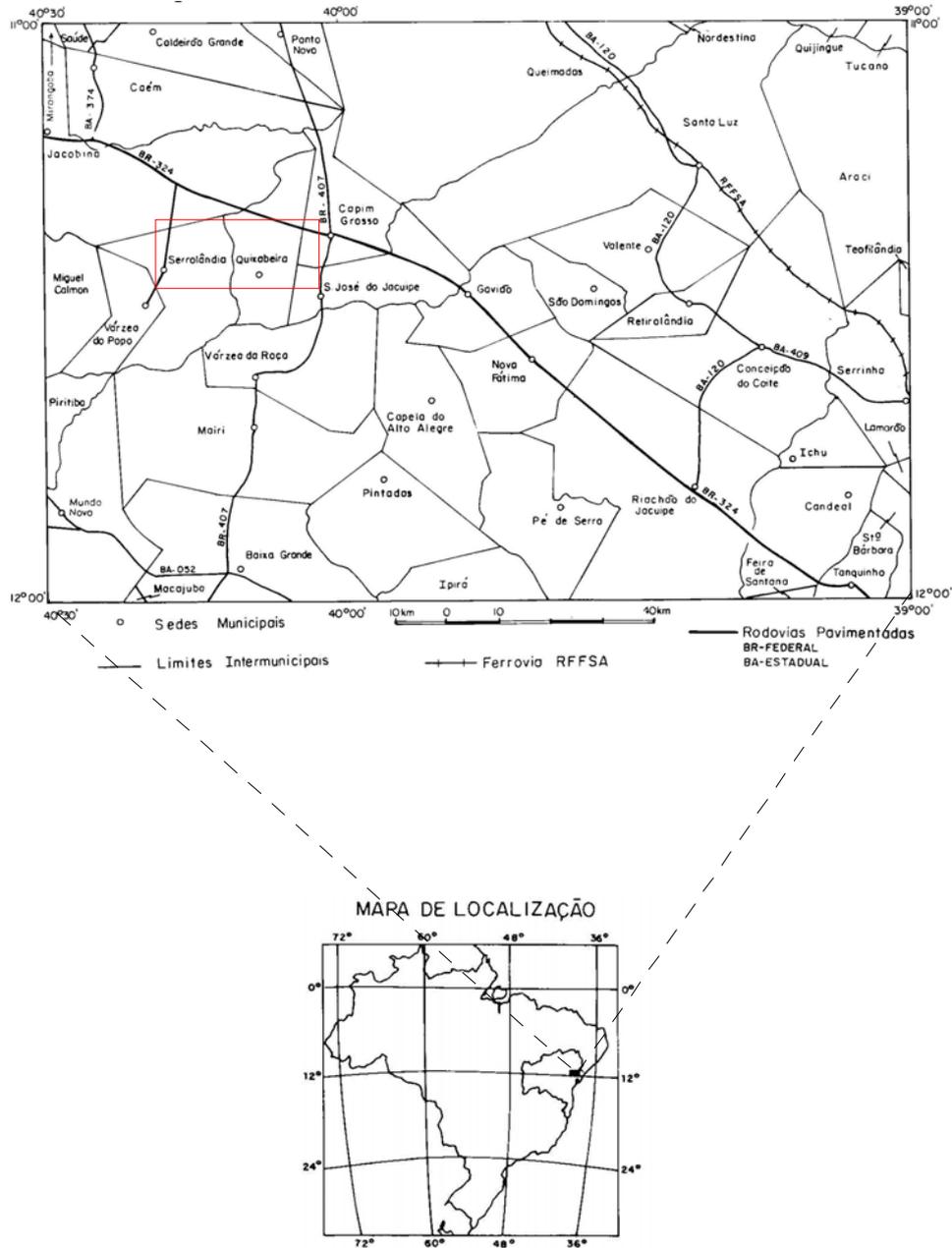


Figura 1.1: Mapa de localização da área. O retângulo em vermelho indica a região onde foram realizadas as sondagens.



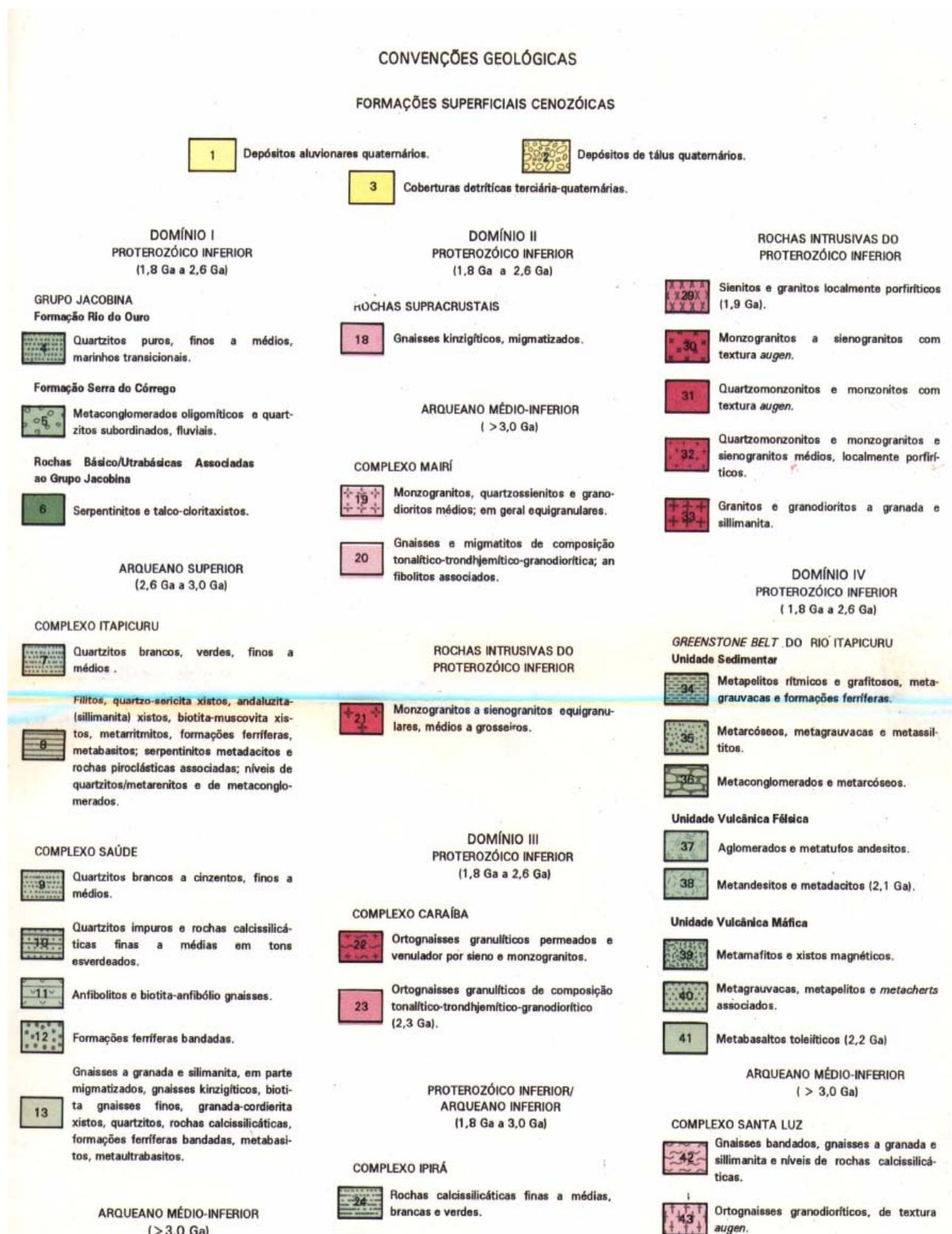


Figura 1.3: Legenda do mapa geol. de Caldeirão Grande

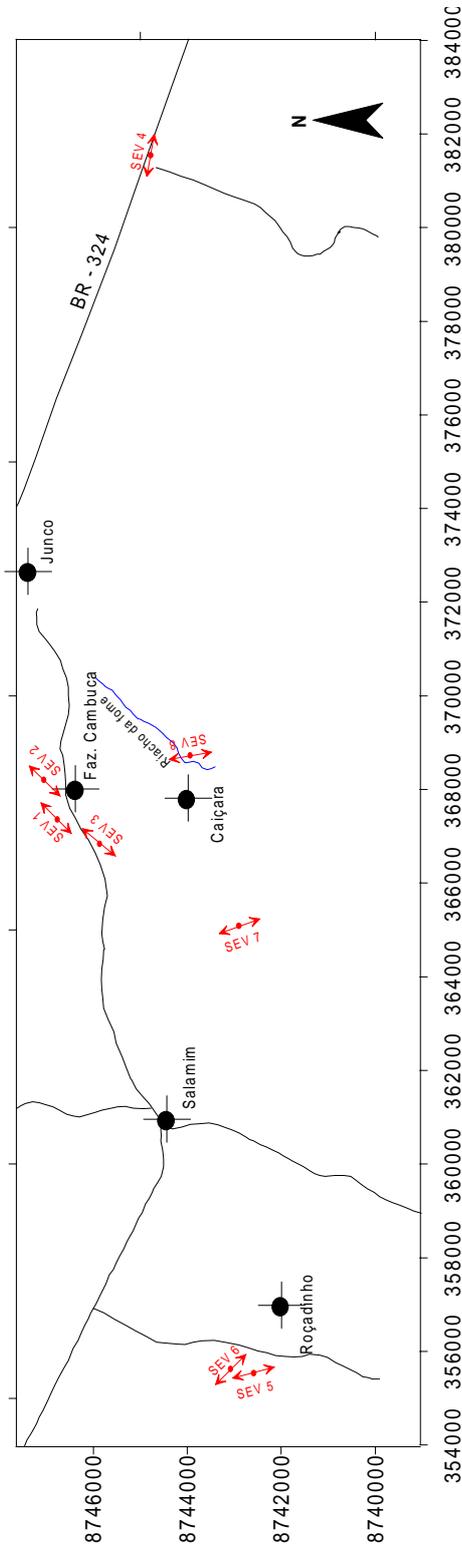


Figura 1.4: Localização dos pontos de sondagens. Estão indicadas as principais estradas (linhas em preto), o riacho da fome (linha em azul), os principais povoados e fazendas (pontos em preto) e os pontos de sondagem (em vermelho). A escala é dada em UTM.

## 1.4 Metodologia de campo

A região estudada possui basicamente duas camadas de materiais distintos: A mais superficial, com poucos metros de espessura é composta por areia inconsolidada, que na maioria dos casos não se constitui camada aquífera, tendo portanto como resposta a aplicação do método de eletrorresistividade apresentado uma alta resistividade aparente. A segunda camada, logo abaixo, é o embasamento cristalino, que considerando-se a resposta ao método eletrorresistivo, pode ser dividido em duas camadas distintas: A primeira diz respeito ao embasamento fissurado, que poderá ou não apresentar água acumulada. Em caso afirmativo, e levando-se em consideração que a resistividade da água, ainda que com baixo índice de salinidade, é menor que a resistividade do embasamento, verificar-se-á um efeito de baixa resistividade aparente. Caso contrário, isto é, quando se tratar de embasamento fissurado porém seco, os valores de resistividade aparente registrados serão aproximadamente da mesma ordem daqueles registrados para o embasamento são. A segunda camada, a uma maior profundidade é o embasamento são, isto é não fissurado, de onde se pode registrar valores de resistividade aparente bastante elevados. É basicamente o efeito contrastante de resistividade aparente detectado nas várias profundidades investigadas, que identifica a presença, e define as características do aquífero fissural.

Procurando seguir os objetivos de verificar a eficácia dos métodos de inversão linearizada e algoritmo genético no processo de inversão, foram realizadas sondagens em áreas próximas a poços já locados pela CERB na região, dessa forma, haveria condições de se comparar os resultados alcançados à realidade geológica apresentada. Os poços foram locados utilizando-se critérios geológicos e aerofotogrametria, e estão situados quase sempre em regiões de baixo topográfico, por serem consideradas regiões de convergência da rede de drenagem subsuperficial. O conhecimento da orientação da região fissurada do embasamento foi de fundamental importância para se estabelecer as direções das linhas de sondagem. Elas teriam obrigatoriamente que ser paralelas à direção das fissuras a fim de que as medidas satisfizessem as características de funcionamento do método eletrorresistivo. A questão é que o método trabalha com duas fontes de corrente, e parte do princípio de que as linhas de corrente produzidas por estas fontes devem atravessar um único meio, o que não aconteceria caso se fizessem linhas de sondagens perpendiculares à direção das fissuras, pois neste caso ter-se-ia zonas fissuradas e não fissuradas intercaladas horizontalmente.

$\rho_a = k \frac{\Delta V}{I}$ , sendo para tanto necessário selecionar previamente o arranjo desejado, e os respectivos afastamentos entre os eletrodos de corrente (AB) e tensão (MN). Em suas operações incluem-se teste de cargas da bateria, da resistência de contato entre os eletrodos A, B e M em relação a N (os valores devem estar entre 0,1 e 1000 K $\Omega$ ) e do nível de ruído, antes das medidas serem realizadas. O transmissor gera uma onda quadrada com uma frequência localizada entre 0,1 e 4Hz tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Possui

intensidade de resolução de 0,01mA, e entre outras coisas, um circuito capaz de bloquear a injeção de corrente quando a temperatura interna for muito elevada.

O aparelho foi utilizado na configuração de arranjo Schlumberger, tomando-se como afastamento dos eletrodos de corrente valores eqüispaçados na escala logarítmica, de modo que se pudesse tomar oito pontos por década da escala. Os afastamentos dos eletrodos de tensão para a maioria das medidas permaneceram inalterados, sendo entretanto modificados quando se fazia necessário a prática da “embreagem” no ajuste dos dados.

No mapa geológico da região, (figura 1.2) pode-se determinar a orientação da zona fissurada do embasamento. A figura (1.4) mostra a localização ds pontos de sondagens com as suas respectivas orientações.

## 1.5 Curvas obtidas das sondagens elétricas verticais

Nas páginas seguintes, estão plotadas as oito curvas obtidas durante a excursão a campo. Vale lembrar que se trata de valores de resistividade aparente, em  $\Omega$  m versus  $AB/2$  em metros. Os dados estão plotados em escala logarítmica.

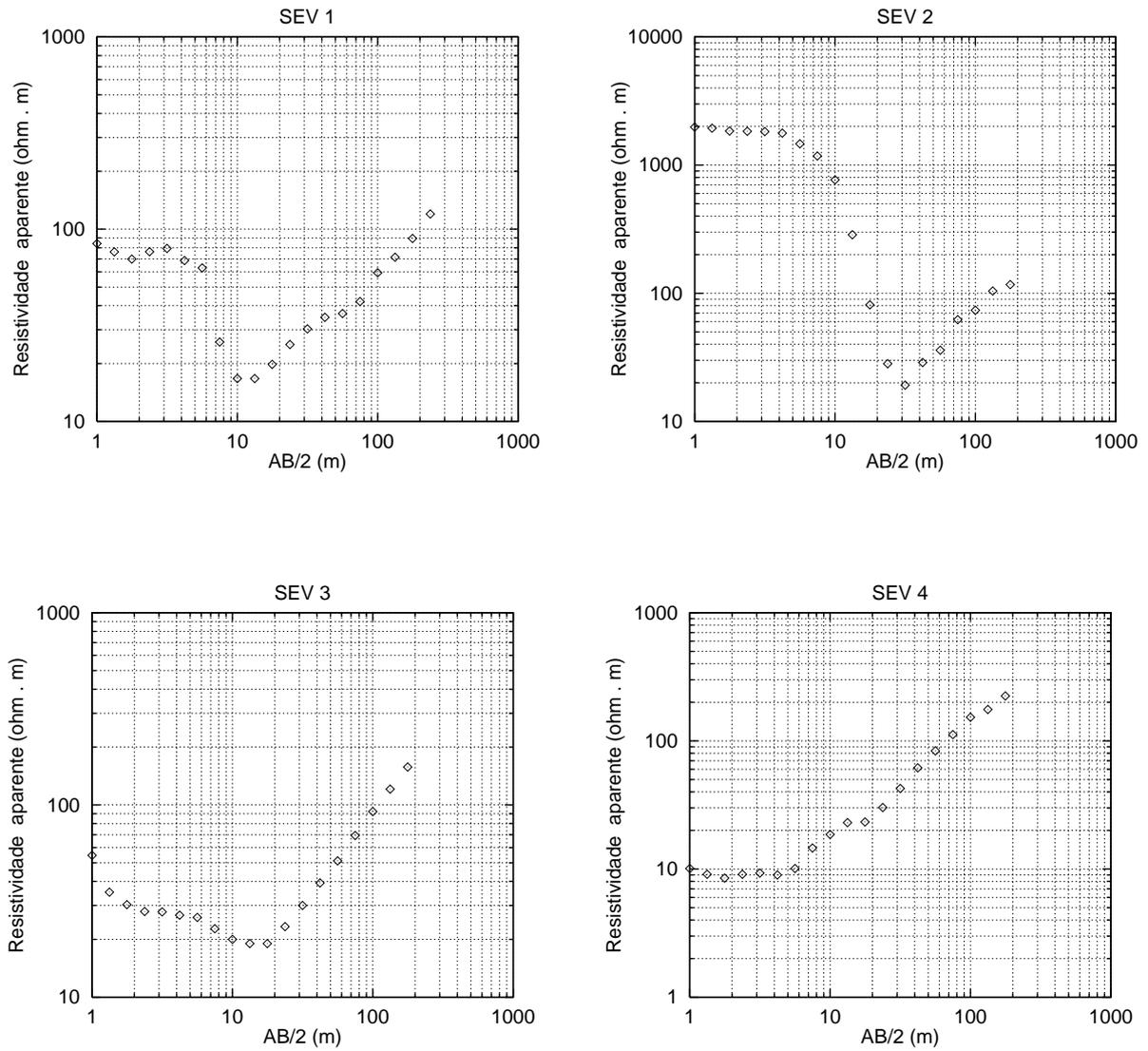


Figura 1.5: Dados de campo relativos às sondagens 1, 2, 3 e 4.

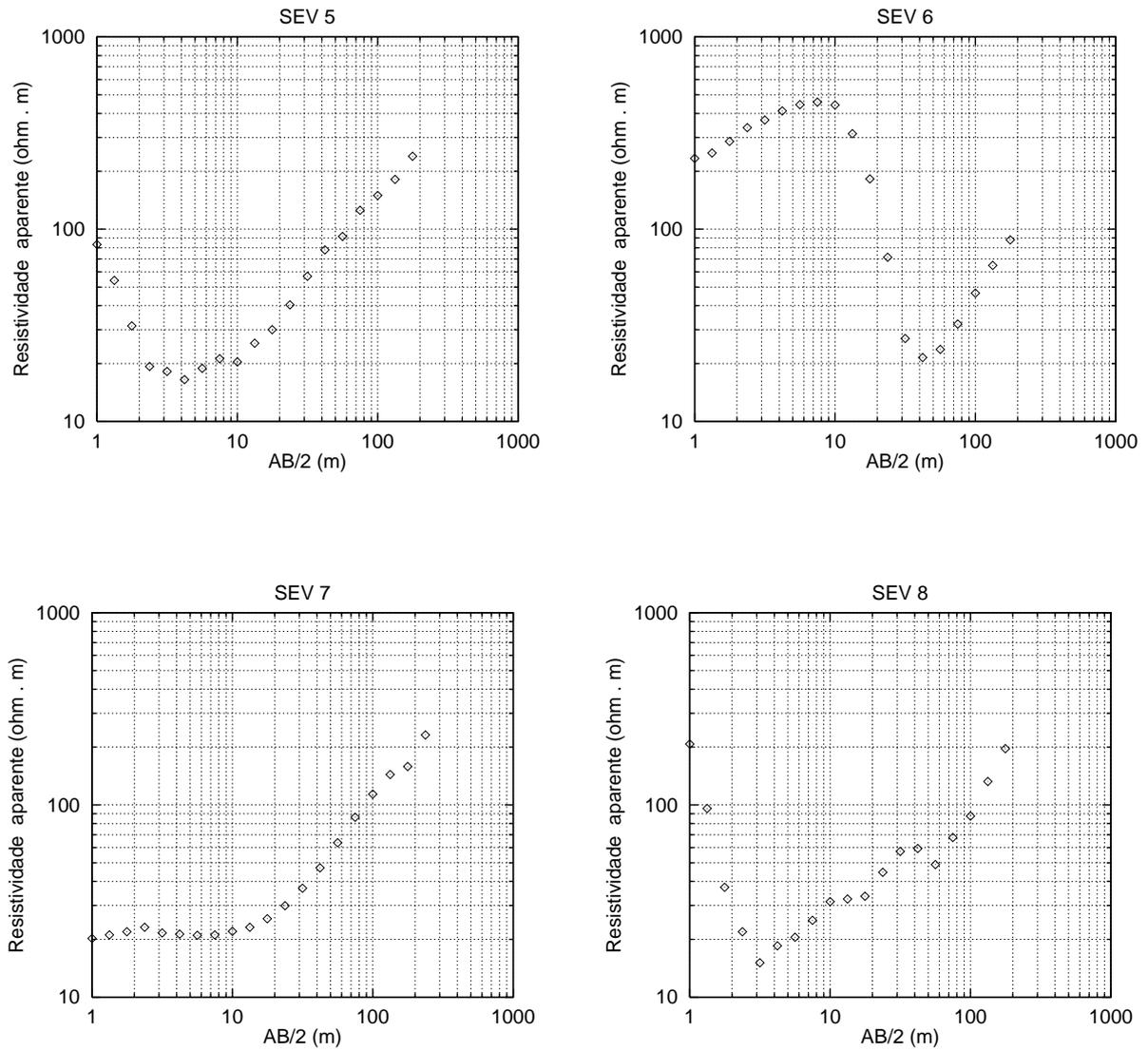


Figura 1.6: Dados de campo relativos às sondagens 5, 6, 7 e 8.

## CAPÍTULO 2

# ELETORRESISTIVIDADE

### 2.1 Introdução

O método eletorresistivo é sem dúvida o mais importante dentre todos os métodos elétricos, pois a sua utilização permite não só o estudo de formações sub-horizontais, como também a determinação de formações sub-verticais (falhas por exemplo) mesmo que estejam a grandes profundidades.

Seu princípio de funcionamento se baseia na aplicação de uma corrente elétrica no terreno investigado, utilizando-se para isso de dois eletrodos de corrente, A e B, que são fixados ao solo. A passagem de corrente elétrica na sub superfície do terreno, estabelece um campo elétrico artificial cuja intensidade é medida por dois outros eletrodos, M e N que também são fincados no terreno com distâncias que variam convenientemente, de acordo com o arranjo utilizado. O objetivo das medidas é determinar a resistividade aparente do terreno, que será diretamente proporcional a diferença de potencial medida entre os eletrodos de investigação e inversamente proporcional a intensidade de corrente que se faz passar pelo terreno. Intervêm nessa função também, um coeficiente que dependerá da disposição dos eletrodos. Esse coeficiente, conhecido como fator geométrico esta diretamente ligado a profundidade de investigação. Desta forma, pode-se expressar a função resistividade aparente da seguinte maneira:

$$\rho_a = K \frac{\Delta V}{I} \quad (2.1)$$

É possível assim, obter informações quantitativas a respeito das propriedades condutoras do subsolo, a fim de se determinar aproximadamente a distribuição vertical de sua resistividade.

## 2.2 Fundamentos teóricos

Na seção anterior, foi apresentada a equação fundamental que rege o funcionamento do método eletrorresistivo. Aqui, serão apresentados os fundamentos teóricos do método, onde a partir do conhecimento de duas leis físicas fundamentais, deduzir-se-á a expressão para a resistividade aparente em função da diferença de potencial e da corrente elétrica.

Em meios ditos condutivos, as cargas elétricas livres sofrem deslocamentos quando sujeitas a ação de campos elétricos. Considerando uma taxa de deslocamento por unidade de área, pode-se definir a densidade de corrente elétrica  $\mathbf{j}$ , que de acordo com a lei de Ohm, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico, e  $\sigma$  é a condutividade elétrica.

Admitindo-se agora a existência de uma superfície fechada  $S$ , tem-se que a corrente total que sai dessa superfície será igual a taxa de decréscimo da carga  $Q$  contida no interior dessa superfície, ou seja:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.3)$$

onde:

$$Q = \int_v q dv \quad (2.4)$$

Utilizando-se o teorema da divergência ao primeiro termo, e reorganizando o segundo termo, tem-se:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{j} dv = - \int_v \frac{\partial q}{\partial t} dv \quad (2.5)$$

a partir daí, pode-se extrair a equação de continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

que é uma expressão do princípio de conservação de carga elétrica.

Em condições estacionárias, as derivadas em relação ao tempo se anulam e a equação da continuidade transforma-se em:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.7)$$

Fazendo-se uso da lei de Ohm aplicada ao regime estacionário e corpos isotrópicos, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (2.8)$$

Devido a característica conservativa do campo elétrico estacionário, pode-se escreve-lo em função do potencial elétrico da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.9)$$

Utilizando-se as equações (2.7), (2.8) e (2.9), pode-se escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot (-\nabla V) = -\sigma \nabla^2 V = 0 \quad (2.10)$$

que resulta em

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.11)$$

Admitindo-se um eletrodo pontual de corrente  $I$  no interior de um semi-espaco condutor homogêneo e isotrópico, e utilizando-se coordenadas esféricas, com o centro no eletrodo pontual, ter-se-á uma expressão para o potencial, que dependerá apenas da coordenada  $r$  que é a distância do ponto aonde se deseja calcular o potencial, ao eletrodo de corrente. Assim, a equação de Laplace torna-se:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Integrando-se duas vezes, pode-se expressar o potencial da seguinte forma:

$$V = C_2 - \frac{C_1}{r} \quad (2.13)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Admitindo-se que o potencial seja nulo no infinito, tem-se:

$$V = -\frac{C_1}{r} \quad (2.14)$$

Tomando-se novamente a lei de Ohm, pode-se estabelecer a expressão para a densidade de corrente elétrica como sendo:

$$j_r = -\sigma \frac{dV}{dr} = -\sigma \frac{C_1}{r^2} \quad (2.15)$$

Considerando-se que o fluxo de corrente através de uma superfície semi-esférica fechada  $S$  com o eletrodo de corrente em seu interior, deve se igualar a intensidade da fonte de corrente  $I$ , tem-se:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (2.16)$$

Lembrando que o sistema de coordenadas utilizado é esférico, e que sua origem coincide com o eletrodo pontual, a equação 2.16 resulta em:

$$I = 2\pi r^2 j_r \quad (2.17)$$

substituindo-se (2.15) em (2.17), tem-se:

$$I = 2\pi r^2 \left(-\sigma \frac{C_1}{r^2}\right) = -2\pi\sigma C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{I}{2\pi\sigma} = -\frac{I\rho}{2\pi} \quad (2.18)$$

substituindo-se o valor encontrado para  $C_1$  na equação (2.14), tem-se:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi r} \quad (2.19)$$

No método eletrorresistivo, para qualquer que seja o arranjo utilizado, teremos sempre quatro potenciais que definem a expressão de  $\Delta V$ . São eles  $V_{MA}$ ,  $V_{MB}$ ,  $V_{NA}$  e  $V_{NB}$  (ver fig 2.1). Sabendo-se que  $V_M = V_{MA} + V_{MB}$ ,  $V_N = V_{NA} + V_{NB}$  e que convencionalmente o eletrodo

A emite uma corrente  $I$ , enquanto que o eletrodo B emite uma corrente  $-I$ , pode-se estabelecer as expressões para  $V_M$  e  $V_N$  a partir da equação (2.19) da seguinte forma:

$$V_M = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) \quad (2.20)$$

e

$$V_N = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right) \quad (2.21)$$

desta forma, pode-se estabelecer a expressão para a diferença de potencial ( $\Delta V$ ), como sendo:

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{I\rho}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right) \right] \quad (2.22)$$

reorganizando a equação anterior tem-se:

$$\rho = \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right)} \frac{\Delta V}{I} = K \frac{\Delta V}{I} \quad (2.23)$$

de onde se conclui que  $K$ , que dependerá do tipo de arranjo empregado, é dado por:

$$K = \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) - \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right)} \quad (2.24)$$

### 2.3 O arranjo Schlumberger

O método eltrorresistivo possui basicamente cinco arranjos diferentes: gradiente, dipolo-dipolo, polo-dipolo, schlumberger e wenner. Arranjo, é o nome dado a disposição dos eletrodos de corrente e potencial durante a execução de um levantamento. Cada arranjo possui características operacionais diferentes, o que os leva a apresentar vantagens e desvantagens, uns em relação aos outros. A utilização de um determinado arranjo em levantamento de campo, irá depender de fatores tais como: condições geológicas e topograficas do terreno investigado, presença de heterogeneidades laterais, presença de fontes geradoras de ruído, presença de camada de intemperismo, condutiva ou não, profundidade de exploração a qual se deseja alcançar, entre outros.

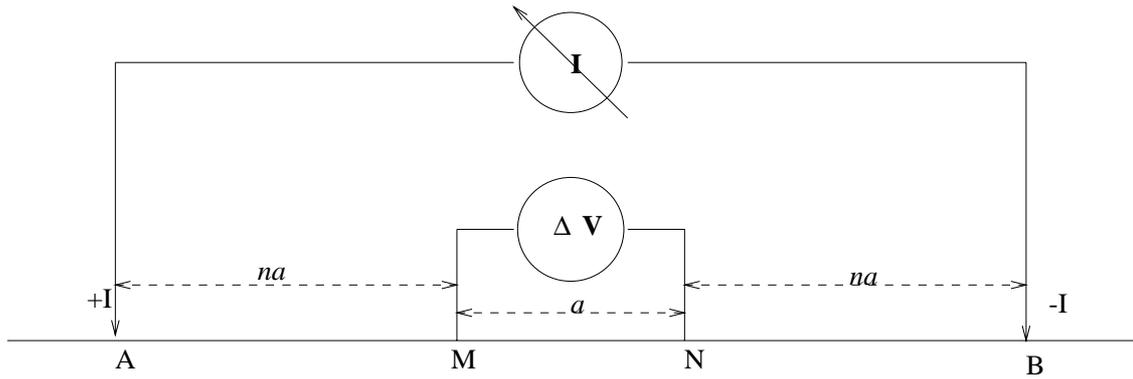


Figura 2.1: Configuração do arranjo Schlumberger

Neste trabalho, para a etapa de aquisição de dados de campo, optou-se pelo uso do arranjo Schlumberger, ilustrado na figura abaixo.

Essa opção foi fundamentada na análise de alguns fatores considerados de grande importância quando se deseja proceder a realização de sondagens elétricas verticais. Some-se a isso, o fato de que as sondagens em questão foram realizadas em ambiente de rochas cristalinas, e em função disso devem ser considerados em especial alguns aspectos de aplicabilidade do método. Os mais importantes fatores considerados segundo Ward (1990), estão abaixo listados e definidos. Foi analisado também, o desempenho do arranjo Schlumberger para cada um dos fatores. São eles:

**1 - Razão sinal/ruído:** Será tanto maior quanto menor for a razão entre a separação dos eletrodos de corrente e a separação dos eletrodos de potencial. A afirmação é válida para os arranjos em que os eletrodos de potencial estão entre os eletrodos de corrente, como o Wenner e o Schlumberger. Isso ocorre porque afastamentos maiores dos eletrodos de corrente, produzirão um maior espalhamento e a conseqüente perda de densidade da corrente gerada. A diferença de potencial medida nessas condições portanto, será mais sensível a fontes ruidosas. Devido as características de afastamento entre os eletrodos de corrente e os eletrodos de potencial, o arranjo Schlumberger é dentre todos o que possui a segunda maior razão sinal/ruído.

**2 - Resolução de camadas horizontais:** Segundo alguns autores, não existe base analítica para se preferir um determinado arranjo em especial, baseado na sua característica de maior ou menor resolução de resistividades e espessuras em uma estrutura de camadas horizontais, exceto que se faça um estudo experimental com uma grande quantidade de modelos. Entretanto, pode-se afirmar que em termos de sondagem, os arranjos Schlumberger e Wenner apresentam uma grande capacidade de resolução de camadas horizontais, levando vantagem sobre os arranjos polo-dipolo e dipolo-dipolo, pois nesses últimos, as mudanças laterais na disposição dos eletrodos acontecem com espaçamentos maiores.

**3 - Profundidade de exploração:** É definida como a profundidade máxima na qual um alvo pode ser detectado utilizando-se um determinado arranjo. Ela dependerá do arranjo em si, e da sua orientação em relação ao corpo investigado. Alguns autores estimam a profundidade de exploração do arranjo Schlumberger em  $0.125 L$ , onde  $L$  é a separação entre os eletrodos de corrente. A profundidade de exploração dependerá ainda de alguns outros fatores tais como razão sinal/ruído, sensibilidade a heterogeneidades, efeitos laterais, topografia, mergulho da camada, entre outros. A profundidade de exploração do arranjo Schlumberger, quando utilizado para sondagens, certamente dependerá do modelo investigado.

**4 - Sensibilidade a profundidade:** Para que um determinado arranjo seja efetivamente eficaz, ele precisa distinguir alvos a várias profundidades. Os arranjos Wenner e Schlumberger, principalmente quando utilizados em sondagem, e tomando-se medidas de no mínimo seis pontos por década, têm demonstrado possuir uma boa sensibilidade para as várias profundidades de investigação.

**5 - Sensibilidade a heterogeneidades em sondagens:** Quando um eletrodo de corrente ou de potencial passa acima de uma heterogeneidade subsuperficial que possui um alto contraste de resistividade com o terreno, a diferença de potencial  $\Delta V$  medida pelos eletrodos M e N é afetada. Se essa interferência for causada apenas pela passagem dos eletrodos de corrente, o fenômeno é chamado de efeito AB. Se for causado apenas pela passagem dos eletrodos de potencial, o fenômeno é chamado de efeito MN. Em sondagens elétricas, o objetivo é obter uma curva na qual as distorções causadas pelos efeitos de eletrodos sejam minimizadas. As experiências mostram que isso é possível quando se mantém os eletrodos M e N estacionários e se faz variar apenas os eletrodos A e B (efeito AB). Essa é a forma de operação da técnica Schlumberger de sondagem que portanto, é um dos arranjos que sofre menor influência dos efeitos de eletrodo.

Existem ainda outros fatores a serem considerados para a adoção do arranjo Schlumberger nas sondagens realizadas. A tabela 2.1 mostra um comparativo, com o desempenho de cada arranjo para cada um desses fatores, inclusive os listados anteriormente.

Arranjo	RSR	AE	REM	RCH	SP	SHS
Gradiente	3	3	1	5	5	*
Dipolo-dipolo	5	1	4	2	2	4
Polo-dipolo	4	2	5	2	3	3
<b>Schlumberger</b>	2	4	2	1	1	1
Wenner	1	5	3	1	1	2

Tabela 2.1: Comparativo entre os arranjos utilizados em métodos elétricos. Os números representam uma ordem, onde 1 indica o melhor desempenho, e 5, o pior. Fonte: (Ward, 1990)

onde:

RSR: Razão sinal/ruído

AE: Acoplamento eletromagnético

REM: Resolução de estruturas mergulhantes

RCH: Resolução de camadas horizontais

SP: Sensibilidade à profundidade

SHS: Sensibilidade à heterogeneidades em sondagens

Sob o ponto de vista matemático, uma grande característica diferenciadora entre os arranjos, é o fator geométrico, que indica a variação das medidas de resistividades em função dos afastamentos adotados. A expressão do fator geométrico é diferente para cada um dos arranjos. Para o arranjo Schlumberger ele é dado como:

$$K = \pi n(n + 1)a \quad (2.25)$$

e pode ser deduzido a partir da equação (2.24), substituindo-se devidamente os termos do denominador da expressão.

## 2.4 Determinação da função resistividade aparente

Na seção 2.1, foi colocada a expressão da resistividade aparente em função dos parâmetros  $\Delta V$ ,  $K$  e  $I$  da seguinte forma:

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} K \quad (2.26)$$

O fator geométrico,  $K$ , foi deduzido na seção 2.2, e possui a seguinte expressão:

$$K = \pi n(n + 1)a \quad (2.27)$$

A diferença de potencial  $\Delta V$ , pode ser escrita como uma soma algébrica dos diferentes potenciais envolvidos:

$$\Delta V = V_{MA} + V_{MB} - V_{NA} - V_{NB} \quad (2.28)$$

Existem métodos que permitem o cálculo de cada um desses potenciais envolvidos, deixando-os em função da abertura dos eletrodos de corrente, e dos parâmetros resistividade e espessura de cada camada. O método utilizado aqui para estabelecer esta relação, é o de recorrência (Sato, 1998), que foi escolhido por demonstrar um maior grau de simplicidade em se tratando de  $n$  camadas.

Começamos por estabelecer um modelo de campo de  $n$  camadas paralelas, como é visto na figura (2.2):

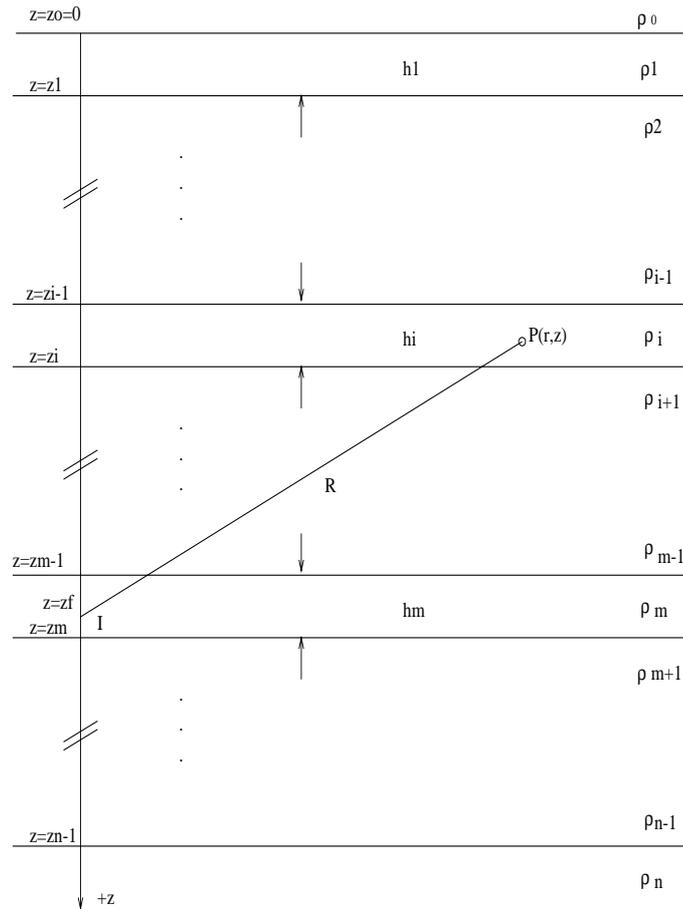


Figura 2.2: Modelo de  $n$  camadas horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada  $m$

A camada na qual esta inserida a fonte de corrente, é imaginariamente cortada na coordenada  $Z$  da fonte ( $Z_f$ ). Desta forma, tem-se  $n+2$  camadas.

Desenvolvendo-se a equação de Laplace para o potencial elétrico em coordenadas cilíndricas, e correlacionando a solução encontrada com as funções de Bessel de primeira espécie de ordem  $\nu$  e  $-\nu$ , encontra-se a expressão para o potencial em qualquer camada como sendo:

$$V_i = \int_0^{\infty} [A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.29)$$

Considerando-se que  $A_i$  e  $B_i$  são funções a serem determinadas, tem-se portanto  $2n+4$  equações a serem estabelecidas. Isso é feito utilizando-se três condições de contorno:

1 - Condições no infinito: Estabelece que o potencial  $V_0$  deve se anular a medida em que  $z \mapsto -\infty$ , e que o potencial  $V_n$  deve também se anular a medida em que  $z \mapsto \infty$ . Desta forma,  $A_0 = B_n = 0$

2 - Condições de contorno nas interfaces: Estabelece que as condições de continuidade

do potencial elétrico e da componente normal do vetor densidade de corrente devem ser satisfeitas.

3 - Condições relativas a fonte de corrente: Estabelece as condições de continuidade do potencial elétrico, e da corrente elétrica no interior da camada que contém a fonte.

Após estabelecidas, com ajuda das condições de contorno, as  $2n+4$  equações necessárias, o próximo passo é resolve-las de forma recorrente, a partir da interface 0, e a partir da interface  $n-1$ . Trata-se de um procedimento extenso e portanto não convém detalha-lo aqui, é importante entretanto saber que o objetivo desses cálculos é obter as expressões de  $A_i$  e  $B_i$ , que serão substituídas na expressão do potencial. Pode-se estabelecer então que para as camadas de 0 até  $\bar{m}$  tem-se:

$$A_i = -\frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m} \frac{g_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} \quad (2.30)$$

$$B_i = \frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m} \frac{1}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} \quad (2.31)$$

que tornam a expressão do potencial para o mesmo intervalo de camadas a seguinte:

$$V_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - g_i e^{-2\lambda(z - z_{i-1})}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z_F - z)} R_i J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.32)$$

Para as camadas de  $\bar{m}$  a  $n$  tem-se as seguintes expressões para  $A_i$  e  $B_i$ :

$$A_i = \frac{I e^{\lambda z_F} r_i}{2\pi\sigma_m} \frac{1}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} \quad (2.33)$$

$$B_i = -\frac{I e^{\lambda z_F} r_i}{2\pi\sigma_m} \frac{G_i e^{-2\lambda z_i}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} \quad (2.34)$$

que tornam a expressão do potencial para o mesmo intervalo de camadas a seguinte:

$$V_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - G_i e^{-2\lambda(z_i - z)}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z - z_F)} r_i J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.35)$$

Os valores de  $g_i$ ,  $r_i$ ,  $G_i$  e  $R_i$  têm a seguinte formulação, também deduzidos a partir da recorrência:

$$g_i = \frac{1 - S_{i,i-1}f_i}{1 + S_{i,i-1}f_i} \quad (2.36)$$

$$f_i = \frac{1 - g_{i-1}e^{-2\lambda(z_{i-1}-z_{i-2})}}{1 + g_{i-1}e^{-2\lambda(z_{i-1}-z_{i-2})}} \quad (2.37)$$

$$r_i = r_{i-1} \frac{1 + f_i}{1 + S_{i,i-1}f_i} \quad (2.38)$$

$$r_{\bar{m}} = \frac{f_{\bar{m}}}{1 + f_{\bar{m}}} \quad (2.39)$$

$$G_i = \frac{1 - S_{i,i+1}F_i}{1 + S_{i,i+1}F_i} \quad (2.40)$$

$$F_i = \frac{1 - G_{i+1}e^{-2\lambda(z_{i+1}-z_i)}}{1 + G_{i+1}e^{-2\lambda(z_{i+1}-z_i)}} \quad (2.41)$$

$$R_i = R_{i+1} \frac{1 + F_i}{1 + S_{i,i+1}F_i} \quad (2.42)$$

$$R_{\bar{m}} = \frac{F_{\bar{m}}}{1 + F_{\bar{m}}} \quad (2.43)$$

onde  $S_{i,i+1} = \sigma_i/\sigma_{i+1}$  e  $S_{i,i-1} = \sigma_i/\sigma_{i-1}$ . Vale ressaltar também que  $g_0 = 0$  e  $G_n = 0$

Passemos agora a análise do caso em especial que identifica o arranjo Schlumberger. Tem-se aí como particularidade o fato de que tanto as fontes como os potenciais estão situados no topo da primeira camada. Neste caso, devido a continuidade do potencial elétrico na interface, torna-se indiferente a utilização de qualquer das duas expressões descritas para o potencial, (eqs. 2.32 e 2.35). Utilizando-se a segunda expressão, tem-se o potencial escrito da seguinte forma:

$$V_{\perp} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} \frac{1 - G_{\perp}e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp}e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.44)$$

Observando a configuração de arranjo Schlumberger, pode-se determinar as expressões dos potenciais  $V_{MA}$ ,  $V_{MB}$ ,  $V_{NA}$ ,  $V_{NB}$  fazendo as devidas substituições no parâmetro  $r$ . Desta forma, tem-se as seguintes expressões para os potenciais envolvidos:

$$V_{MA} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda n a) d\lambda \quad (2.45)$$

$$V_{MB} = -\frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda a(n + 1)) d\lambda \quad (2.46)$$

$$V_{NA} = -V_{MB} \quad (2.47)$$

$$V_{NB} = -V_{MA} \quad (2.48)$$

A partir dessas equações, rearranjando a expressão de  $\Delta V$ , tem-se:

$$\Delta V = 2(V_{MA} + V_{MB}) \quad (2.49)$$

Pode-se portanto, substituindo-se as expressões de  $V_{MA}$  e  $V_{MB}$ , expressar a diferença de potencial da seguinte forma:

$$\Delta V = \frac{I}{\pi\sigma_1} \left( \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda n a) d\lambda - \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda a(n + 1)) d\lambda \right) \Rightarrow \quad (2.50)$$

$$\Delta V = \frac{I}{\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} [J_0(\lambda n a) - J_0(\lambda a(n + 1))] d\lambda \quad (2.51)$$

Levando-se em consideração a equação (2.1), e fazendo-se as devidas substituições nos parâmetros envolvidos, tem-se a seguinte expressão para a resistividade aparente:

$$\rho_a = \rho_1 n(n + 1) a \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} [J_0(\lambda n a) - J_0(\lambda a(n + 1))] d\lambda \quad (2.52)$$

Ao se plotar dados de eletrorresistividade com arranjo Schlumberger, é costume fazê-lo na forma  $\rho_a \times AB/2$ . Portanto, para que se tenha uma expressão matemática desse tipo, é necessário fazer alguns ajustes, quais sejam:

$$(n+1)a = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)a = \left(n + \frac{1}{2}\right)a + \frac{a}{2} \quad (2.53)$$

$$na = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)a = \left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{a}{2} \quad (2.54)$$

onde:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)a = \frac{AB}{2} \quad (2.55)$$

Desta forma, pode-se agora escrever a expressão da resistividade aparente em função de  $AB/2$  da seguinte maneira:

$$\rho_a = \rho_1 n \left(\frac{AB}{2} + \frac{a}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1 - G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_{\perp} e^{-2\lambda h_1}} \left[ J_0 \left( \lambda \left( \frac{AB}{2} - \frac{a}{2} \right) \right) - J_0 \left( \lambda \left( \frac{AB}{2} + \frac{a}{2} \right) \right) \right] d\lambda \quad (2.56)$$

Os parâmetros do modelo, isto é as resistividades e espessuras de cada camada podem ser encontradas na expressão que define  $G_{\perp}$ . Na equação (2.41) observa-se um termo do tipo:

$$e^{-2\lambda(z_{i+1} - z_i)} \quad (2.57)$$

onde  $(z_{i+1} - z_i)$  diz respeito as espessuras das camadas envolvidas. E na equação (2.40), observa-se o termo  $S_{i,i+1}$  que é a razão entre as condutividades das camadas envolvidas.

Como se pode notar, a função que define a resistividade aparente em relação a  $AB/2$  e aos parâmetros do modelo é bastante complexa e esta longe de ser uma expressão linear. A inversão de tais parâmetros portanto, baseados nessa expressão precisa antes passar por um tratamento matemático especial.

## 2.5 Sondagem elétrica vertical

O método de sondagem elétrica vertical é o procedimento mais empregado na atualidade. Consiste em tomar um ponto do terreno como estação, fincar eletrodos de corrente ligados

a uma fonte que tem por objetivo injetar corrente elétrica na subsuperfície, e eletrodos de potencial ligados a um voltímetro que tem por finalidade medir a diferença de potencial causada pela passagem de corrente na subsuperfície. A medida em que se faz aumentar as distâncias entre os eletrodos de corrente, tem-se uma penetração maior da corrente em profundidade e, portanto, as informações recebidas corresponderão a profundidades maiores, daí a razão pela qual o método é conhecido como sondagem.

Para a realização de uma sondagem elétrica vertical, o material necessário é basicamente um voltímetro, um miliamperímetro, quatro barras metálicas que funcionam como eletrodos, uma bateria e alguns cabos de comprimento suficiente. O aparelho utilizado para as medidas de campo neste trabalho, o SYSCAL R2 tem suas características discutidas no capítulo 1.

Na realização dos levantamentos de campo com o arranjo Schlumberger, os eletrodos de corrente foram expandidos obedecendo-se a separação preestabelecida de oito pontos por década da escala logarítmica, começando com um espaçamento de 2 metros até valores próximos aos 400 metros em alguns casos (vale lembrar que se está referindo ao espaçamento AB e não  $AB/2$ ). Adotou-se a precaução de manter o espaçamento entre os eletrodos de corrente entre a metade da profundidade de exploração mínima desejada e cinco vezes a profundidade de exploração máxima. Os eletrodos de potencial tiveram um afastamento inicial de 0,5 metros, o que é suficiente nas medidas iniciais, já que os eletrodos de corrente estão a uma pequena distância e a corrente portanto ainda está concentrada nas pequenas profundidades. À medida em que se aumenta o afastamento entre os eletrodos de corrente, a corrente injetada na subsuperfície atinge profundidades maiores espalhando-se mais pelo terreno, isso gera uma dificuldade maior do voltímetro em medir a diferença de potencial. Existem duas maneiras de se contornar tal problema. A primeira delas consiste em aumentar a potencia da fonte de corrente, aumentando-se assim o fluxo de corrente que atravessa o substrato. A desvantagem desse procedimento, é o aumento do consumo de energia, e o rápido esgotamento da bateria. A segunda alternativa, e mais usada, seria aumentar os afastamentos entre os eletrodos de potencial, desta forma, pode-se medir a diferença de potencial entre pontos mais próximos da fonte de corrente, aumentando-se a eficácia da medida. Nos trabalhos de campo foram utilizados afastamentos de 5 e 10 metros, além do afastamento inicial de 0,5 metros entre os eletrodos de potencial. É norma nos procedimentos de campo que ao se mudar os afastamentos entre os eletrodos de potencial, se repita a medida de no mínimo um ponto anterior para se ter uma idéia da discrepância entre as medidas feitas com diferentes afastamentos. Esse procedimento é conhecido como embreamento, e está ilustrado na figura (2.3):

A expansão dos eletrodos de corrente em uma sondagem elétrica, causa um aumento da penetração da corrente em profundidade. A figura (2.4) ilustra a fração de corrente que penetra a uma profundidade  $Z$  em um meio homogêneo, como função da razão entre a separação dos eletrodos de corrente, aqui dada como  $L$  e a profundidade  $z$ . Analisando-se

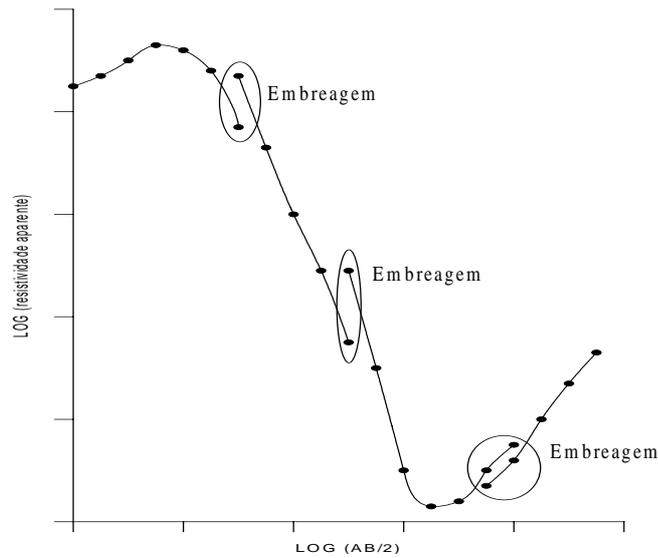


Figura 2.3: Embreagens realizadas nos trabalhos de campo. Procedimento adotado sempre que foi preciso alterar os afastamentos entre os eletrodos de potencial.

o gráfico, pode-se facilmente perceber que para valores pequenos de  $L$ , só haverá corrente considerável a pequenas profundidades, enquanto que para valores grandes de  $L$ , a corrente penetrará a maiores profundidades.

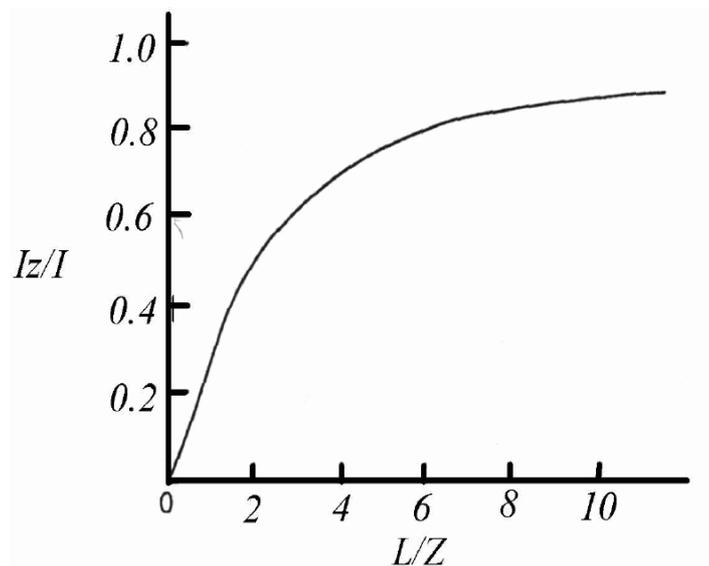


Figura 2.4: Variação da densidade de corrente com a profundidade. Onde  $I$  é a corrente aplicada pela fonte,  $I_z$  é a parcela da corrente que penetra a uma profundidade  $z$ ,  $L$  é a separação entre os eletrodos de corrente e  $Z$  é a profundidade. Fonte: Ward, (1990)

## CAPÍTULO 3

# O MÉTODO DE INVERSÃO LINEARIZADA

### 3.1 Introdução

Em vários métodos geofísicos, dentre os quais o de eletrorresistividade, é necessário que antes da interpretação se realize uma etapa de processamento que consiste em determinar os parâmetros do modelo, utilizando uma função matemática pré estabelecida que descreva o comportamento dos parâmetros físicos e geométricos envolvidos, ajustando-a da melhor maneira possível aos dados de campo. Para isso, são utilizados vários métodos, dentre os quais pode-se citar os métodos de Lagrange, Newton, Gauss-Newton, interpolação polinomial e mínimos quadrados. Em todos esses métodos, é preciso ter conhecimento da função matemática a qual se deseja ajustar os dados, que por sua vez, muitas vezes tem uma composição não linear, o que produz dificuldades na determinação dos parâmetros de ajuste. Em particular, o método dos mínimos quadrados, que tem sido largamente utilizado no procedimento de ajuste de curvas teóricas, possui uma limitação no que diz respeito a ajuste de funções não lineares. Os procedimentos utilizados para o cálculo de tais parâmetros nesse caso, em geral não produzem bons resultados, e quando o fazem exigem um esforço computacional muito grande. As funções lineares são ajustadas pelo método sem maiores problemas. É certo que algumas funções originariamente não lineares podem ser aproximadas para tal através de uma simples manipulação de termos e redefinição de parâmetros, entretanto, outras funções, como as que ocorrem em problemas geofísicos, não podem ser linearizadas com tal procedimento.

Na tentativa de se resolver o problema de ajuste às funções não lineares, surgiu o método de inversão linearizada, que tem por objetivo linearizar a função através da expansão de Taylor de primeira ordem, em torno do modelo corrente. Desta maneira, pode-se obter uma forma quadrática cujo ponto de mínimo pode ser calculado com o método de mínimos quadrados, conforme ilustra a figura (3.1). A linearização através da utilização da expansão por série de Taylor, produz uma expressão linear para aproximar a função não linear em torno do modelo corrente. O somatório do erro quadrático, que corresponderá a equação de um parabolóide de dimensão  $n$  no espaço dos  $n$  parâmetros, é apenas uma aproximação da

função original e só poderá ser utilizada para valores próximos ao ponto inicial tomado. A linearização não resolve entretanto o problema da convergência para mínimos locais que afeta o processo de minimização de funções não lineares. Acontece que a expressão que define o somatório do erro quadrático em função do vetor de parâmetros para uma função linear, por ser um parabolóide, possui apenas um mínimo. A função-objetivo, da qual se deseja obter o mínimo global, não é um parabolóide, e portanto poderá ter vários mínimos locais, neste caso, o mínimo para o qual o método convergirá, dependerá do vetor de parâmetros iniciais adotado.

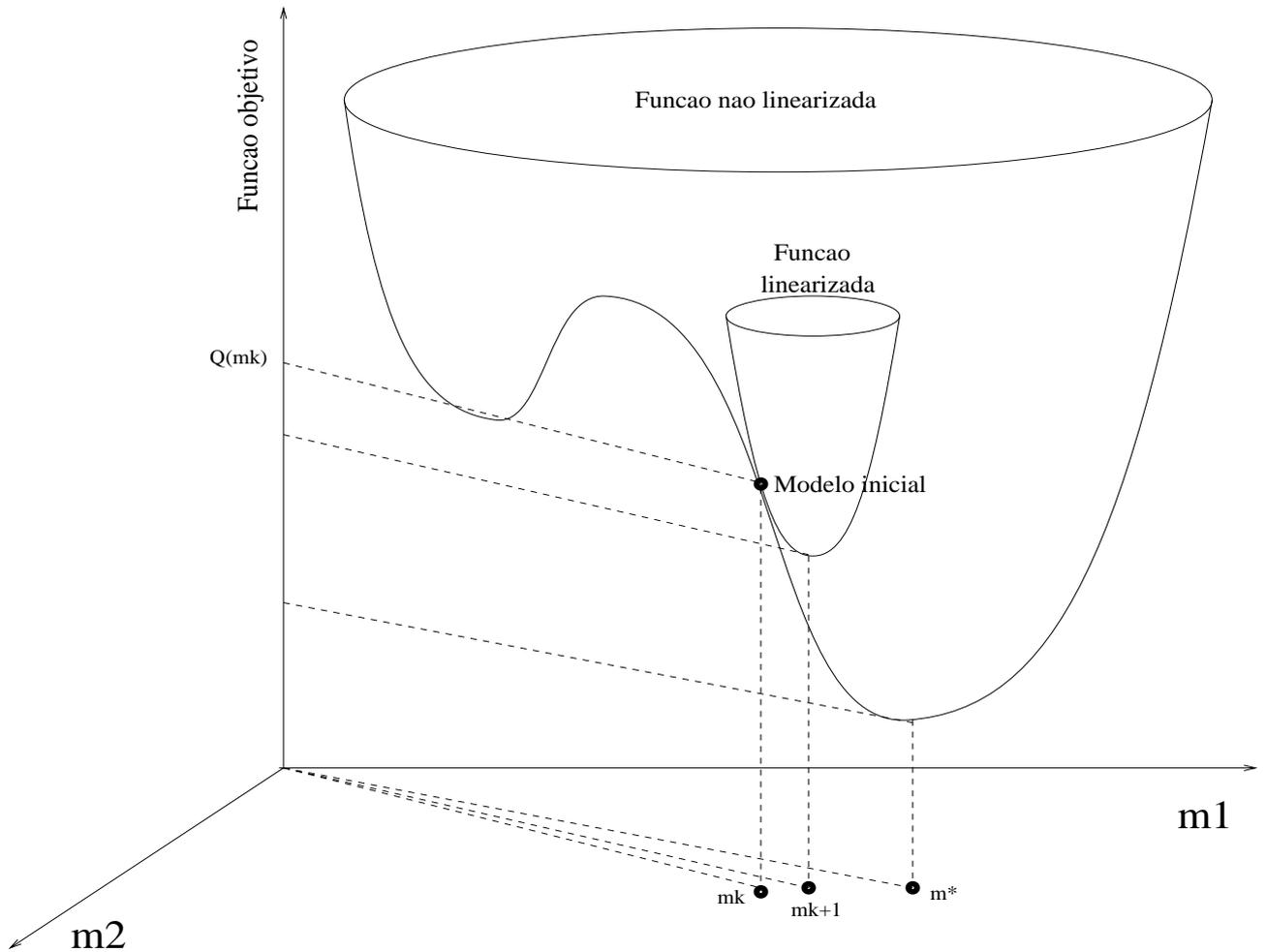


Figura 3.1: Representação esquemática da função-objetivo não linear e linearizada em torno do modelo corrente  $m_k$ . O ponto  $m_{k+1}$  representa o modelo obtido com a solução mínimos quadrados.

### 3.2 Modelagem direta

Deixemos  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  representar a função teórica para o cálculo das resistividades aparentes escolhida para descrever os dados observados,  $d_{obs\ i}$ ,  $i=1, \dots, M$ , onde  $\mathbf{m} = (\rho_1, \dots, \rho_N, h_1, \dots, h_{N-1})^T$  representa o modelo com  $N$  camadas e  $2N-1$  espessuras, e  $t$  a variável independente ( $t=AB/2$ ). A equação  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  representa a solução matemática ou físico-matemática do problema denominado modelagem direta, ou seja, para um dado modelo  $\mathbf{m}$ , podemos calcular  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  para qualquer  $t$ .

### 3.3 Inversão linearizada com norma 2

Para um dado conjunto de pares de observações  $d_{obs\ i}, t_i$   $i=1, \dots, M$ , podemos definir a função positiva denominada função-objetivo, como segue:

$$Q(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^M (d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i))^2 \quad (3.1)$$

O modelo  $\mathbf{m}^*$  é considerado ótimo quando  $Q(\mathbf{m}^*)$  corresponde ao mínimo de  $Q(\mathbf{m})$ . A determinação de  $\mathbf{m}^*$  ou seja, o modelo que, através de  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$ , melhor descreve os dados observados, consiste no problema inverso.

Vários métodos para a solução do problema inverso, denominados métodos de inversão têm sido desenvolvidos nas últimas décadas. Tais métodos podem, em primeira aproximação, ser classificados como métodos de inversão linear e de inversão não linear, a depender do tipo de função utilizada para descrever os dados.

No método de inversão linearizada parte-se de um modelo inicial,  $\mathbf{m}_0$ , que é reformulado sucessivamente. O modelo  $\mathbf{m}^*$ , ou uma estimativa do mesmo, é obtido de forma iterativa resolvendo-se um sistema de equações a cada passo do processo. O método convergirá para o modelo associado ao mínimo da função-objetivo mais próximo de  $Q(\mathbf{m}_0)$ , ou seja, mais próximo do ponto de partida. A obtenção do mínimo global,  $Q(\mathbf{m}^*)$ , dependerá portanto fortemente do modelo inicial.

A reformulação dos parâmetros do modelo corrente,  $\mathbf{m}_k$ , é feita de forma que o novo modelo,  $\mathbf{m}_{k+1}$ , corresponda ao mínimo do parabolóide tangente,  ${}^k Q(\mathbf{m})$ , à função-objetivo pelo ponto  $(\mathbf{m}_k, {}^k Q(\mathbf{m}))$ , conforme ilustra a fig (3.1).

Os desvios utilizados na geração da função objetivo são dados por:

$$\Delta d_i = d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i) \quad (3.2)$$

Deixemos  $\mathbf{m}_k = ({}^k m_1, \dots, {}^k m_N)^T$  representar o modelo corrente. Utilizando-se a expansão de Taylor de primeira ordem da equação (3.2), em torno do modelo  $\mathbf{m}_k$ , obtem-se:

$$\Delta d_i \cong \tilde{\Delta} d_i = {}^k \Delta d_i + \left. \frac{\partial \Delta d_i}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}_k} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_k) \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{\Delta} d_i$  representa a aproximação linear do desvio  $\Delta d_i$ , obtida em torno do ponto  $\mathbf{m}_k$ ,  $\Delta d_i = d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i)$ . De forma explicita, o segundo termo da equação (3.3) pode ser escrito como:

$$= - \left[ \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t)}{\partial m_1} \Big|_{(\mathbf{m}_k, t_i)} ({}^{k+1}m_1 - {}^k m_1) + \dots + \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t)}{\partial m_N} \Big|_{(\mathbf{m}_k, t_i)} ({}^{k+1}m_N - {}^k m_N) \right] \quad (3.4)$$

ou de forma mais compacta:

$$= - ({}^k g_{i1} \dots {}^k g_{iN}) \begin{bmatrix} {}^{k+1}m_1 - {}^k m_1 \\ \vdots \\ {}^{k+1}m_N - {}^k m_N \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde:  ${}^k g_{ij} = \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t)}{\partial m_j} \Big|_{(\mathbf{m}_k, t_i)}$ , com  $j=1, \dots, N$ , representa a derivada primeira da função  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  com relação ao parâmetro  ${}^k m_j$ , avaliada em  $(\mathbf{m}_k, t_i)$ .

Deixando  $i=1, \dots, M$  e  $j=1, \dots, N$ , e utilizando notação vetorial, podemos representar a equação (3.3) na forma seguinte:

$$\tilde{\Delta} \mathbf{d} = \Delta \mathbf{d}_k - \mathbf{G}_k \Delta \mathbf{m}_k \quad (3.6)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{m} - \mathbf{m}_k$$

$$\Delta \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{\text{obs}} - \rho_a(\mathbf{m}_k)$$

$\mathbf{G}_k$  é a matriz das derivadas, com elementos  ${}^k g_{ij}$  definidos acima, também denominada de matriz sensibilidade ou matriz das derivadas de Frechet. Cada coluna  ${}^k g_j$  da matriz  $\mathbf{G}_k$  esta relacionada com a derivada de  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  com relação ao parâmetro  $m_j$  e avaliada nos pontos  $(\mathbf{m}_k, t_i)$   $i=1, \dots, M$ . Os elementos  ${}^k g_{ij}$  podem ser avaliados de forma aproximada ou exata. Neste último caso, através das equações para o cálculo das derivadas, quando disponíveis. Para avaliar  ${}^k g_{ij}$  de forma aproximada podemos utilizar a expressão seguinte:

$${}^k g_{ij} \cong \frac{\rho_a(\mathbf{m}_k + \delta_j, t_i) - \rho_a(\mathbf{m}_k, t_i)}{\delta_j} \quad (3.7)$$

onde  $\delta_j$  representa uma perturbação no parâmetro  ${}^k m_j$ . ( $\delta_j = 0,001 {}^k m_j$  por exemplo).  $\delta_j = (0, \dots, 0, \delta_j, 0, \dots, 0)^T$ , representando o vetor de dimensão  $N$ , com elementos nulos, a exceção do elemento de índice  $j$ .

Utilizando-se a equação (3.6) podemos escrever a expressão da forma quadrática,  ${}^k Q(\mathbf{m})$ , tangente à função objetivo:

$${}^k Q(\mathbf{m}) = \tilde{\Delta} \mathbf{d}^T \tilde{\Delta} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}_k^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_k^T \Delta \mathbf{d}_k & \Delta \mathbf{d}_k^T \mathbf{G}_k \\ \mathbf{G}_k^T \Delta \mathbf{d}_k & \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

de onde pode-se obter diretamente as equações normais:

$$(\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k) \Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{G}_k^T \Delta \mathbf{d}_k \quad (3.9)$$

Resolvendo para  $\Delta \mathbf{m}_k$ , obtem-se a expressão para atualizar o modelo corrente:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + (\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k)^{-1} \mathbf{G}_k (\mathbf{d}_{obs} - \rho_a(\mathbf{m}_k)) \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é utilizada de forma iterativa para atualização do modelo corrente, garantindo que  $\mathbf{m}_{k+1}$  corresponda ao mínimo de  ${}^k Q(\mathbf{m})$ , conforme indicado na figura (3.1). A seguir, estão apresentados os passos do algoritmo de inversão linearizada.

Inicialização

tol=0.99

$\mathbf{m}_0 = ({}^0 m_1, \dots, {}^0 m_N)^T$ , modelo inicial

$\rho_a(\mathbf{m}_0) = (\rho_a(\mathbf{m}_0, t_1), \dots, \rho_a(\mathbf{m}_0, t_M))^T$

k=0

$$\Delta d_k = \mathbf{d}_{obs} - \rho_a(\mathbf{m}_k) \quad (100)$$

$\mathbf{G}_k$

$\mathbf{G}_k^T \Delta d_k$

$\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k$

$$(\mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_k) \Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{G}_k^T \Delta d_k$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{m}_k$$

$$\rho_a(\mathbf{m}_{k+1}) = (\rho_a(\mathbf{m}_{k+1}, t_1), \dots, \rho_a(\mathbf{m}_{k+1}, t_M))^T$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \frac{2 \sum_{i=1}^M d_{obs\ i} \cdot \rho_a(\mathbf{m}_{k+1}, t_i)}{\sum_{i=1}^M d_{obs\ i}^2 + \sum_{i=1}^M [\rho_a(\mathbf{m}_{k+1}, t_i)]^2}$$

if ( $\mathbf{r}_{k+1} < tol$ ) k=k+1 goto 100

### 3.4 Inversão linearizada com norma $L_p$

Seguindo o procedimento proposto por (Porsani, 1993), a equação (3.1) pode ser representada como segue:

$$Q(\mathbf{m}, \beta) = \sum_{i=1}^M \{[(d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i))^2]^\beta\}^2 \quad (3.11)$$

Note que para  $\beta = \frac{1}{2}$ , a equação (3.11) resultará igual a equação (3.1).

Deixemos:

$$f(\mathbf{m}, t)^\beta = \{[d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t)]^2\}^\beta \quad (3.12)$$

Utilizando a expansão de Taylor de primeira ordem em torno do modelo  $\mathbf{m}_k$ , obtem-se:

$$f(\mathbf{m}_{k+1}, t)^\beta = f(\mathbf{m}_k, t)^\beta + \beta f(\mathbf{m}_k, t)^{\beta-1} \left. \frac{\partial f(\mathbf{m}, t)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}_k} \Delta \mathbf{m}_k \quad (3.13)$$

$$= f(\mathbf{m}_k, t)^\beta + \beta f(\mathbf{m}_k, t)^{\beta-1} 2\Delta d(\mathbf{m}_k, t) \left. \frac{(-1)\partial \rho_a(\mathbf{m}, t)}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}_k} \Delta \mathbf{m}_k \quad (3.14)$$

onde  $\Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k$

A expansão por série de Taylor faz com que a função  $f(\mathbf{m}, t)^\beta$  que antes era de natureza não linear, se torne agora uma função linear, tendo como variável o vetor  $\Delta \mathbf{m}_k$ . Para valores discretos de  $t$ , isto é:  $t_i = i\Delta t$ ;  $i=1, \dots, M$ , e utilizando-se notação matricial, pode-se escrever a equação (3.14) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{m}_{k+1}, t_1)^\beta \\ \vdots \\ f(\mathbf{m}_{k+1}, t_M)^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{m}_k, t_1)^\beta \\ \vdots \\ f(\mathbf{m}_k, t_M)^\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\beta f(\mathbf{m}_k, t_1)^{\beta-1} \Delta d(\mathbf{m}_k, t_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\beta f(\mathbf{m}_k, t_M)^{\beta-1} \Delta d(\mathbf{m}_k, t_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t_1)}{\partial m_1} \right|_{\mathbf{m}_k} & \dots & \left. \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t_1)}{\partial m_N} \right|_{\mathbf{m}_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t_M)}{\partial m_1} \right|_{\mathbf{m}_k} & \dots & \left. \frac{\partial \rho_a(\mathbf{m}, t_M)}{\partial m_N} \right|_{\mathbf{m}_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{k+1}m_1 - {}^k m_1 \\ \vdots \\ {}^{k+1}m_N - {}^k m_N \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Para se compreender a notação matricial exposta aqui, é preciso ter ciência de que a derivada indicada na expressão é na verdade uma derivada vetorial, e como tal, a derivação deve ser feita com relação a todos os termos do vetor  $\mathbf{m}$ .

Nomeando as matrizes e vetores envolvidos na expressão, Podemos escreve-la da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{\beta_{k+1}} = \mathbf{f}_{\beta_k} - \mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{G}_k \Delta \mathbf{m}_k \quad (3.16)$$

A partir daí, torna-se clara a configuração linear da função  $f(\mathbf{m}, t)^\beta$ . Como coeficiente angular tem-se a expressão  $-\mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{G}_k$ , que é na verdade o produto entre uma matriz diagonal principal, de dimensões  $m \times m$ , e a matriz das derivadas, de dimensões  $m \times n$ , também conhecida como matriz sensibilidade. O produto entre essas duas matrizes será portanto uma matriz de dimensões  $m \times n$ . Como coeficiente linear tem-se o vetor  $\mathbf{f}_{\beta_k}$  que é formado pelos elementos da função  $f(\mathbf{m}, t)^\beta$  no ponto  $\mathbf{m}_k$  para diferentes valores de  $t$ .

Temos agora a expressão linear do erro quadrático elevado a norma, e podemos determinar os valores do vetor  $\Delta \mathbf{m}_k$  aplicando o método dos mínimos quadrados:

$$Q(\mathbf{m}, \beta) \cong \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\beta_k}^T \\ \mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\beta_k} & \mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

minimizando com relação a  $\Delta \mathbf{m}_k$  obtem-se:

$$(\mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k}^2 \mathbf{G}_k) \Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{f}_{\beta_k} \quad (3.18)$$

Os elementos  $f_{i,i}$  da matriz  $\mathbf{F}_{\beta_k}^2$  tem a seguinte forma:

$$f_{i,i} = 4\beta^2 [\Delta d(\mathbf{m}_k, t_i)^2]^{2\beta-2} \Delta d(\mathbf{m}_k, t_i)^2 \quad (3.19)$$

e o elemento do vetor resultante do produto de  $\mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{f}_{\beta_k}$ , é igual a:

$$f_i = 2\beta [\Delta d(\mathbf{m}_k, t_i)^2]^{2\beta-1} \Delta d(\mathbf{m}_k, t_i) \quad (3.20)$$

Note que a equação (3.18) resulta igual a equação (3.9) quando  $\beta = \frac{1}{2}$ , que corresponde à expressão para a inversão linearizada com norma 2. A equação (3.18) adiciona o parâmetro

$\beta$  no método de inversão linearizada, ou seja, o método pode trabalhar explorando outras normas, não ficando restrito a norma 2.

Resolvendo-se a equação (3.18) para o modelo corrente  $\mathbf{m}_k$ , podemos atualizar o modelo para  $\mathbf{m}_{k+1}$  como segue:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \Delta\mathbf{m}_k \quad (3.21)$$

$$\text{onde } \Delta\mathbf{m}_k = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k}^2 \mathbf{G}_k)^{-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k} \mathbf{f}_{\beta_k}$$

Para a solução da equação (3.21) utiliza-se o algoritmo conjugado gradiente, cuja estrutura esta apresentada no apêndice D.

### 3.5 Inversão linearizada no domínio logarítmico

Um dos principais objetivos deste trabalho no âmbito da inversão linearizada é investigar a eficiência do método em determinar um ponto de mínimo na função-objetivo utilizando o domínio logarítmico no processo de inversão (Johansen, 1977). A principal mudança introduzida no método de inversão linear, é a adoção de uma função erro construída utilizando-se a diferença entre o logaritmo dos dados observados e o logaritmo dos dados calculados. Dessa forma podemos colocá-la da seguinte maneira:

$$\Delta d(\mathbf{m}, t_i) = \log(d_{obs\ i}) - \log(\rho_a(\mathbf{m}, t_i)) \quad (3.22)$$

Nesta nova situação, o vetor que representa o modelo corrente é dado por:

$$\mathbf{m}'_k = \log(\mathbf{m}_k) \quad (3.23)$$

e o vetor de incremento torna-se:

$$\Delta\mathbf{m}'_k = \log(\mathbf{m}) - \log(\mathbf{m}_k) \quad (3.24)$$

A outra modificação ocorre na matriz das derivadas. Nesta nova forma, o vetor  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$ , é substituído por  $\log[\rho_a(\mathbf{m}, t)]$ , e a derivada é definida em termos de  $\log(\mathbf{m})$ , o que determina uma modificação nos elementos da matriz. O cálculo das derivadas que definem cada elemento  $g_{ij}$  da matriz é então dado por:

$$g_{ij} \cong \frac{\log[\rho_a(\mathbf{m}_\Delta, t)] - \log[\rho_a(\mathbf{m}, t)]}{\delta_j} \quad (3.25)$$

onde  $m_{\Delta j} = \exp[1.001 \log(m_j)]$ , e  $\delta_j$  representa uma perturbação no parâmetro  $m_j$  e pode ser feito:  $\delta_j = 0.001[\log(m_j)]$  por exemplo. Note que a perturbação se faz também no domínio logarítmico.

Com a adoção dessas modificações, a função linearizada do erro ganha uma nova estrutura que poderá lhe proporcionar uma maior versatilidade no processo de convergência a um ponto de mínimo. Definindo  $\rho'_a(\mathbf{m}, t) = \log[\rho_a(\mathbf{m}, t)]$  e substituindo-se  $\rho_a(\mathbf{m}, t)$  e  $\mathbf{m}_k$  por  $\rho'_a(\mathbf{m}, t)$  e  $\mathbf{m}'_k$  na equação (3.4), procede-se da mesma forma mostrada na seção 3.3, até a determinação do vetor  $\mathbf{m}'_{k+1}$ .

A utilização do algoritmo conjugado gradiente no domínio logarítmico, causa a determinação de um vetor incremento ( $\Delta \mathbf{m}'_k$ ) com características logarítmicas, e em função disso, ele deverá ser adicionado ao logaritmo do vetor inicial de parâmetros, e o resultado, novamente convertido a forma linear através da equação:  ${}^{k+1}m_j = \exp[{}^k \Delta m'_j + {}^k m'_j]$ ,  $j=1, \dots, N$ . Conforme demonstrado nos exemplos numéricos das seções seguintes, a adoção desse procedimento garantirá uma convergência bem mais rápida do método em função do número de iterações.

### 3.6 O fator de amortecimento para estabilizar a I.L.

Em seções anteriores, foi visto que o método de mínimos quadrados aplicado à expressão do erro quadrático produzia a seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^2 \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^T \mathbf{f}_\beta \quad (3.26)$$

que permite calcular o conjunto de parâmetros que torna mínima a expressão do erro quadrático. Entretanto, na tentativa de se inverter dados de campo e sintéticos, o método por vezes divergia, ou seja, o vetor de parâmetros de uma iteração posterior ao invés de tornar menor a expressão do erro quadrático, produzia o efeito inverso. A divergência ocorria em modelos invertidos com diversas normas e em ambos os domínios, linear e logarítmico. A solução para o problema foi alterar as equações de forma a introduzir nas mesmas o fator de amortecimento de Marquardt (Rijo et al, 1977). O termo, age diretamente sobre a matriz  $X^T X$  provocando um ganho em sua diagonal principal ao se somar os elementos da matriz a uma outra, composta pelo produto entre um número real qualquer e a matriz identidade de mesmas dimensões. Com essa mudança, a nova expressão para a equação acima é:

$$\Delta \mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^2 \mathbf{G} + k\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^T \mathbf{f}_\beta \quad (3.27)$$

O ganho nos valores da diagonal principal da matriz  $X^T X$  faz com que aumente a curvatura do parabolóide que representa a expressão do erro quadrático em função do vetor de parâmetros, aumentando também o gradiente na direção do mínimo do parabolóide em qualquer ponto. Isso facilitará a ação do método conjugado gradiente em determinar um vetor de parâmetros de uma iteração posterior, que torne menor o valor do erro quadrático, já que em sua filosofia de funcionamento, o método procura transportar o vetor de parâmetros ao longo da direção que possui o maior gradiente.

A utilização do fator de amortecimento se dá teoricamente em função do modelo inicial proposto. Se tal modelo for ruim, é bem possível que seja preciso introduzir um fator de amortecimento a fim de garantir a convergência. Se entretanto, o modelo inicial for bom, é aconselhável tornar tal fator inoperante, pois ele, que é utilizado para garantir a convergência, tem, como uma espécie de efeito colateral, a capacidade de torná-la mais lenta.

### 3.7 O método aplicado a modelos sintéticos

Nesta seção, são expostos os resultados obtidos durante a fase de testes do método de inversão linearizada. Os testes foram realizados levando-se em consideração a resposta do método aos parâmetros: norma, fator de amortecimento, modelo inicial e domínio. O modelo sintético foi construído de forma que pudesse se aproximar bastante das condições reais de subsuperfície da região. Nestas condições, foi idealizada uma primeira camada composta por sedimento inconsolidado de razoável espessura e seco (sem presença de água nos poros). A segunda camada, com espessura semelhante a primeira, é também formada por sedimento inconsolidado, cujos grãos estão envoltos por água capilar e pelicular, provavelmente com um alto índice de sal dissolvido, ou mesmo embasamento alterado. Logo abaixo, encontra-se a camada aquífera, com uma espessura em torno dos 50 metros, formada pelo embasamento cristalino fraturado, saturado em água salobra. A quarta e última camada, é o embasamento cristalino não fraturado, caracterizado pela alta resistividade. Desta forma, e baseado nos valores de resistividade típica dos materiais, que podem ser vistos na tabela (3.9), estabeleceu-se um modelo inicial de quatro camadas, onde os valores de resistividade e espessura podem ser vistos na tabela abaixo:

Foram realizados testes com esse modelo sintético, invertendo-o utilizando-se normas 1, 2 e 3, fator de amortecimento 1 e 2, domínio linear e logarítmico, e modelos iniciais bons (com uma perturbação de 10 % em relação aos parâmetros do modelo) e ruins (com uma perturbação de 50 %), o que finaliza um total de 24 modelos invertidos de formas diferentes. Os resultados podem ser vistos nas figuras (3.2) a (3.8), no final da seção.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	1000	5
camada 2	10	5
camada 3	200	50
camada 4	5000	$\infty$

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros do modelo sintético escolhido

A primeira figura, mostra a influência da norma para inversões realizadas no domínio linear, com modelo inicial bom e fator de amortecimento inoperante. Está claro que sob essas condições, a inversão com norma 2 levou vantagem, pois logo na primeira iteração atingiu um índice de ajuste de 100 %, enquanto que para a norma 3 isso foi possível a partir da quarta iteração, o que não lhe acarreta grande desvantagem, já que os parâmetros invertidos foram praticamente os mesmos para os dois modelos, com exceção da segunda camada, onde os parâmetros invertidos utilizando-se norma 2 estão mais próximos à realidade. Entretanto, a inversão com norma 1 neste caso, revelou um ajuste bastante oscilante e de um modo geral pequeno em relação aos outros dois casos, o modelo final é fracamente invertido, e os parâmetros ajustados trazem diferenças grosseiras em relação aos parâmetros propostos. Nas 3 normas utilizadas, o ajuste dos parâmetros da primeira camada é bastante preciso, enquanto que para a última camada os valores de resistividade ficaram em torno do valor proposto no modelo inicial, sem grandes variações portanto. De um modo geral, analisando-se o conjunto dos três modelos invertidos, constatou-se que o melhor desempenho ficou por conta do modelo invertido com norma 2. A figura (3.4), mostra a influência da norma para inversões feitas no domínio linear, com modelo inicial bom e fator de amortecimento 2, o que a priori é, neste caso, desnecessário pois o fator de amortecimento é utilizado para garantir a convergência de modelos iniciais ruins, o que não é o caso. Entretanto, os testes realizados sob essas condições, revelaram uma melhora significativa na inversão com norma 1, onde o índice de ajuste atingiu valor máximo. Com as normas 2 e 3 ocorreu o esperado, ou seja, o ajuste final foi 1 para a norma 2, e bem próximo a isso para a norma 3, porém a convergência foi bem mais demorada, o que evidencia uma total falta de necessidade de fatores de amortecimentos tão altos para inversões com modelos iniciais bons nos dois casos. Os melhores resultados foram novamente atingidos na inversão dos parâmetros da primeira camada, ocorrendo o mesmo problema anterior na inversão da última. As inversões com norma 1 e 2 têm precisão equivalente, enquanto que com norma 3, o valor obtido para a espessura da terceira camada é totalmente discrepante, o que vem a abalar fatalmente os resultados da inversão com tal norma. Os testes mostraram que o fator de amortecimento nesse caso teve influência significativa nas inversões com norma 1, ao mesmo tempo parece ter prejudicado o resultado das inversões com norma 3. A tabela (3.2) mostra os valores invertidos no domínio linear com modelo inicial bom.

	lnb11	lnb12	lnb13	lnb21	lnb22	lnb23
$\rho_1$	1002,71	999,99	999,96	1000	999,93	998,37
$\rho_2$	79,22	8,84	6,18	8,94	8,84	6,67
$\rho_3$	9630,74	190,31	188,93	219,79	219,97	231,70
$\rho_4$	4324,56	4501,42	4502,37	4500,07	4500,03	4481,00
$h_1$	4,59	5,00	5,01	5,00	5,01	5,05
$h_2$	58100,57	4,37	3,04	4,53	4,54	4,81
$h_3$	960,54	47,86	47,92	53,02	51,44	1,58

Tabela 3.2: Valores dos parâmetros invertidos com domínio linear e modelo inicial bom, *ln* significa domínio linear, *b* indica modelo inicial bom, o primeiro algarismo indica o fator de amortecimento, e o segundo indica a norma utilizada.

A figura (3.6) mostra as inversões realizadas no domínio linear, modelo inicial ruim e fator de amortecimento inoperante. Para norma 1, como já era de se esperar, a inversão foi um fracasso, o que demonstra a necessidade de um fator de amortecimento maior para inverter com um modelo inicial tão desfavorável. Entretanto, para as normas 2 e 3, as inversões apresentaram resultados satisfatórios, obtendo-se 1 como ajuste final, apesar das consideráveis diferenças entre os parâmetros ajustados. A inversão com norma 2 apresentou melhores resultados apesar de ter conseguido alcançar apenas uma região de mínimo local, o que está evidenciado ao se observar o ajuste impreciso dos parâmetros obtidos para a segunda camada. Persiste ainda o problema do ajuste impreciso para a resistividade da última camada. A figura (3.8) mostra a influência do fator de amortecimento nas inversões com as diferentes normas. O fator 2 influenciou de forma positiva no ajuste dos parâmetros com norma 3, principalmente na resistividade da terceira camada, que invertida com fator 1 apresentou um valor altamente impreciso. Modificou também sensivelmente os parâmetros da segunda camada invertida com norma 2, ainda que isto não significasse uma vantagem, visto que tais parâmetros ajustados com fator 2 ainda estão distantes do valor estabelecido. A grande mudança ocorre entretanto na inversão com norma 1, que desta vez foi amplamente satisfatória em relação aquela realizada com fator de amortecimento inoperante. Uma análise geral, mostra um mesmo grau de inversão para os três modelos, persistindo ainda o problema de se alcançar apenas um mínimo local. Tais resultados demonstram que a norma 1 é de um modo geral mais sensível ao modelo inicial, se comparada às normas 2 e 3, isto quer dizer que se tais modelos não forem de fato muito bons, o seu uso estará restrito a adoção de um certo fator de amortecimento. As inversões feitas com um modelo inicial ruim, levavam invariavelmente a função objetivo a regiões de mínimo locais. Este é o preço a ser pago no processo de inversão linearizada pela escolha de um modelo inicial desfavorável. A tabela (3.3) mostra os parâmetros invertidos para um domínio linear e um modelo inicial ruim.

	lnr11	lnr12	lnr13	lnr21	lnr22	lnr23
$\rho_1$	544,58	1000,14	1000,94	999,94	999,73	999,79
$\rho_2$	8997,71	16,67	25,66	5,06	4,72	15,76
$\rho_3$	1153,93	231,92	908,76	300,70	285,25	352,30
$\rho_4$	2479,73	2519,92	2531,96	2500,67	2503,89	2506,67
$h_1$	381,37	4,98	4,92	5,01	5,02	4,99
$h_2$	13607,80	9,01	16,87	2,72	2,62	9,21
$h_3$	2066,77	41,21	66,45	57,43	47,19	47,81

Tabela 3.3: Valores dos parâmetros invertidos com domínio linear e modelo inicial ruim. *ln* significa domínio linear, *r* indica modelo inicial ruim, o primeiro algarismo indica o fator de amortecimento, e o segundo indica a norma utilizada.

Com a observação da figura (3.10), passa-se a analisar as inversões feitas no domínio logarítmico, com modelo inicial bom e fator de amortecimento inoperante. A inversão com norma 1, embora não possa ser considerada discrepante, é visivelmente inferior aos valores conseguidos com as outras normas. O fator de amortecimento 1 neste caso não conseguiu garantir uma convergência, o que é demonstrado com a queda do índice de ajuste a cada iteração. Aqui, a inversão com norma 3 se mostrou mais eficiente, e até o problema do pequeno ajuste para a última camada foi melhor resolvido. As inversões realizadas no domínio logarítmico, com modelo inicial bom e fator de amortecimento 2, mostradas na figura (3.12), apresentam exatamente o mesmo grau de eficiência, com ajustes finais iguais, assim como iguais (ou praticamente iguais) também foram as dimensões dos parâmetros invertidos. O fator de amortecimento, como era de se esperar, prejudicou as inversões realizadas com modelo inicial bom, retardando a convergência do método. Essa é a causa do melhor ajuste conseguido com fatores de amortecimento inoperantes para as três normas. Na tabela (3.4), pode-se observar os valores dos parâmetros invertidos para um domínio logarítmico e um modelo inicial bom.

Passemos agora a análise das inversões realizadas no domínio logarítmico, com modelo inicial ruim e fator de amortecimento inoperante. Nos três casos apresentados, as inversões não obtiveram bons resultados. O processo era interrompido na terceira ou quarta iteração, com uma queda acentuada do índice de ajuste, que atingiu valores em torno de 0,2. Os resultados foram de tal forma ruins, que não foram mostrados em gráfico. A figura (3.14) mostra os resultados das inversões realizadas no domínio logarítmico, com modelo inicial ruim e fator de amortecimento 2. Os melhores resultados ficaram por conta da inversão com norma 2, embora nos três casos foram alcançados apenas mínimos locais, o que fica evidenciado ao se observar o ajuste ruim obtido para os parâmetros da camada 2. As três normas utilizadas apresentaram exatamente os mesmos resultados no que diz respeito às performances finais,

	lgb11	lgb12	lgb13	lgb21	lgb22	lgb23
$\rho_1$	1145,93	999,99	999,98	1000,02	999,70	999,13
$\rho_2$	9,41	9,72	9,42	8,93	8,93	8,84
$\rho_3$	198,48	199,67	199,75	218,25	214,41	226,14
$\rho_4$	4917,90	4990,69	4996,64	5360,54	5934,40	6669,12
$h_1$	5,12	5,00	5,00	5,00	5,01	5,01
$h_2$	4,71	4,85	4,72	4,52	4,52	4,53
$h_3$	48,92	49,96	49,98	53,88	53,41	56,00

Tabela 3.4: Valores dos parâmetros invertidos com domínio logarítmico e modelo inicial bom. *lg* significa domínio logarítmico, *b* indica modelo inicial bom, o primeiro algarismo indica o fator de amortecimento, e o segundo indica a norma utilizada.

sempre em torno de 1. O fator de amortecimento 2 salvou as inversões feitas com modelo inicial ruim, já que só desta forma foi possível alcançar ajustes consideráveis. As inversões feitas no domínio logarítmico são um bom exemplo de quando a utilização de um fator de amortecimento não nulo pode ajudar ou atrapalhar o processo de inversão. Ficou claro que a utilização ou não do fator, esta intimamente ligado ao modelo inicial estabelecido. A tabela (3.5) mostra o resultados das inversões para domínio logarítmico e modelo inicial ruim.

	lgr11	lgr12	lgr13	lgr21	lgr22	lgr23
$\rho_1$	-	-	-	999,01	998,95	996,20
$\rho_2$	-	-	-	4,82	4,89	4,76
$\rho_3$	-	-	-	289,05	250,31	321,75
$\rho_4$	-	-	-	9540,20	7401,95	7872,27
$h_1$	-	-	-	5,03	5,02	5,04
$h_2$	-	-	-	2,59	2,55	2,61
$h_3$	-	-	-	67,34	60,56	72,74

Tabela 3.5: Valores dos parâmetros invertidos com domínio logarítmico e modelo inicial ruim. *lg* significa domínio logarítmico, *r* indica modelo inicial ruim, o primeiro algarismo indica o fator de amortecimento, e o segundo indica a norma utilizada.

Analisando-se as 12 inversões feitas no domínio linear, e comparando-as as outras 12 feitas no domínio logarítmico, pode-se chegar a várias conclusões. Mostrou-se que ao se utilizar modelo inicial bom e fator de amortecimento inoperante, torna-se clara a vantagem das inversões no domínio logarítmico, no qual os parâmetros ajustados ficaram bem mais próximos do modelo sintético estabelecido. O domínio logarítmico neste caso conseguiu

inclusive eliminar o problema do baixo ajuste para a resistividade da última camada, elevando o valor dessa resistividade a valores próximos ao estabelecido no modelo sintético. Para um modelo inicial bom, e um fator de amortecimento 2, os parâmetros invertidos nos domínios linear e logarítmico tiveram o mesmo grau de ajuste. Em ambos os domínios as inversões com normas 2 e 3 foram prejudicadas pela adoção desnecessária de um fator de amortecimento, enquanto que a norma 1 se beneficiou com o fator, principalmente quando se adotava modelos iniciais ruins.

Ao se utilizar um modelo inicial ruim, e um fator de amortecimento inoperante, os resultados penderam favoravelmente para o domínio linear, visto que no domínio logarítmico os ajustes tornaram-se simplesmente impossíveis, devido a alta divergência do método neste caso. A adoção de um fator de amortecimento 2 veio a equilibrar o grau de ajuste entre os dois domínios. Nesta nova situação não houve “vencedores” visto que os parâmetros para os dois domínios foram ajustados de forma similar.

De uma forma geral, em termos de eficiência no grau de ajuste dos parâmetros, o domínio logarítmico pode ser considerado mais eficaz em se tratando de modelos iniciais bons, pois neste caso os modelos mais bem invertidos foram o lgb12 e lgb13. Para modelos iniciais ruins, não houve diferença significativa no ajuste para os dois domínios, sendo possível alcançar apenas mínimos locais. Entretanto, constatou-se com base nas análises gráficas, que o domínio linear ajustou melhor os pontos iniciais do modelo sintético, enquanto que o domínio logarítmico inverteu melhor os pontos intermediários.

Quanto a questão da velocidade de convergência, parece não haver razões plausíveis para preferir um domínio a outro visto que os testes mostraram que os modelos convergiam a 1 (quando convergiam) aproximadamente com o mesmo número de iterações.

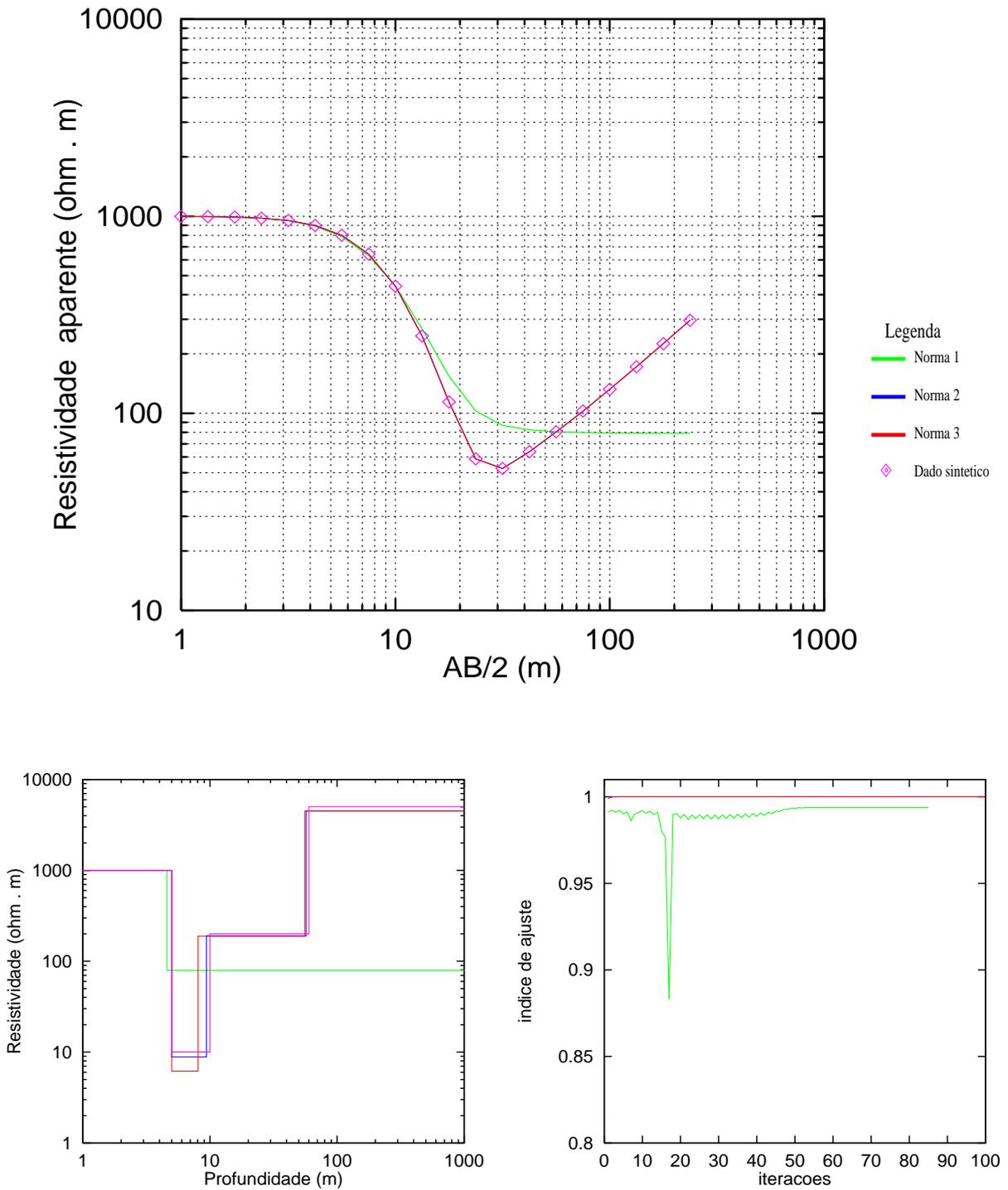


Figura 3.2: Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta), com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

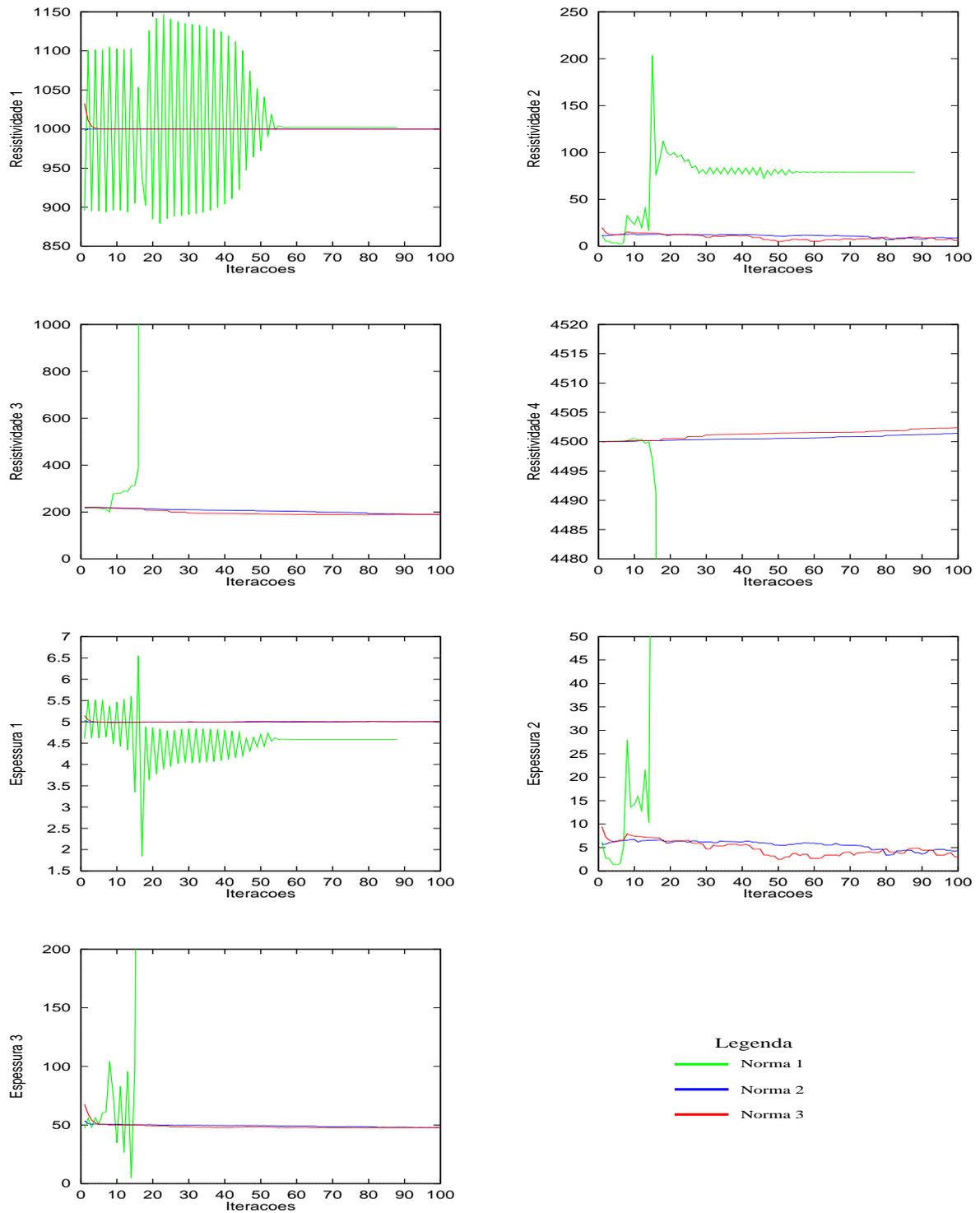


Figura 3.3: Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

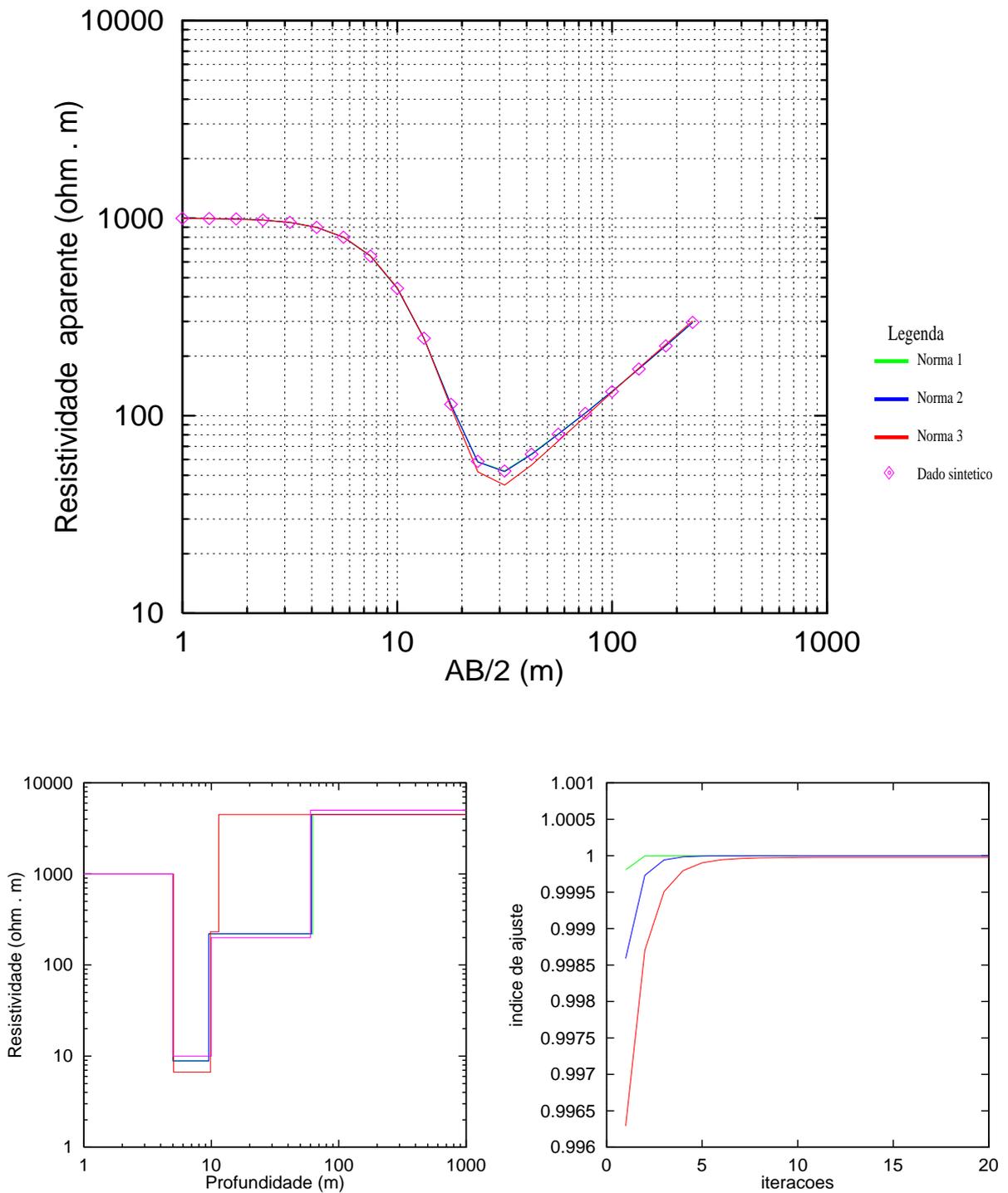


Figura 3.4: Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta), com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

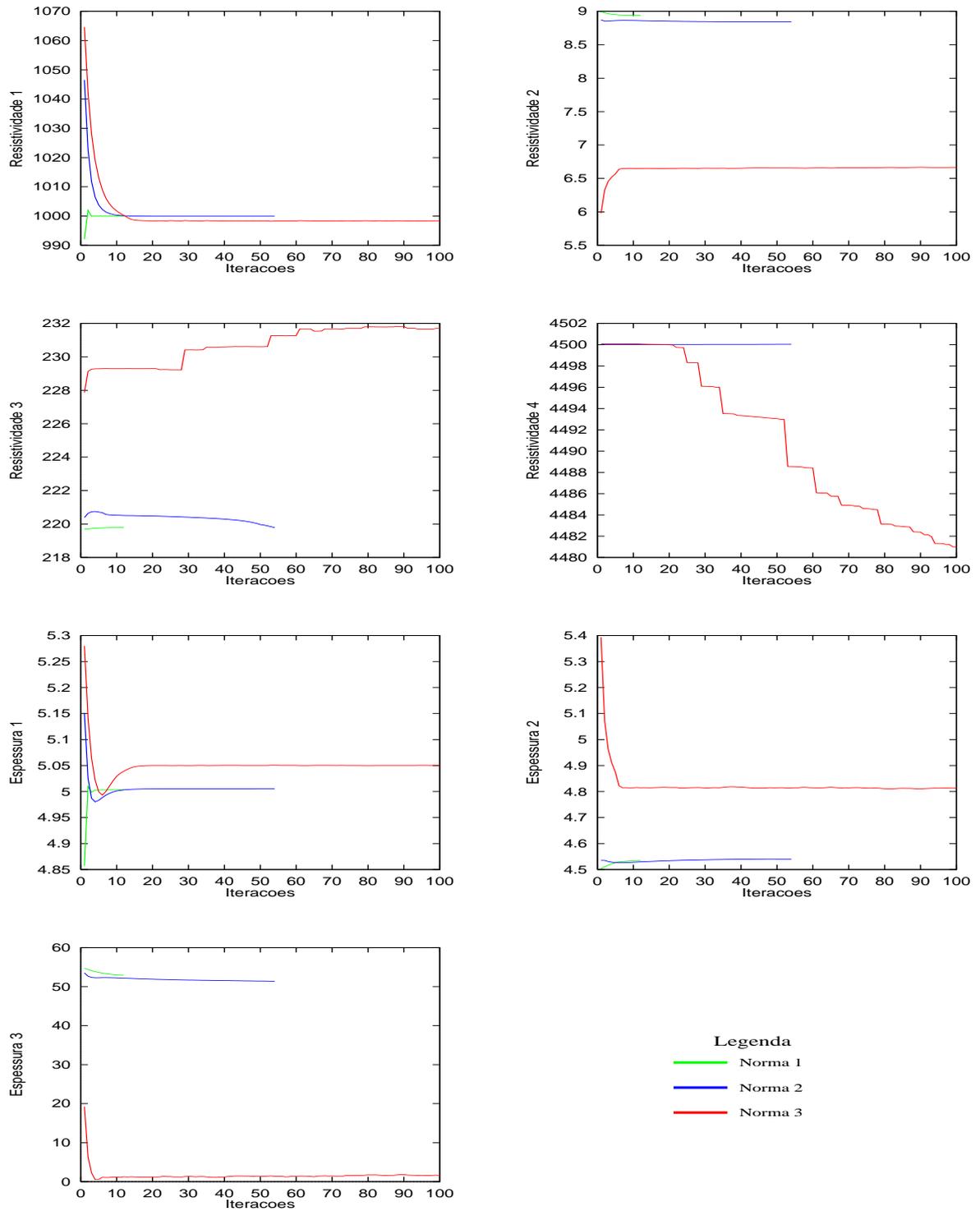


Figura 3.5: Inversão no domínio linear, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

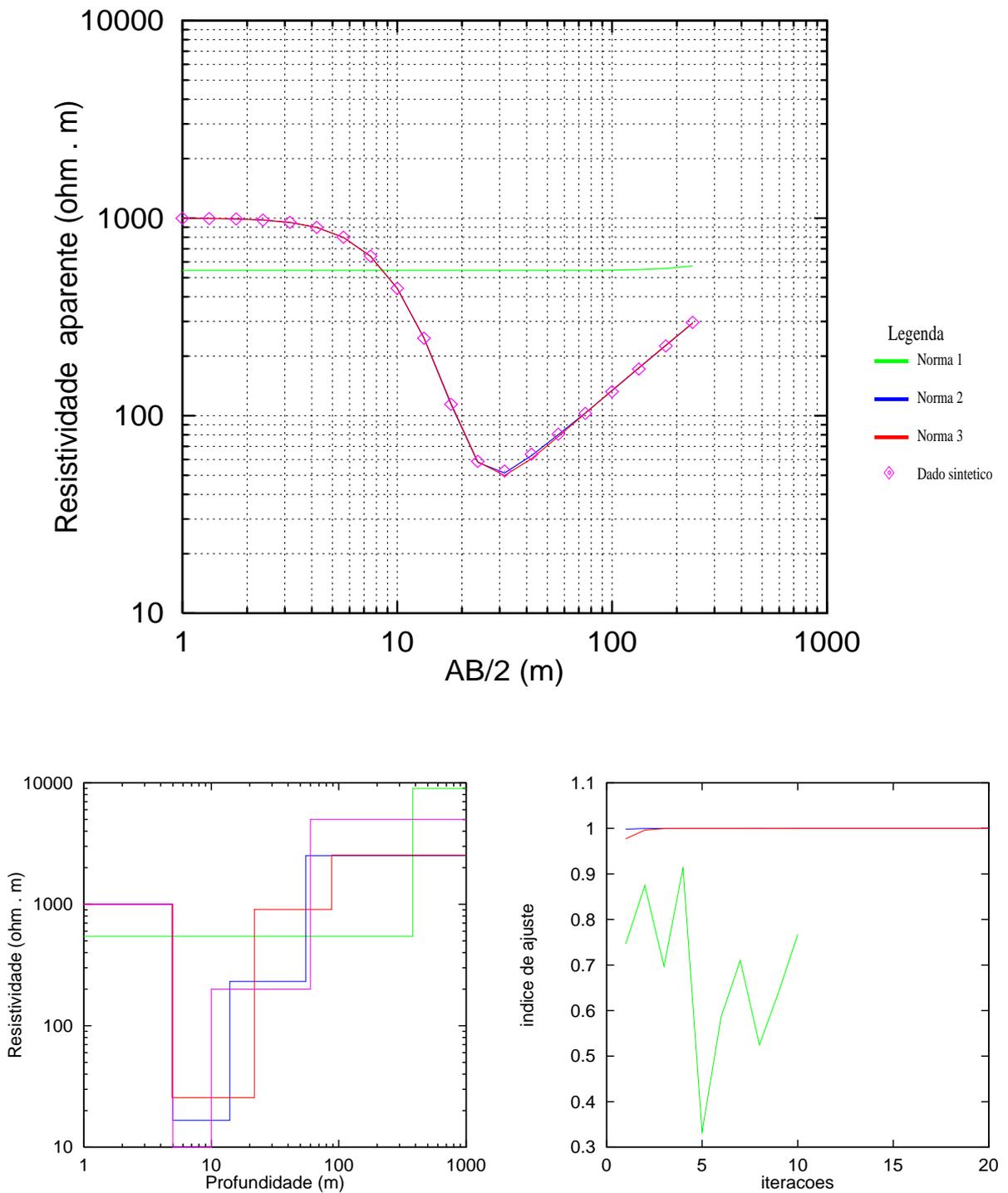


Figura 3.6: Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 1. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta) com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

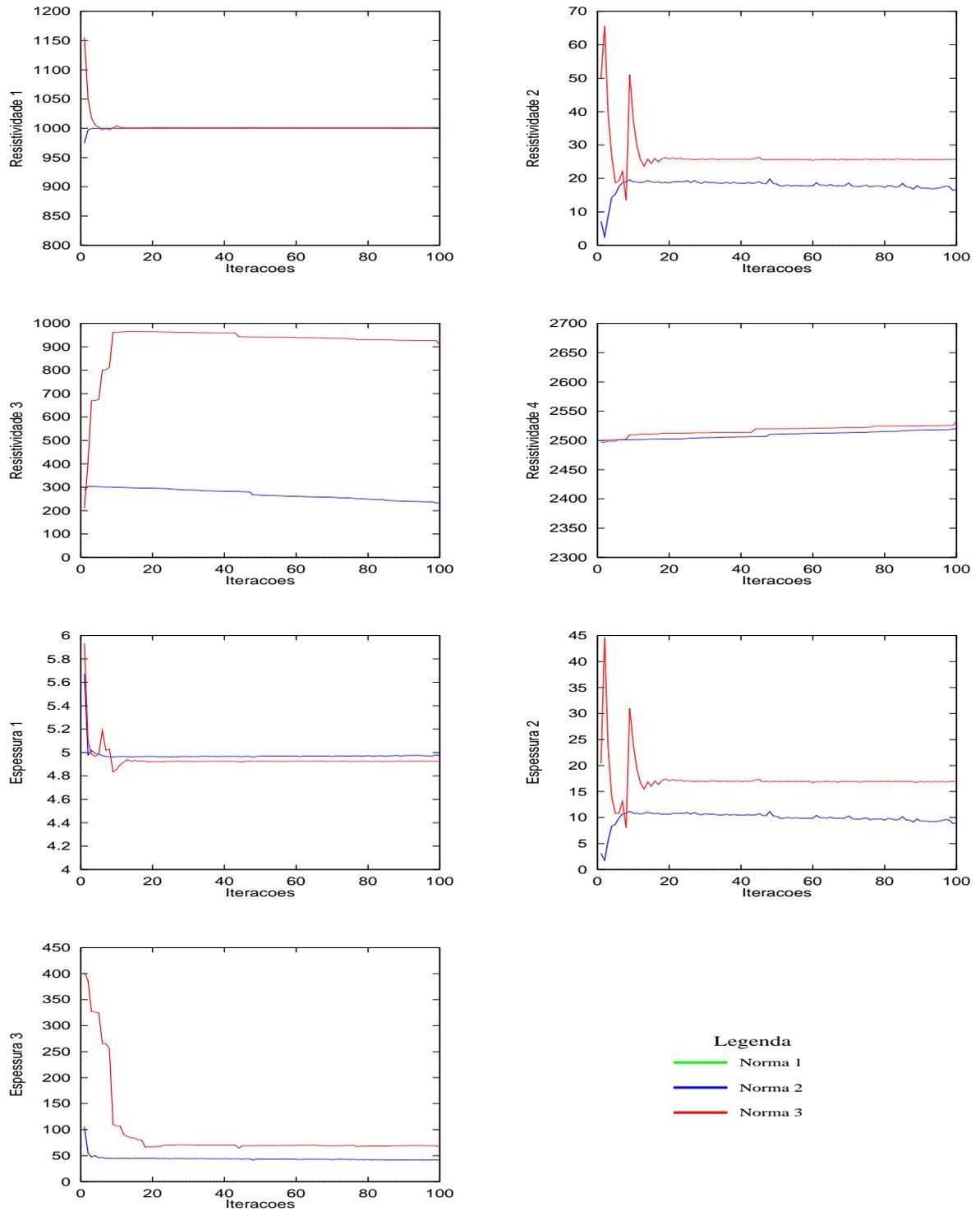


Figura 3.7: Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 1. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

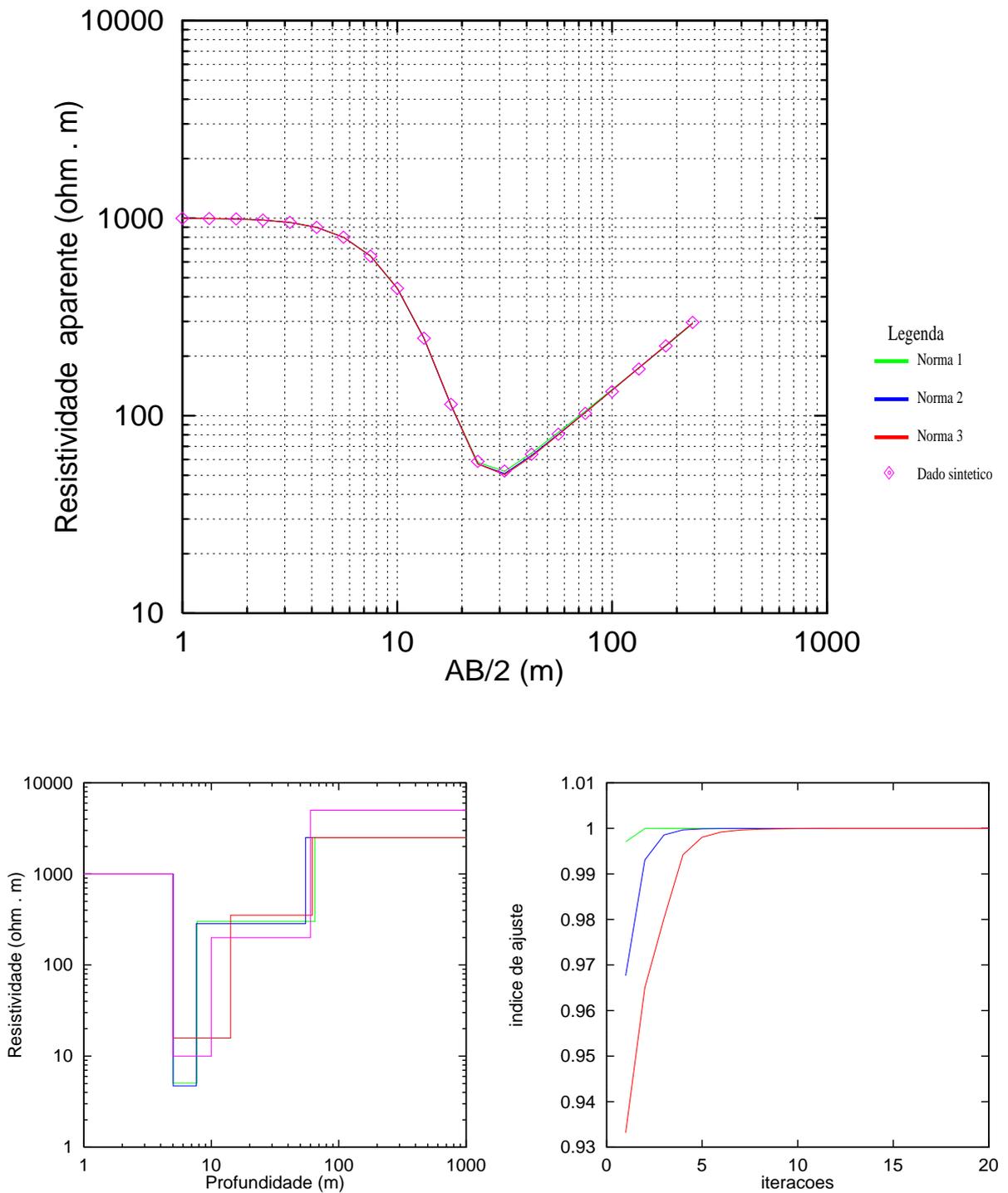


Figura 3.8: Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta) com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

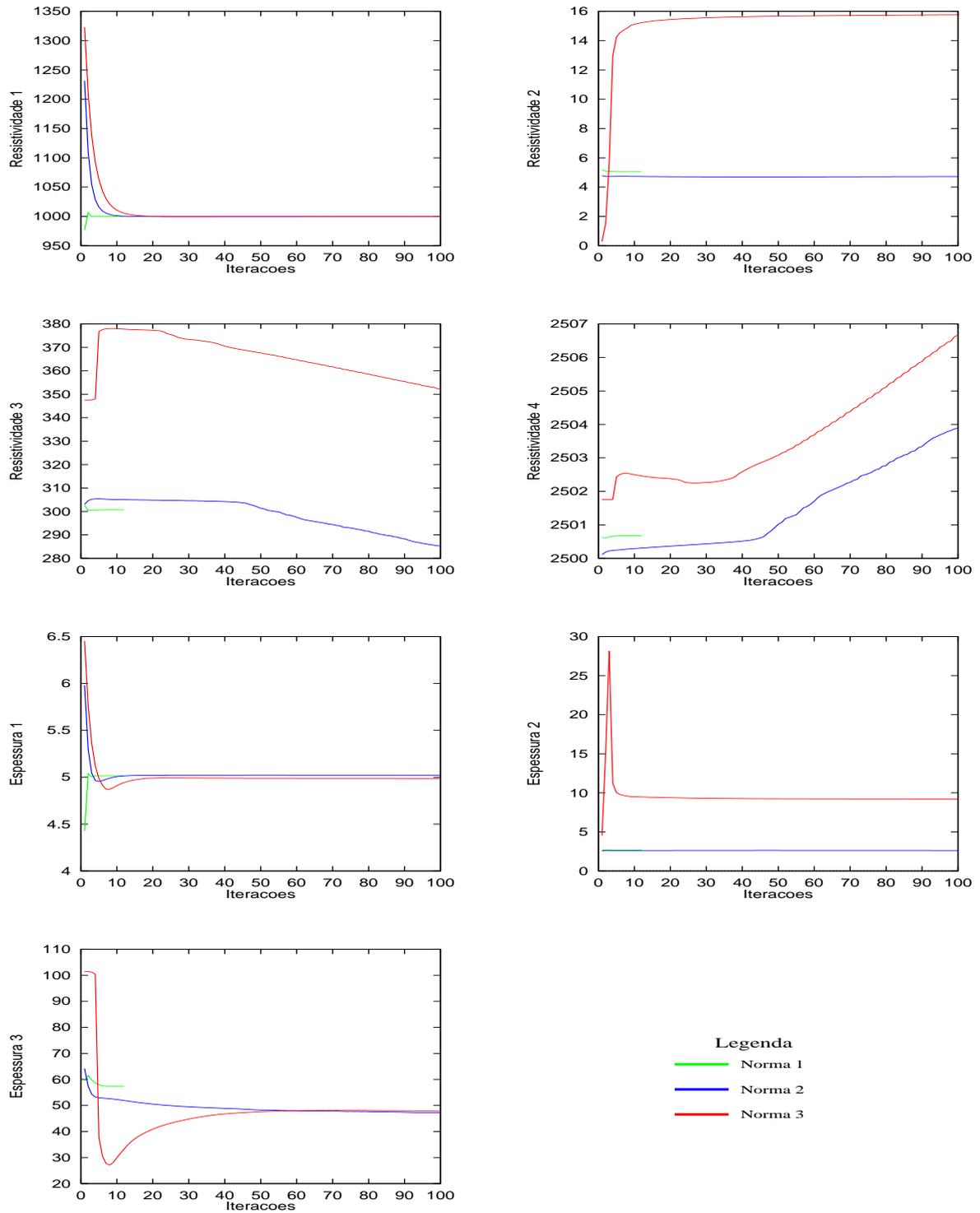


Figura 3.9: Inversão no domínio linear, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

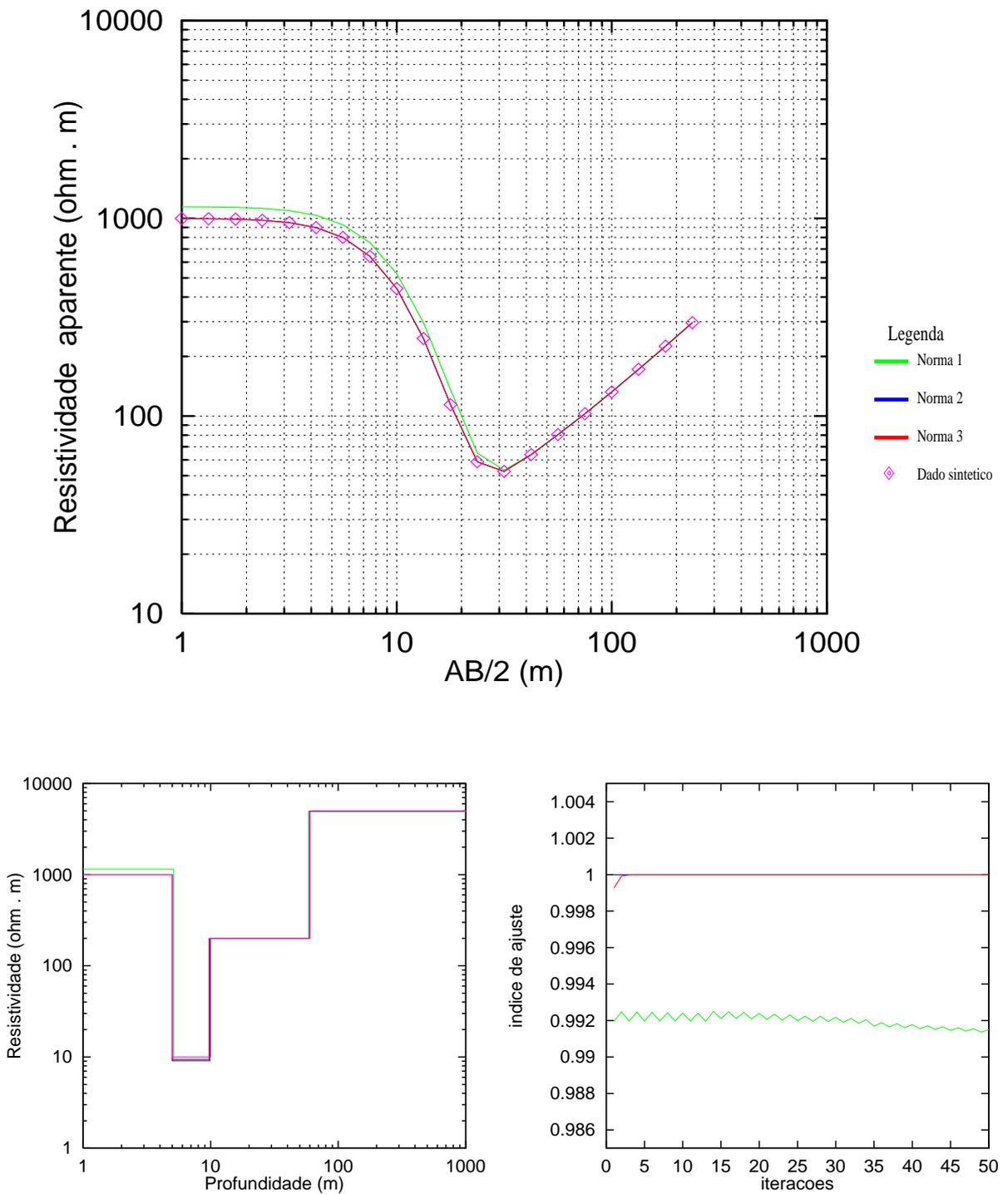


Figura 3.10: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta) com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

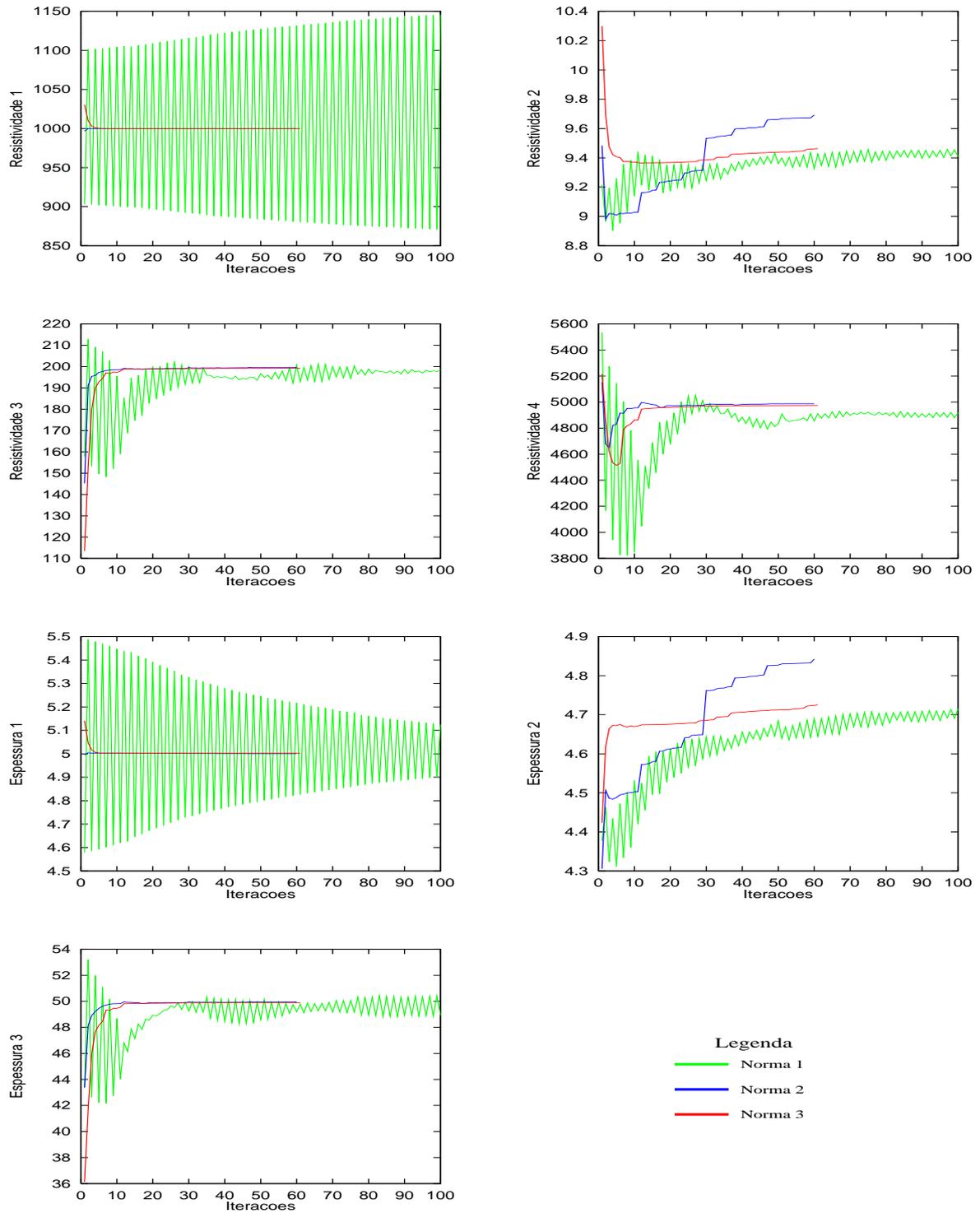


Figura 3.11: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 1. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

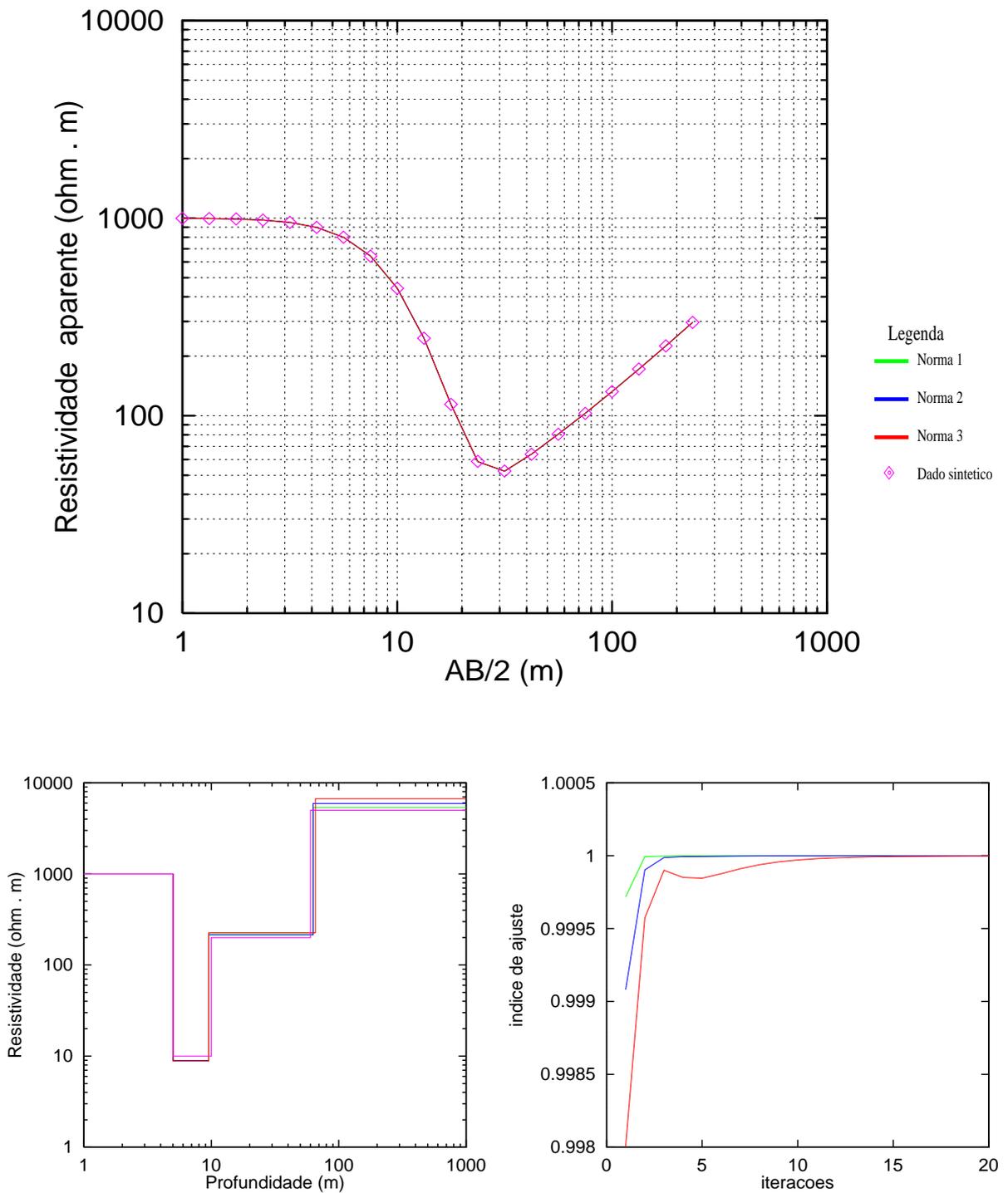


Figura 3.12: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta) com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

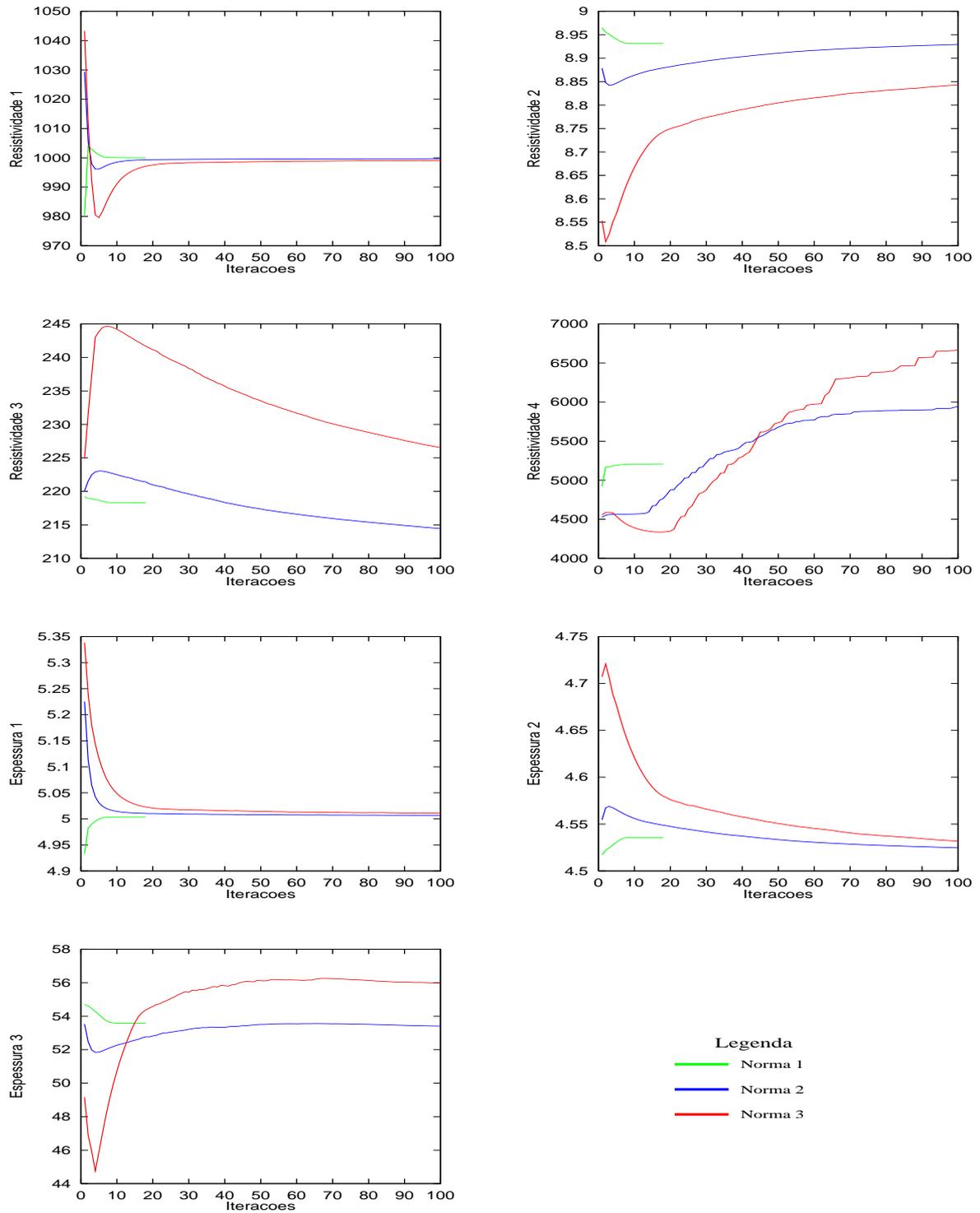


Figura 3.13: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial bom, fator de amortecimento 2. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

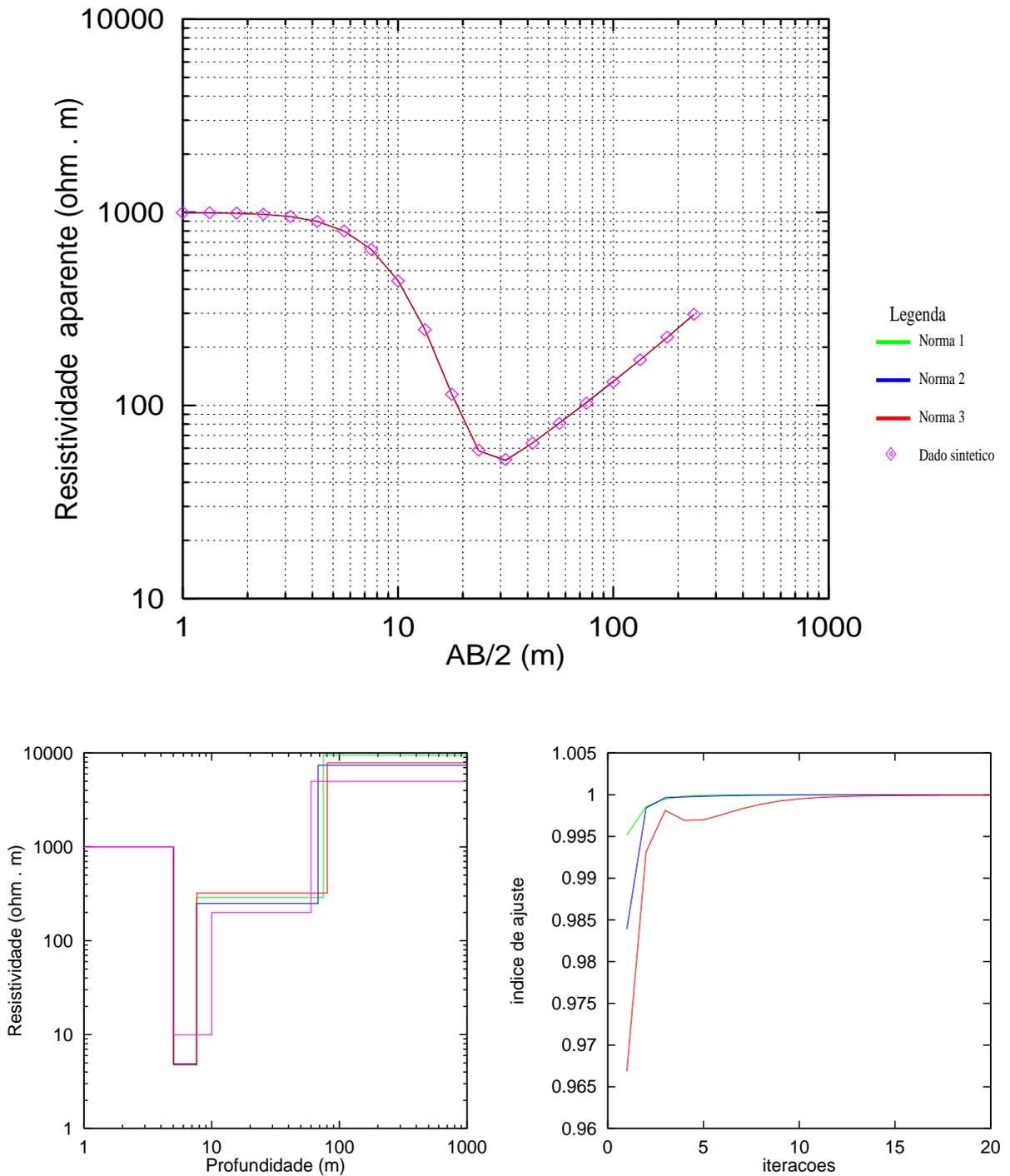


Figura 3.14: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2. Acima estão os dados sintéticos, e as curvas invertidas nas três normas. Abaixo a esquerda os modelos ajustados nas três normas e o modelo sintético (em magenta) com as espessuras e resistividades das camadas. Abaixo a direita, os desempenhos das três normas.

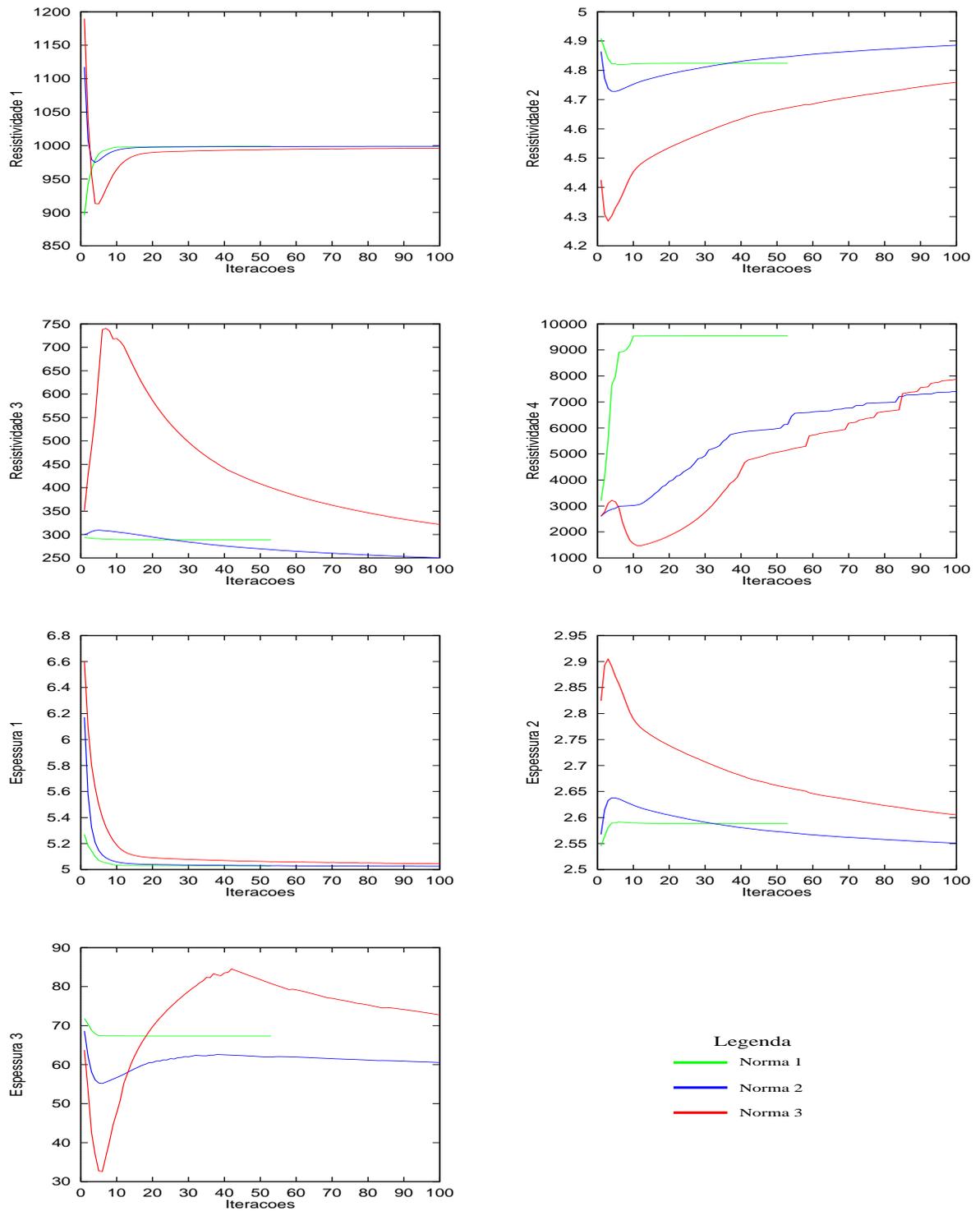


Figura 3.15: Inversão no domínio logarítmico, modelo inicial ruim, fator de amortecimento 2. Comportamento dos parâmetros ao longo das iterações.

### 3.8 Alguns testes com dados reais

A etapa de testes com dados reais foi necessária para atestar a eficiência do método de inversão linearizada no tratamento com modelos em que o grau de heterogeneidade é bem maior do que em dados sintéticos. De fato, tal adversidade pode causar uma mudança de comportamento na atuação do método, sendo preciso averiguar nesta fase, de que forma seria possível usar da melhor maneira os conceitos de norma e domínio no processo de inversão. Para tanto, foram realizados testes com três modelos de campo, os quais foram invertidos com norma 1 e 2, e nos domínios linear e logarítmico.

A primeira sondagem, realizada no campus da Universidade Federal da Bahia, mostrou tratar-se de um modelo de quatro camadas. Os resultados das inversões mostraram pouca influência na variação dos parâmetros norma e domínio, já que apresentaram praticamente o mesmo desempenho, embora tenham sido ligeiramente maiores quando se utilizou a norma 2 no domínio linear (com norma 1 não foi possível alcançar o objetivo de 100 iterações), porém a diferença também aí se mostrou desprezível.

	$\rho_1(\Omega \cdot m)$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1(m)$	$h_2$	$h_3$
Mod. inicial	65,00	30,00	15,00	5000,00	1,65	3	25
Linear 1	64,44	30,75	16,19	5000,00	1,41	5,58	32,13
Log 1	64,06	29,93	16,41	4983,75	1,49	5,61	32,50
Linear 2	65,15	30,64	15,01	5000,00	1,40	6,09	28,63
Log 2	64,41	29,21	15,28	$0,12 \cdot 10^{11}$	1,51	6,49	29,47

Tabela 3.6: Valores dos parâmetros invertidos do primeiro modelo de campo. *Linear* e *Log* indicam o domínio e o algoritmo seguinte indica a norma utilizada

Na segunda sondagem, realizada na região de Porto Seguro, começa a se verificar as pequenas variações no ajuste, decorrentes da utilização de normas e domínios diferentes. Nas inversões realizadas com ambas as normas, nota-se claramente um melhor ajuste no domínio logarítmico para os pontos mais distantes. Em contrapartida, os pontos mais próximos são melhor ajustados no domínio linear. Esse efeito de compensação, faz com que os desempenhos finais registrados sejam praticamente os mesmos, com uma pequena e até desprezível vantagem para o domínio linear em ambas as normas. Mais uma vez, os índices finais de ajuste alcançaram seus maiores valores quando da utilização de norma 2.

A terceira sondagem, também realizada na região de Porto Seguro, mostra que para norma 1, as inversões realizadas nos dois domínios traz praticamente os mesmos resultados, tanto no nível de ajuste da curva quanto nas performances finais registradas. Com norma 2, percebe-se melhor as diferenças nas inversões com os dois domínios. Mais uma vez, no domínio linear, foram melhor invertidos os primeiros pontos da curva, enquanto que no

	$\rho_1(\Omega \cdot m)$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1(m)$	$h_2$	$h_3$
Mod. inicial	60,00	3,50	100,00	5000,00	5,00	25,00	100,00
Linear 1	61,07	3,73	26,09	4999,99	4,89	19,82	131,28
Log 1	59,60	3,74	55,04	5347,08	5,03	24,61	712,20
Linear 2	64,14	6,01	34,40	5000,00	4,31	41,01	117,56
Log 2	62,31	4,38	24,71	8573,51	4,80	24,88	115,95

Tabela 3.7: Valores dos parâmetros invertidos do segundo modelo de campo. *Linear* e *Log* indicam o domínio e o algoritmo seguinte indica a norma utilizada

domínio logarítmico os pontos intermediários e finais traziam um melhor grau de ajuste. Os índices de ajustes finais registrados para norma 2, foram levemente maiores do que aqueles registrados para norma 1.

	$\rho_1(\Omega \cdot m)$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1(m)$	$h_2$
Mod. inicial	80,00	2,50	100,00	2,00	20,00
Linear 1	77,14	2,79	99,98	1,86	15,43
Log 1	76,37	2,87	97,24	1,88	15,25
Linear 2	78,71	3,49	70,72	1,80	19,20
Log 2	76,41	2,63	32,17	1,90	11,52

Tabela 3.8: Valores dos parâmetros invertidos do terceiro modelo de campo. *Linear* e *Log* indicam o domínio e o algoritmo seguinte indica a norma utilizada

Os resultados das inversões de dados reais, mostram claramente que a influência na utilização de diferentes domínios se dá mais acentuadamente quando se utiliza norma 2 na inversão. Neste caso, observa-se um melhor ajuste no domínio linear para os pontos iniciais da curva de campo, enquanto que para valores intermediários, o ajuste é mais perfeito no domínio logarítmico. Esse, parece ser o principal motivo ao se optar pela utilização de um domínio a outro.

É importante relatar aqui, que durante o processo de escolha dos modelos de campo que ilustrariam esta seção, observou-se que em um número considerável de ocasiões, não foi possível realizar a inversão no domínio logarítmico, mesmo fazendo-se variações na norma e fator de amortecimento utilizados. Isso de fato se constitui uma desvantagem (talvez a principal delas) do domínio logarítmico.

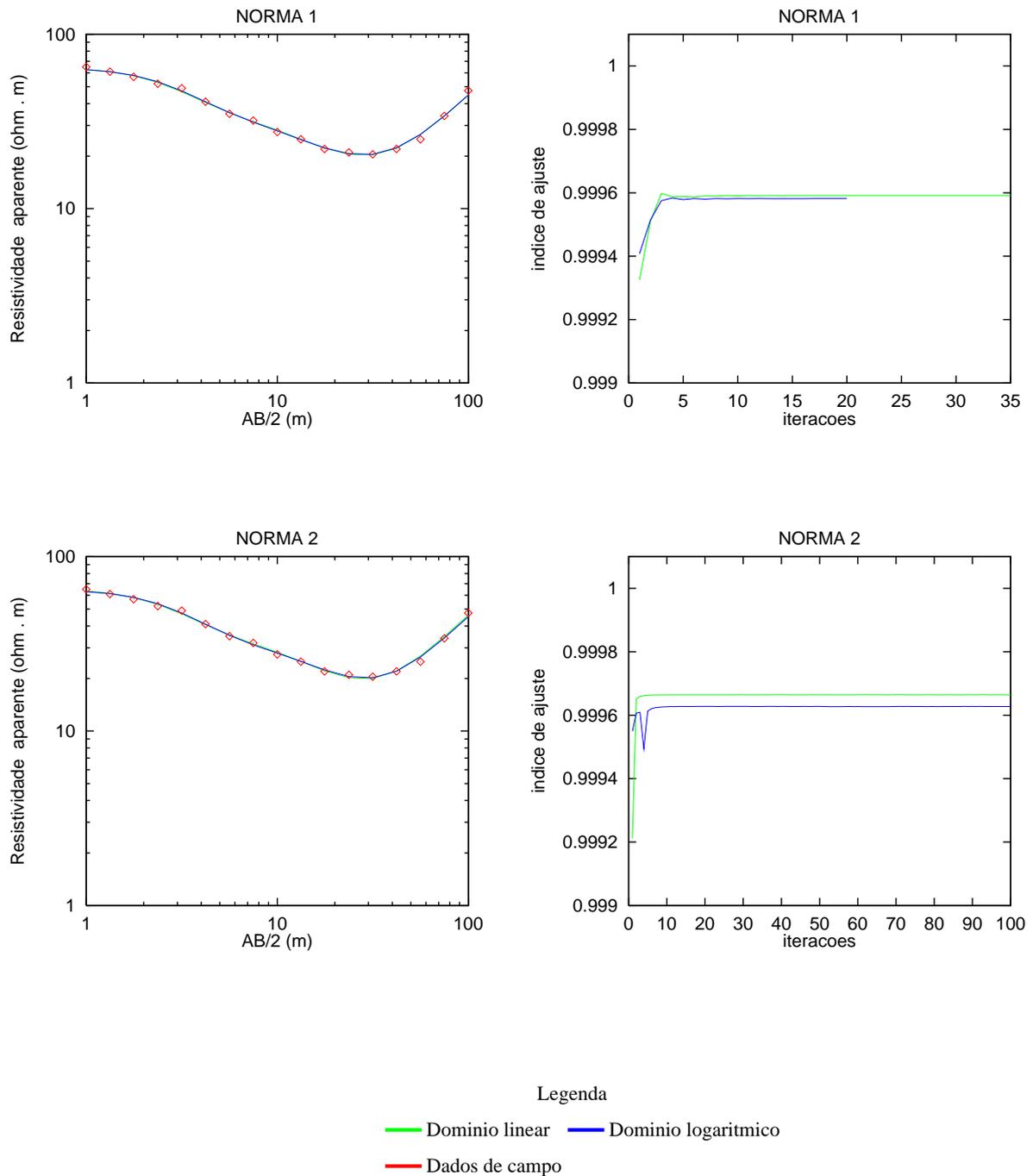


Figura 3.16: Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 (acima) e norma 2. Os gráficos da esquerda trazem dados de campo e curvas invertidas nos dois domínios, e os da direita trazem os respectivos desempenhos.

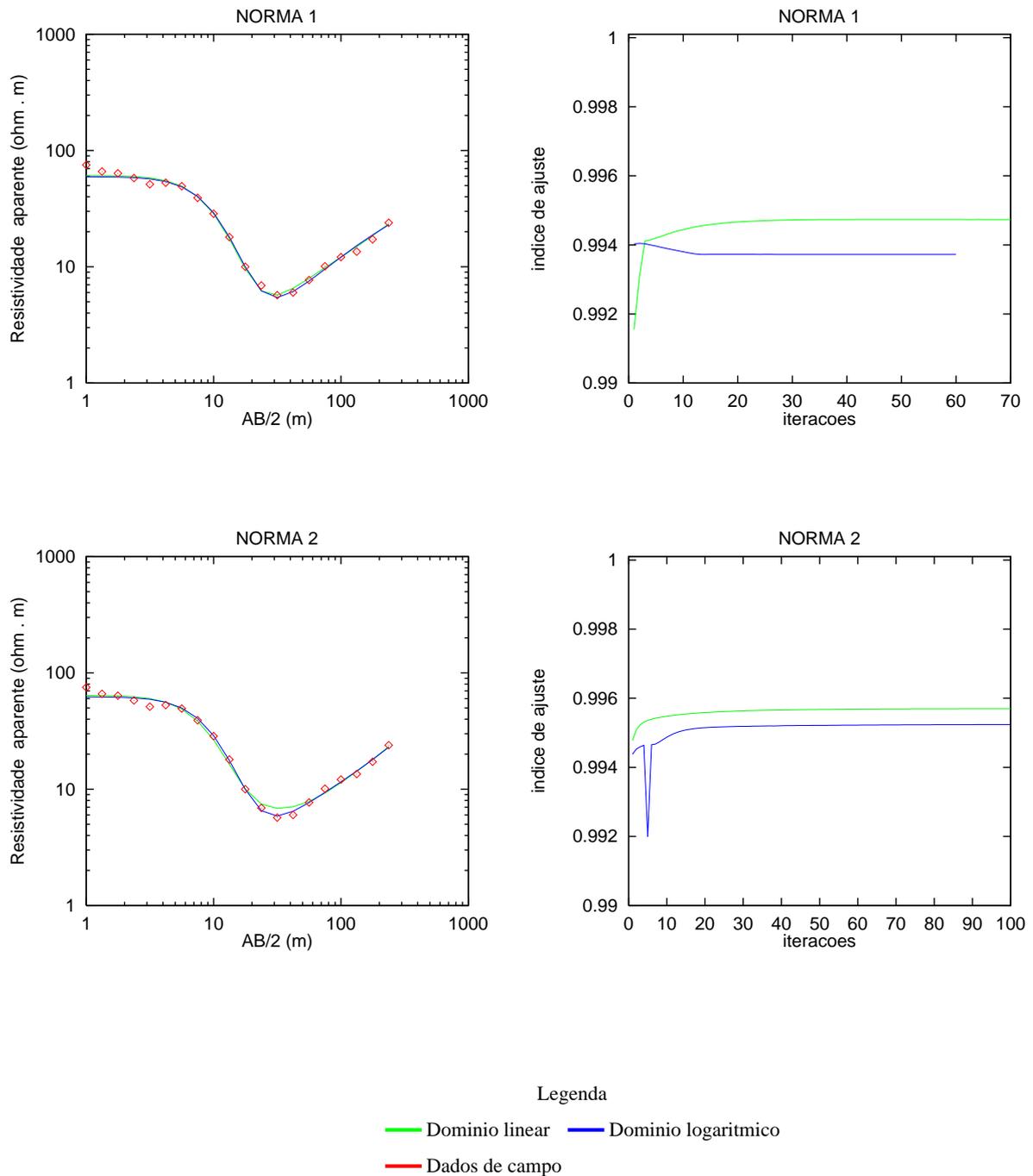


Figura 3.17: Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 (acima) e norma 2. Os gráficos da esquerda trazem dados de campo e curvas invertidas nos dois domínios, e os da direita trazem os respectivos desempenhos.

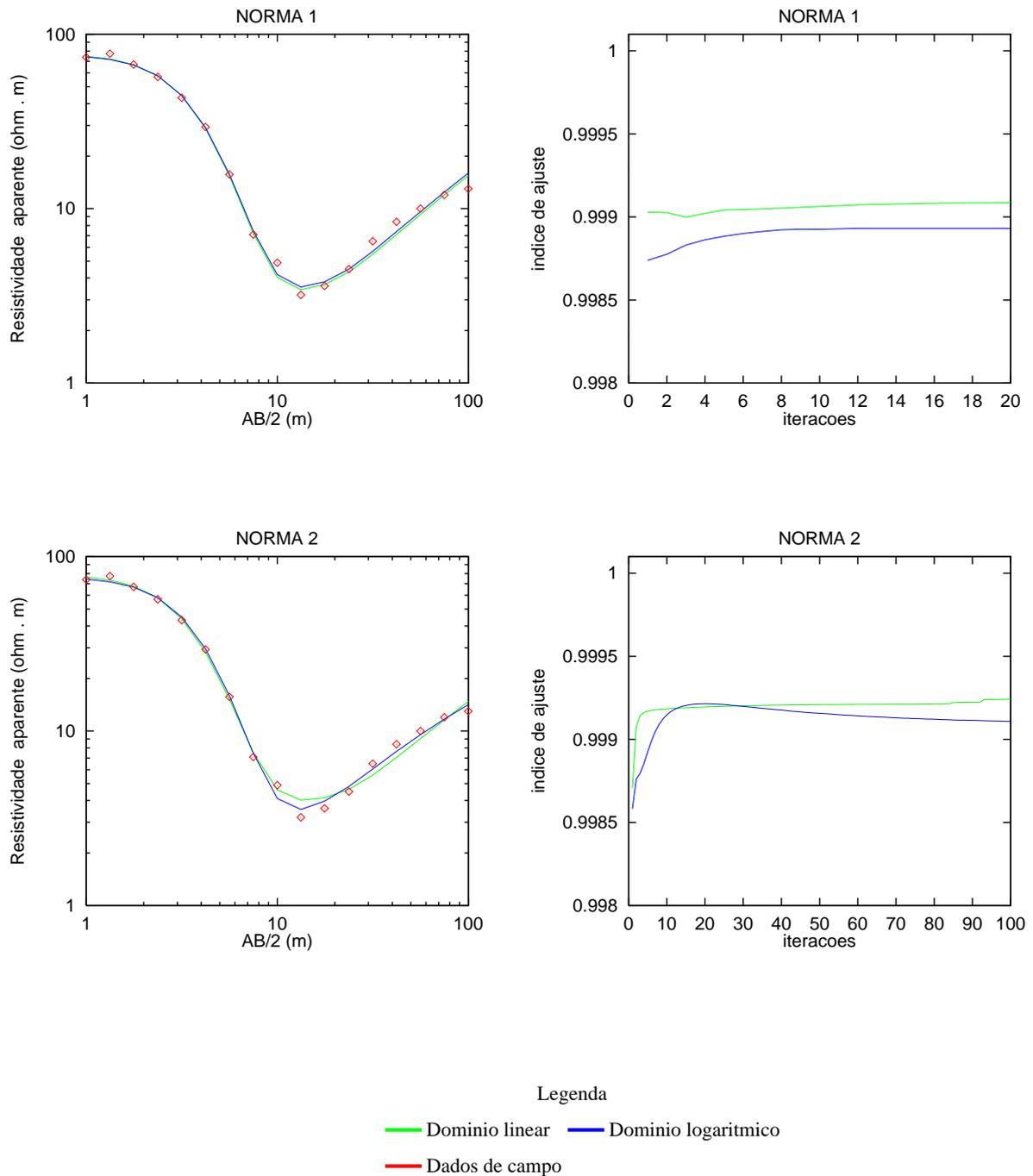


Figura 3.18: Inversão de dado real nos dois domínios feita com norma 1 (acima) e norma 2. Os gráficos da esquerda trazem dados de campo e curvas invertidas nos dois domínios, e os da direita trazem os respectivos desempenhos.

### 3.9 O método aplicado aos dados de campo

Ficou claro na seção anterior que os modelos reais são melhor invertidos no domínio linear, pois é onde os desempenhos de uma forma geral alcançam seus maiores valores. A análise feita de modelos sintéticos revelou a norma 2 como mais apropriada para as inversões, com um grau de ajuste satisfatório para todas as situações propostas. Nessa mesma análise foi estabelecido um critério na utilização do fator de amortecimento, deixando claro que a sua utilização é inevitável quando se tem modelos iniciais ruins. Entretanto, devido ao seu poder em retardar a convergência do método, a utilização de valores elevados só deve ser feita se estritamente necessário.

A partir de agora se iniciará a fase que envolve a aplicação do método de inversão linearizada com norma arbitrária aos dados coletados em campo, seguindo-se de uma posterior interpretação das sondagens. Os modelos iniciais estabelecidos, bem como as interpretações a cerca dos modelos invertidos foram feitos com base na tabela de resistividade dos materiais (3.9) e na configuração geológica pré-definida da região, que é consideravelmente simples. Basicamente é formada por uma camada de arenito seco ou não, de aproximadamente 5 a 10 metros, e em alguns pontos não consolidado, seguida por uma camada de rocha cristalina alterada e pelo embasamento cristalino, fissurado ou não. As oito sondagens elétricas verticais foram invertidas no domínio linear, com normas 1 e 2 e fator de amortecimento que variou entre 1.1 e 2. Entretanto, não se deve esperar que tais parâmetros utilizados aqui sejam universais e aplicáveis a outros modelos de forma a se conseguir os melhores resultados, ao contrário, é importante que se teste a otimização dos resultados, avaliando a eficiência da utilização de outras combinações entre os parâmetros, levando em consideração alguns aspectos do modelo.

A curva relativa a primeira sondagem realizada, bem como todas as outras podem ser vistas no capítulo 1, e os locais onde foram realizadas as SEV's estão indicados na figura (1.4). Uma primeira análise a cerca da primeira sondagem, permitiu que se elaborasse o modelo inicial dos parâmetros, que se encontra na tabela (3.11). É importante elucidar que este, assim como todos os outros modelos iniciais foram estabelecidos em um processo de tentativa e erro, e não se utilizando de métodos outros já conhecidos, que melhoram significativamente a estimativa de tais modelos. Estabelecidos assim, pôde-se garantir que o método trabalhasse sob condições severas. O modelo adotado esta também coerente com a realidade geológica da área. De fato, a julgar pelo resultado da inversão, levando-se em consideração apenas o modelo inicial, poder-se-ia supor a presença de uma zona de embasamento fissurado (portanto uma camada aquífera) a uma profundidade de 15 metros, se estendendo por cerca de 30 metros em subsuperfície. A aplicação do método a esta primeira sondagem, levou a determinação do vetor de parâmetros contido na tabela (3.11). Os parâmetros ajustados com norma 1 tiveram pouca variação em relação ao modelo inicial, e apresentaram

ROCHA	Mistura higroscópica	Saturado em água doce <3 g/l	Saturado em água salgada >3g/l
Argila	$10^3 - 10^5$	10 - 100	1 - 10
Folhelho argiloso	$10^3 - 10^5$	50 - 500	1 - 50
Arenito poroso	$10^5 - 10^6$	30 - 200	1 - 10
Arenito compacto	$10^5 - 10^6$	100 - 1000	5 - 10
Calcário fissurado	$10^4 - 10^6$	100 - 1000	50 - 100
Calcário cristalino compacto	$10^4 - 10^6$	$10^3 - 10^5$	100 - 1000
Rocha ígnea fraturada	3000 - 5000	1000 - 3000	50 - 1000
Rocha ígnea compacta	5000 (adotado)	-	-

Tabela 3.9: Valores típicos de resistividades de algumas rochas. Valarovich e Parkhomenko, (1976)

uma performance final abaixo do valor atingido com norma 2. Por isso, ainda que tenham apresentado alguns valores condizentes com a realidade, foram tomados os parâmetros ajustados com norma 2 como base para as análises. Tais parâmetros confirmam as previsões feitas através do modelo inicial, sobre a existência de uma terceira camada aquífera, porém apontam para uma profundidade e espessura diferentes das previstas. De fato, parece existir naquele lugar uma camada de aproximadamente 3,5 metros de espessura, composta por arenito com algum teor de água em seus poros, seguida por uma camada de 2 metros de espessura composta por arenito poroso saturado em água salobra, ou rochas alteradas do embasamento que talvez tenha adquirido esse grau de salinidade devido a proximidade com o embasamento. A camada posterior, com 74 metros de espessura, a uma profundidade de aproximadamente 5 metros, é o embasamento cristalino fissurado, camada aquífera que de acordo com a resistividade apresentada deve conter um alto teor de sais dissolvidos. A sondagem foi realizada propositadamente junto a um poço de 53 metros de profundidade locado pela C.E.R.B na região. A análise dos dados obtidos do poço, que constam da tabela (3.10), confirma a eficiência do método de inversão na determinação da resistividade e espessura da primeira camada. Entretanto, aponta para uma incorreção no estabelecimento da espessura da segunda camada. Isto significa propor que o topo da camada aquífera se encontre a uma profundidade de 6,5 metros, quando na verdade esta a 11 metros.

A segunda sondagem foi realizada em uma região próxima a primeira, não mais junto ao poço, porém em um alto topográfico, seguindo na direção paralela em relação ao strike da zona fissurada. Os parâmetros invertidos com as duas normas, tiveram um nível de ajuste bastante parecidos, diferindo entretanto nos valores estabelecidos para a resistividade

PROFUNDIDADE (M)	MATERIAL
0 - 2	solo arenoso amarronzado
2 - 11	rocha cristalina alterada
11 - 53	rocha cristalina com frgmentação fina

Tabela 3.10: Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 1

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
MOD. INICIAL	85	10	40	5000	3	10	30
MOD. AJUSTADO N1	81,52	10,05	39,54	5000	3,11	9,98	31,34
MOD. AJUSTADO N2	81,59	3,92	62,90	4999,97	3,43	2,83	73,67

Tabela 3.11: Modelos inicial e ajustado da SEV 1

e espessura da segunda camada, e resistividade da camada aquífera, porém não o suficiente para descaracterizar a existência de tal camada. Pode-se destacar a existência de uma primeira camada composta por arenito bem mais seco com uma espessura em torno dos 5 metros, seguido novamente de uma camada composta pelo embasamento alterado. A camada aquífera esta a uma profundidade de aproximadamente 6.5 metros para a norma 2 e 12 metros para a norma 1, e a sua espessura não foi possível definir, pois extrapolou a profundidade de penetração do método em vista da abertura máxima estabelecida de 354 metros. Sabe-se entretanto que é certamente superior a 80 metros. O seu valor de resistividade invertido para as duas normas revela uma salinidade bastante inferior ao caso anterior, o que pode significar um aquífero com boas condições de aproveitamento.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
MOD. INICIAL	2000	10	250	5	20
MOD. AJUSTADO N1	1935,47	7,51	266,18	4,71	7,67
MOD. AJUSTADO N2	1940,26	1,45	861,80	4,66	1,90

Tabela 3.12: Modelos inicial e ajustado da SEV 2

A SEV de número 3, foi realizada 180 metros a sudoeste da região onde foram feitas as duas primeiras. Apesar de terem sido invertidos parâmetros bastante parecidos para as duas normas, o performance final foi bastante favorável a norma 2. A análise da curva, sugere um modelo de quatro camadas nas quais os parâmetros invertidos parecem apontar para a não existência de uma região de embasamento fissurado. De fato, o que parece existir lá, é um conjunto de três camadas que juntas somam 15 metros, onde há uma gradação entre arenito seco (ou quase), arenito poroso, saturado em água doce, e por fim um arenito saturado e

água salobra. A camada posterior é a rocha sã.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
MOD. INICIAL	50	20	15	5000	1	10	12
MOD. AJUSTADO N1	40,50	20,11	15,58	4999,99	0,91	7,26	10,70
MOD. AJUSTADO N2	279,72	27,48	12,14	4996,41	0,27	4,45	11,07

Tabela 3.13: Modelos inicial e ajustado da SEV 3

A SEV número 4 traz um exemplo de como se pode avaliar equivocadamente uma curva de eletroresistividade. Analisando-a, foi estabelecido um modelo inicial que evidenciava a não existência de uma camada aquífera como pode ser visto na tabela (3.15), tal modelo parecia estar de acordo com o que fora estabelecido pelo contorno da curva. Entretanto, após a inversão, os parâmetros ajustados com norma 2 mostraram que a terceira camada, antes tida como embasamento não fissurado, é na verdade uma camada composta por embasamento fissurado de espessura indefinida, pois novamente ultrapassou a profundidade de penetração do método em função da abertura dos eletrodos de corrente. Pode-se assegurar no entanto que ultrapassa os 80 metros, o que lhe confere um status de ótimo aquífero, visto que sua resistividade possui um valor em torno dos  $900 \Omega \cdot m$ . Com norma 1, os parâmetros invertidos não mereceram credibilidade pois apesar do bom grau de ajuste e da performance elevada, a espessura invertida para a segunda camada extrapola o limite de penetração do método, o que revela que na verdade foi alcançado um mínimo local. O que não parece estar conivente com a realidade geológica da região, é a existência de uma camada superficial com tão baixo valor de resistividade. Parece mesmo se tratar de uma camada de arenito saturada em água salobra, o que não apresentaria a menor correlação com o que se vinha obtendo até então. A segunda camada, tem uma resistividade típica de rocha cristalina alterada. O poço furado no local, revelou a presença de solo argiloso com uma profundidade de 2 metros, o que justifica o registro de tão baixos valores de resistividade para essa camada. Os registros de resistividade e espessura da segunda camada, estão inteiramente de acordo com as características reveladas pelos dados de poço. Quanto a camada aquífera, pode-se notar uma discrepância de apenas 1 metro na profundidade de topo. Em vista disso, pode-se afirmar que esta foi sem dúvida a sondagem cujo processo de inversão obteve os melhores resultados.

Na SEV 5, os parâmetros ajustado com norma 1, registraram um baixo grau de ajuste e um índice de ajuste final menor que aquele registrado para norma 2. Em vista disso, o modelo comentado é novamente aquele ajustado com norma 2, e neste caso, repete-se o erro cometido na determinação do modelo inicial. Novamente a última camada é tomada como embasamento cristalino não fissurado, erro que a inversão trata de redimir, ao estabelecer uma resistividade em torno dos  $650 \Omega \cdot m$  para essa camada. Tal valor, de fato atesta a existência de uma camada de embasamento fissurado e saturado em água salobra a uma

PROFUNDIDADE (M)	MATERIAL
0 - 2	solo argiloso cinza escuro
2 - 4	rocha cristalina alterada
11 - 92	rocha cristalina com frgmentação fina

Tabela 3.14: Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 4

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
MOD. INICIAL	9	30	5000	4,5	80
MOD. AJUSTADO N1	8,97	954,86	4979,91	5,62	869,12
MOD. AJUSTADO N2	8,95	24,42	914,76	4,06	3,87

Tabela 3.15: Modelos inicial e ajustado da SEV 4

profundidade de aproximadamente 9 metros, com uma espessura certamente maior que 80 metros, sobre a qual repousam (e agora sim na ordem esperada) duas outras camadas. A primeira, mais superficial, possui apenas cerca de 0,5 metros de espessura, e é composta por arenito poroso saturado em água doce, e a segunda, com cerca de 9 metros, composta pela rocha cristalina alterada. O poço locado pela C.E.R.B no ponto de sondagem, fornece informações compatíveis com o resultado da inversão em relação ao material que compõe a primeira camada, divergindo entretanto quanto a espessura em cerca de 1,5 metros. O mesmo ocorre em relação a segunda camada onde os dados de resistividade indicam a presença de rochas cristalinas alteradas com uma discrepância na espessura em torno de 5 metros, o que causa uma divergência de 4 metros em relação a profundidade de topo do aquífero.

PROFUNDIDADE (M)	MATERIAL
0 - 2	solo arenoso acinzentado
2 - 5	rocha cristalina alterada, fragmentação média a grossa
5 - 40	rocha cristalina com fragmentação média a grossa

Tabela 3.16: Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 5

A SEV de número 6, foi realizada próximo a anterior, porém afastada do poço, em uma região de alto topográfico, repetindo as condições da SEV 2. É um caso em que os ajustes atingidos para as duas normas estiveram em harmonia tanto no que diz respeito ao grau de ajuste alcançado e às performances finais registradas, quanto ao valor numérico dos parâmetros invertidos. Uma análise da curva obtida, demonstra que parece se tratar de um local composto por quatro camadas distintas. A julgar pelos valores de resistividades obtidos,

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
MOD. INICIAL	100	10	5000	0,75	3,5
MOD. AJUSTADO N1	143,61	8,83	4999,46	0,58	5,66
MOD. AJUSTADO N2	175,07	16,11	658,96	0,48	8,40

Tabela 3.17: Modelos inicial e ajustado da SEV 5

a primeira camada identificada parecia ter quantidades bem maiores de água em seus poros, ou então uma água de bem maior salinidade em relação a segunda camada. Tanto uma como outra possibilidades, parecem ser extremamente improváveis visto que o comum, é um maior acúmulo de água e com um maior índice de salinidade nas camadas inferiores. A situação se agrava ainda mais, com a evidência de que essas duas camadas estão repousando em cima de uma outra, também de arenito, porém saturada em água extremamente salgada. Parece não haver aparentemente uma explicação plausível para o fenômeno, mas há. Momentos antes de ser realizada a sondagem, choveu na região, o que possibilitou uma grande percolação de água nas camadas superficiais, promovendo uma queda na resistividade das mesmas. Portanto, as duas primeiras camadas que estão evidenciadas na inversão, são na verdade uma só, com uma espessura em torno dos 5 metros, e que, se não houvesse chovido, apresentaria uma resistividade em torno dos  $600 \Omega \cdot m$ , mostrando se tratar de um arenito cuja água presente é certamente de natureza capilar e/ou pelicular. Seja como for, essa foi uma sondagem que não mostrou a existência de camadas aquíferas, mas causou alguns problemas na sua interpretação.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
MOD. INICIAL	250	600	20	5000	2	1	60
MOD. AJUSTADO N1	192,17	682,40	9,27	5000,04	0,85	5,00	19,37
MOD. AJUSTADO N2	219,32	968,83	3,44	5000,24	1,22	3,57	7,20

Tabela 3.18: Modelos inicial e ajustado da SEV 6

A SEV 7, foi realizada sem maiores problemas, e apresentou um modelo invertido compatível com o modelo inicial. Em relação ao desempenho das normas, a única discordância registrada ficou por conta do valor da espessura da camada aquífera. O grau de ajuste das curvas e as performances finais foram praticamente iguais. Realizada nas proximidades de Caiçara, próximo a um poço de proximidade estimada em torno dos 70 metros (pelos moradores da região) apresentou uma configuração típica de um modelo de três camadas, onde a segunda se constituía a camada aquífera. De fato, as previsões se confirmaram, e foi invertido um modelo de três camadas, com uma segunda camada aquífera a uma profundidade em torno de 15 metros, e espessura de aproximadamente 130 metros para norma 2 e 85 metros para norma 1, precedida por uma camada de arenito poroso saturada em água doce. Os dados do

poço locado na região, que podem ser vistos na tabela (3.19), demonstram a existência de três e não duas camadas de materiais distintos. Enquanto a inversão detectou a presença de apenas uma camada formada por um solo arenoso, a investigação no poço demonstrou haver duas camadas, onde a segunda é formada por rochas cristalinas alteradas não detectadas pela curva de campo. A camada aquífera foi detectada pelo método de inversão com uma discrepância de 7 metros em relação ao topo.

PROFUNDIDADE (M)	MATERIAL
0 - 3	solo arenoso
3 - 7	rocha cristalina alterada
7 - 70	rocha cristalina com fragmentação fina

Tabela 3.19: Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 7

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
MOD. INICIAL	21	300	5000	15	100
MOD. AJUSTADO N1	20,87	369,58	5000,09	15,88	84,96
MOD. AJUSTADO N2	21,08	410,84	5030,01	15,71	123,74

Tabela 3.20: Modelos inicial e ajustado da SEV 7

A última sondagem a ser realizada, a SEV 8, foi feita sob condições geológicas interessantes. Próxima a um poço situado na região onde corre um riacho: o riacho da fome. A julgar pelo grau de ajuste da curva alcançado para norma 1, não parece sensato utilizar o modelo invertido com tal norma como base para as análises. A curva adquirida, parecia presumir a existência de um modelo de cinco camadas onde certamente a influência da presença do riacho poderia ser vista no valor de resistividade da segunda camada. A primeira, seria composta por arenito com muito pouca água retida, provavelmente de natureza capilar ou pelicular, seguida por uma camada de arenito saturado em água provavelmente infiltrada do riacho. A aproximadamente 4 metros de profundidade definia-se duas camadas, que a julgar pelos valores de resistividades apresentadas, poderiam ser classificadas como aquíferas. Na verdade, provavelmente as duas juntas formam o embasamento cristalino fissurado, A diferença nos valores de resistividade certamente ocorre devido a influência da água doce do riacho logo acima a percolar pelas fendas do embasamento. Esse efeito, tornaria a água armazenada na parte superior das fissuras menos salina, o que a faria apresentar uma resistividade maior do que a inferior. As informações extraídas do poço locado na área mostram a presença de 1 metro de solo arenoso em contraposição aos quase 4 metros obtidos através da inversão. Entretanto a maior discrepância ficou por conta da determinação da espessura da camada aquífera. Os dados do poço revelaram uma camada de embasamento fissurado

com 41 metros de espessura, enquanto que a inversão indicou um valor em torno de 21 metros (neste aspecto em particular, a inversão com norma 1 apresentou valores apreciáveis). A diferença de 21 metros no valor da espessura da camada aquífera é de fato relevante e mostrou ser o resultado mais negativo do processo de inversão das oito sondagens.

PROFUNDIDADE (M)	MATERIAL
0 - 1	solo arenoso
1 - 42	rocha cristalina

Tabela 3.21: Dados de espessura e composição das camadas obtidos a partir do poço perfurado junto a SEV 8

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$
MOD. INICIAL	400	10	40	60	5000	0,5	2,5	40	45
MOD. AJUSTADO N1	512,60	23,33	67,12	155,82	5000,13	0,42	8,49	40,24	2,46
MOD. AJUSTADO N2	696,63	13,78	86,55	19,13	5010,22	0,41	3,13	8,38	12,05

Tabela 3.22: Modelos inicial e ajustado da SEV 8

Nas páginas seguintes, as figuras ilustram o grau de ajuste atingido para cada sondagem, bem como os resultados das inversões e as performances ao longo das iterações.

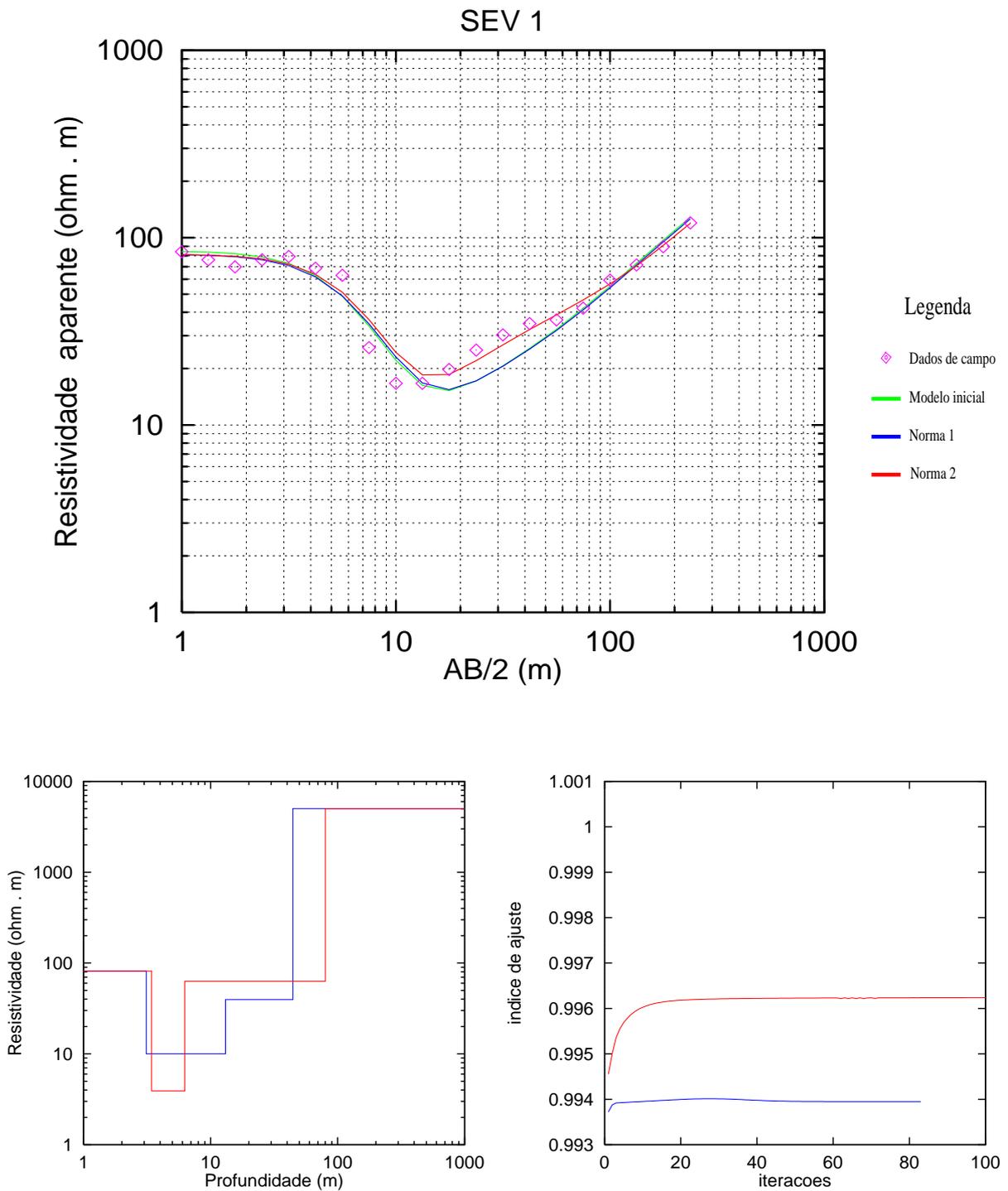


Figura 3.19: Inversão da SEV 1. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

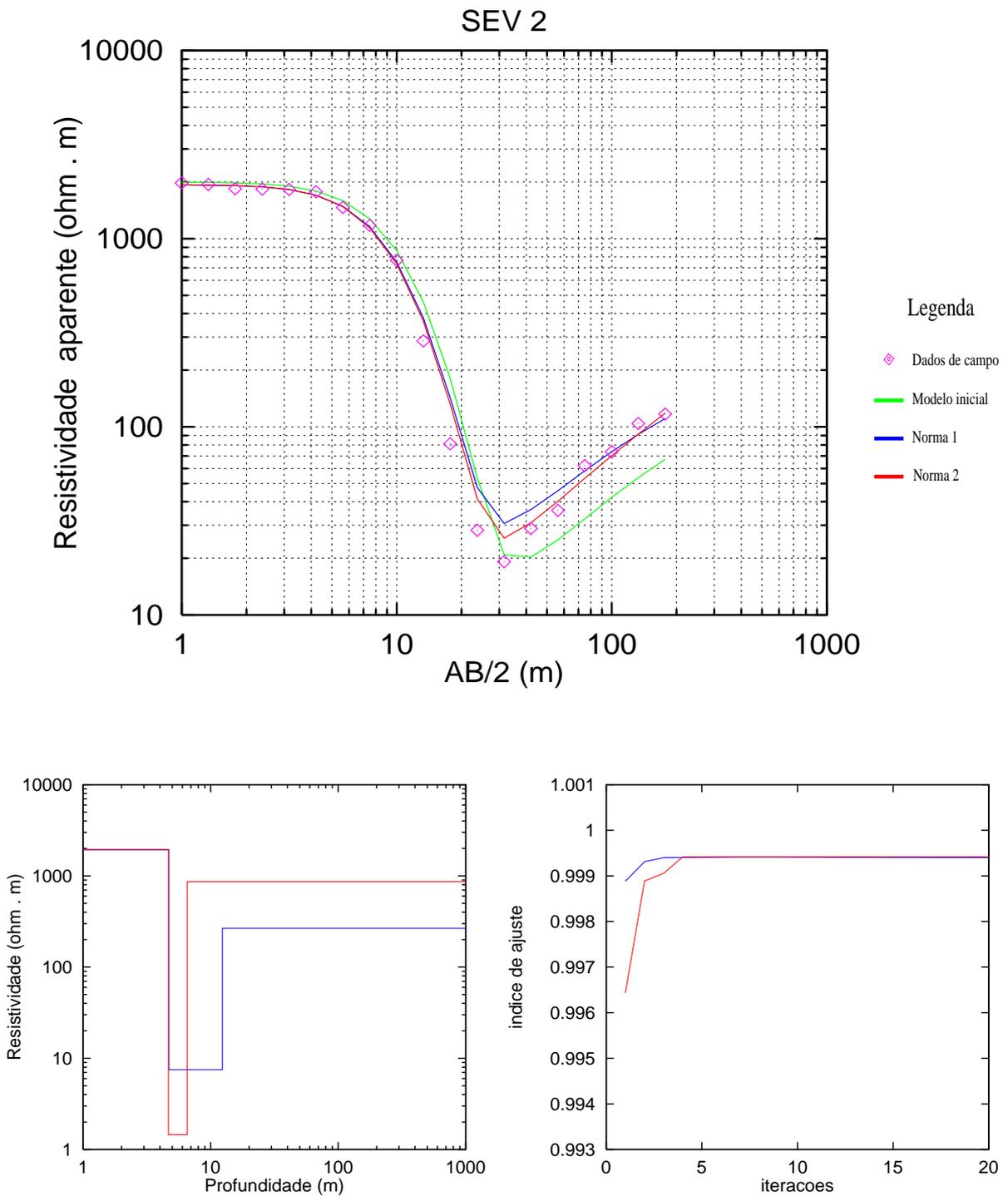


Figura 3.20: Inversão da SEV 2. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

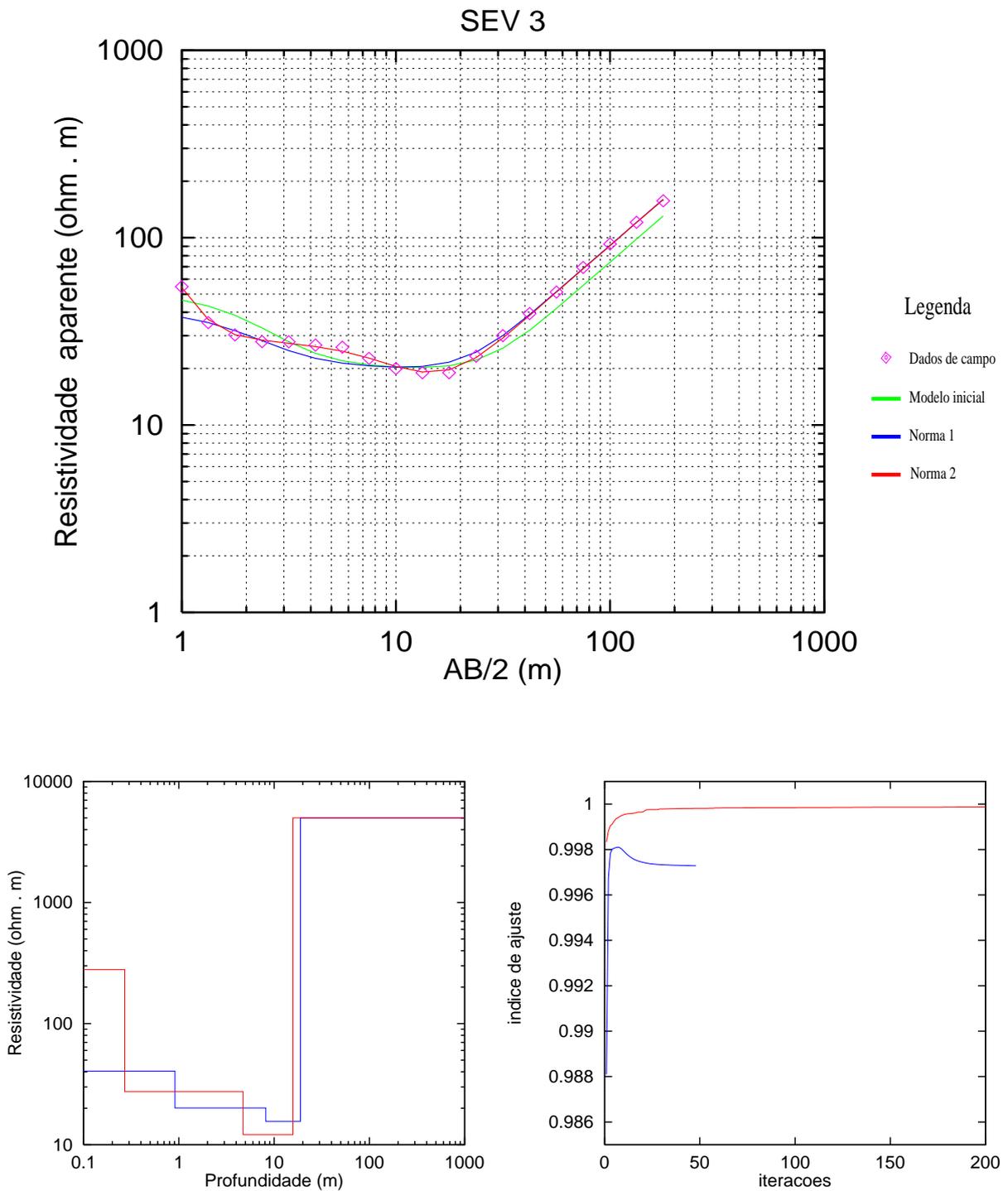


Figura 3.21: Inversão da SEV 3. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

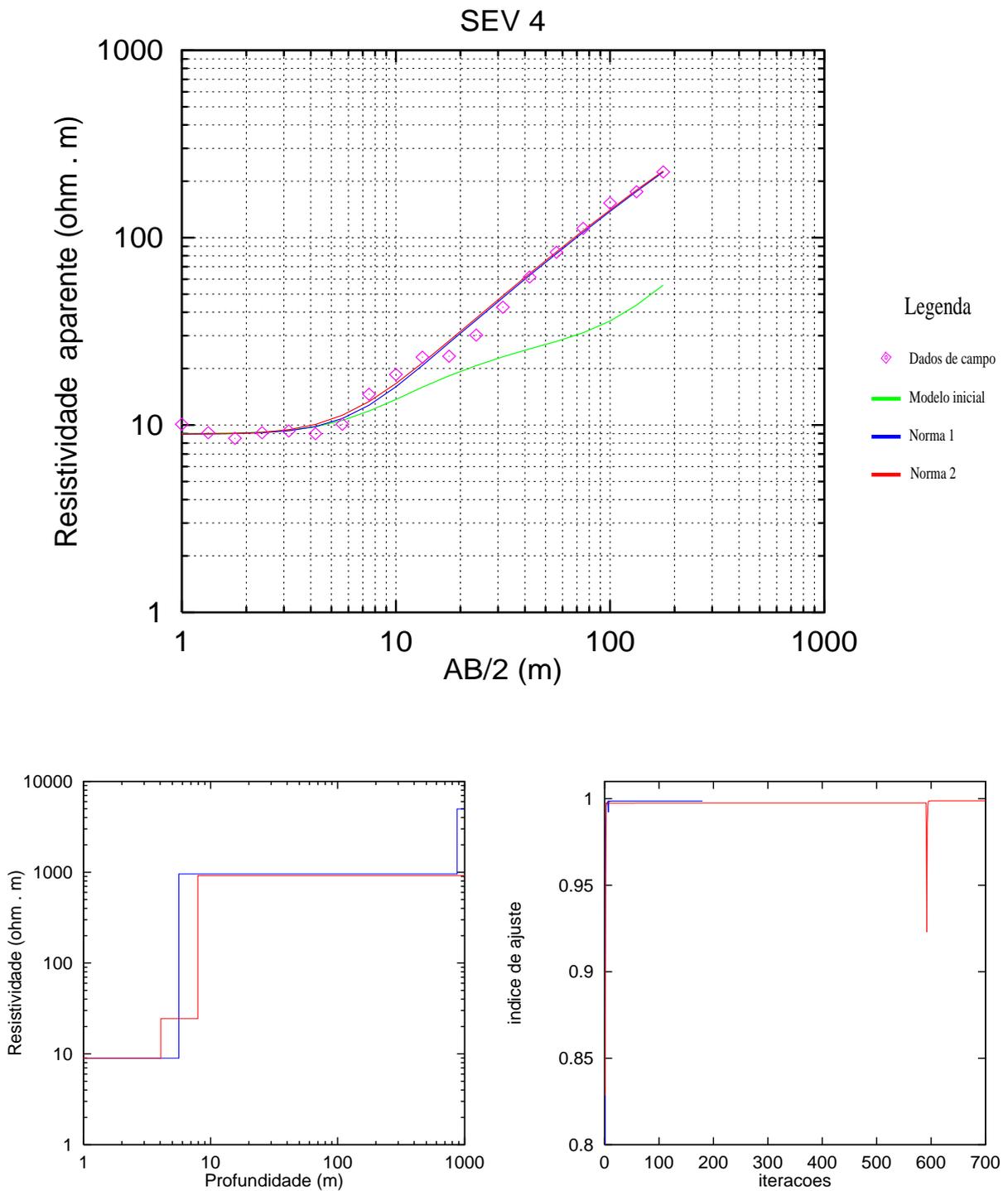


Figura 3.22: Inversão da SEV 4. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

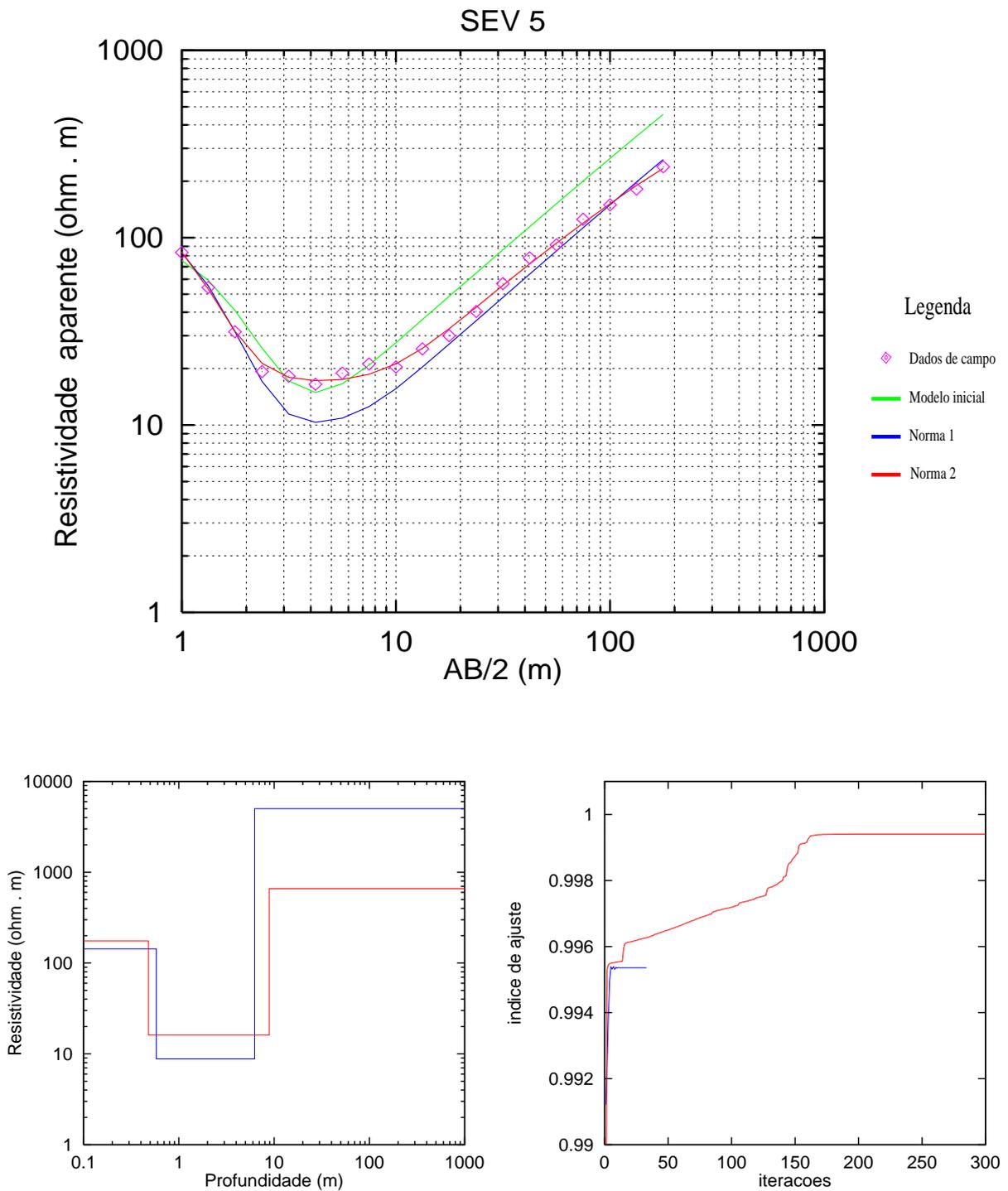


Figura 3.23: Inversão da SEV 5. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

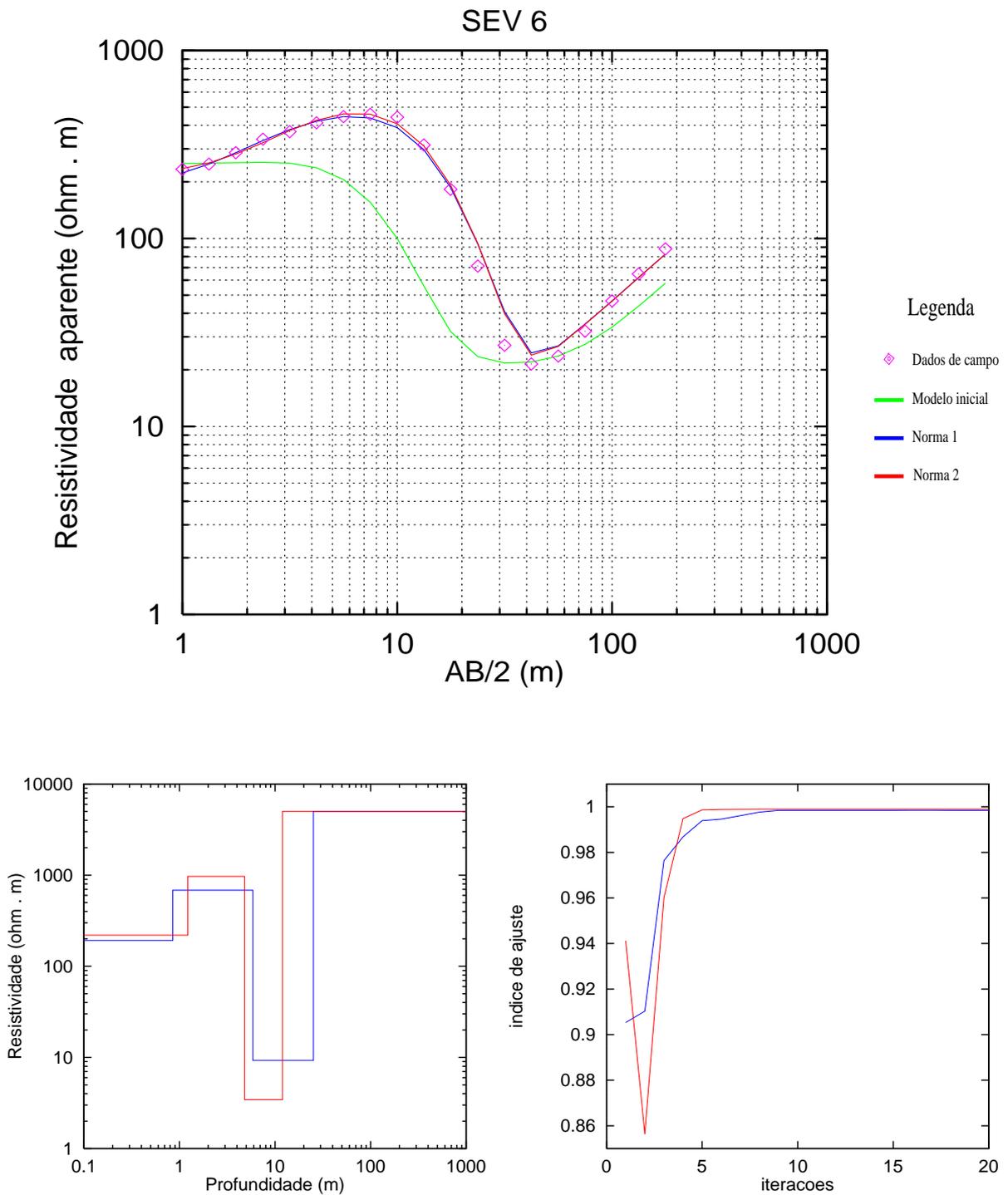


Figura 3.24: Inversão da SEV 6. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

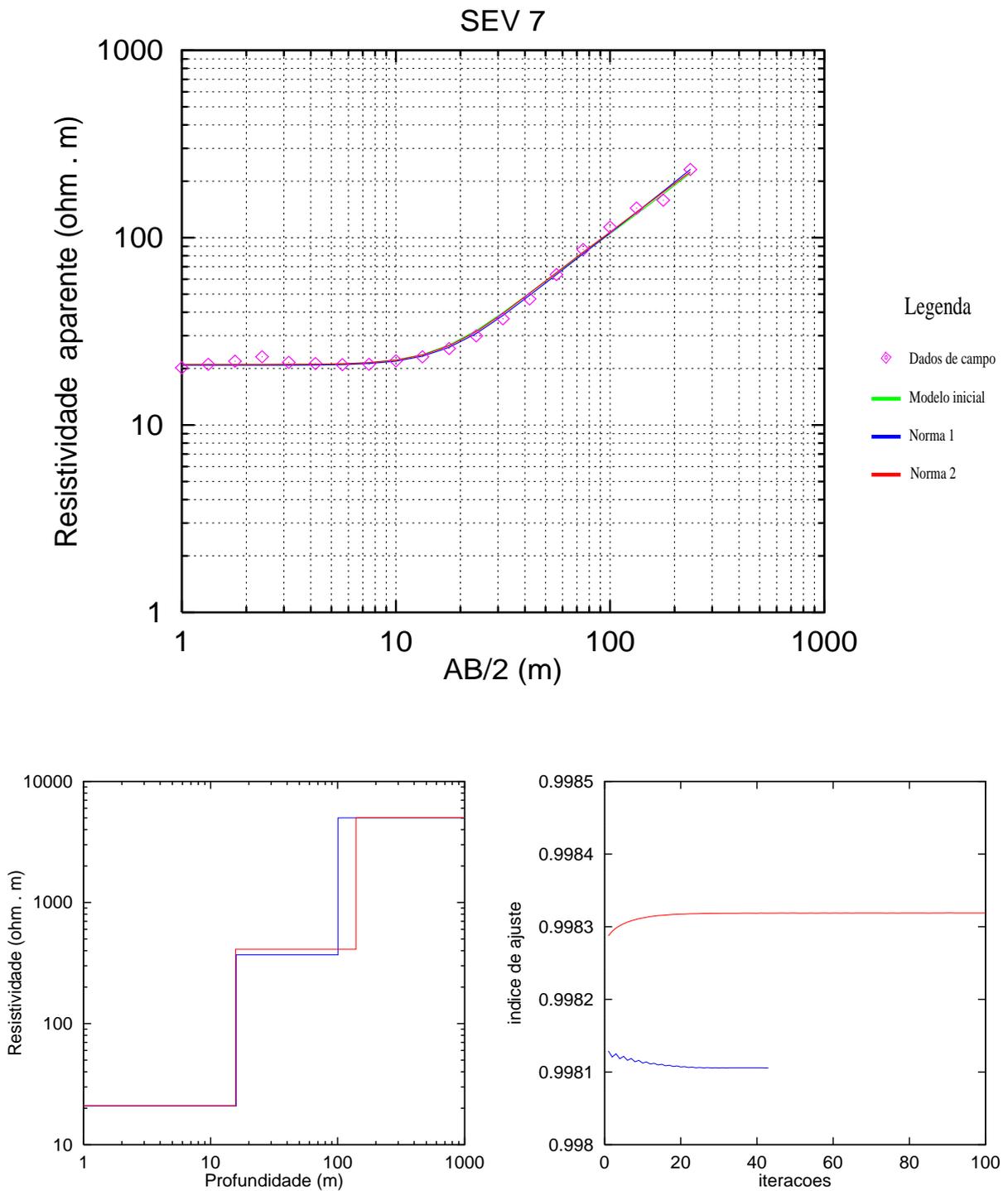


Figura 3.25: Inversão da SEV 7. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

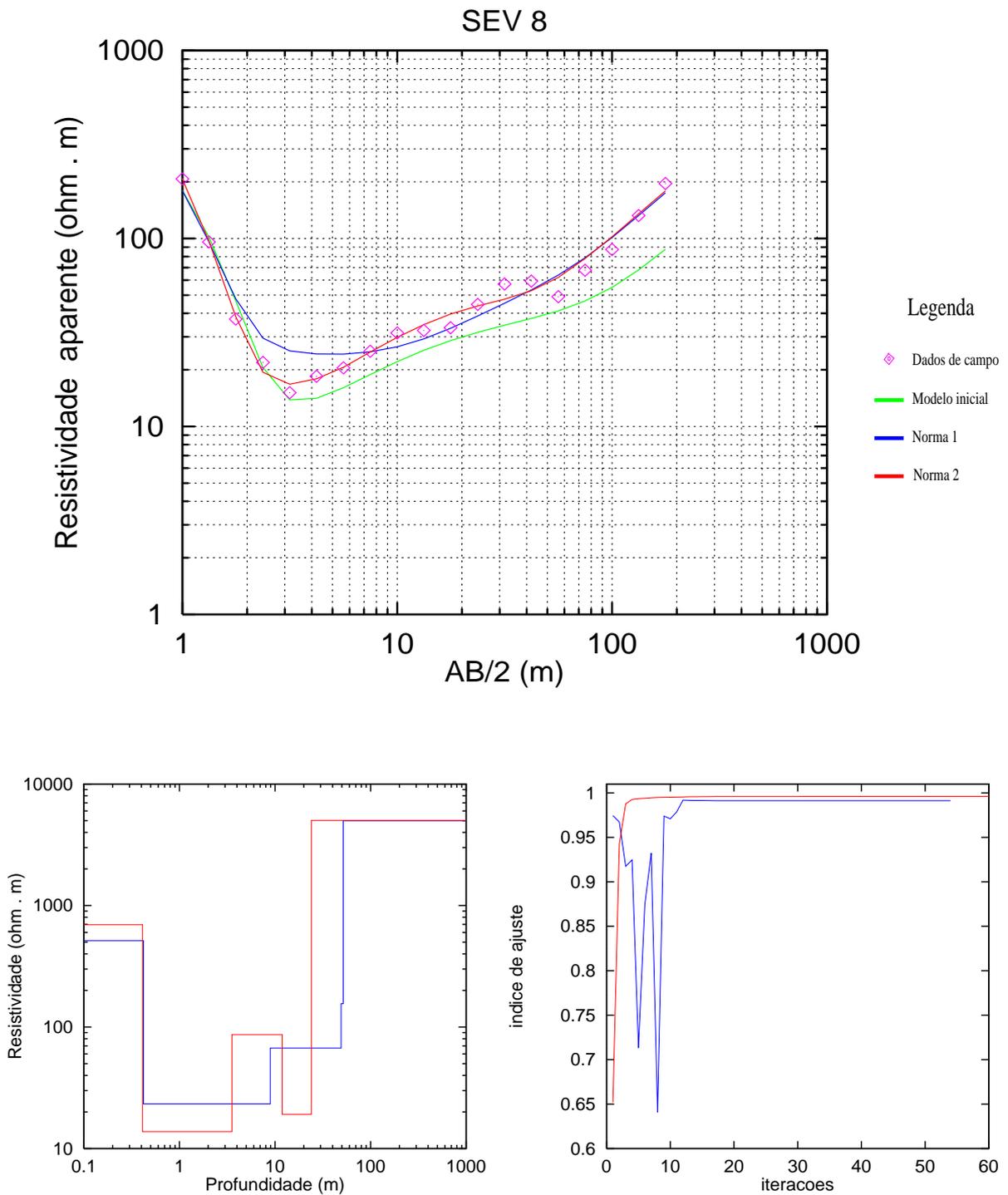


Figura 3.26: Inversão da SEV 8. Acima estão plotados os dados de campo, modelo inicial e modelo ajustado com normas 1 e 2. Abaixo, a esquerda, o modelo invertido, trazendo o número de camadas, com suas respectivas espessuras e resistividades. À direita, os desempenhos para as duas normas.

# CAPÍTULO 4

## ALGORÍTMICO GENÉTICO

### 4.1 Introdução

Desenvolvido por John Holland em 1975, os algoritmos genéticos são métodos que têm por objetivo procurar uma solução ótima para um problema complexo, baseado nos princípios de seleção natural. É basicamente uma aproximação automatizada e inteligente da técnica de tentativa e erro, onde através de algumas fórmulas, regras e arranjos específicos estabelecidos, pode-se chegar a uma solução.

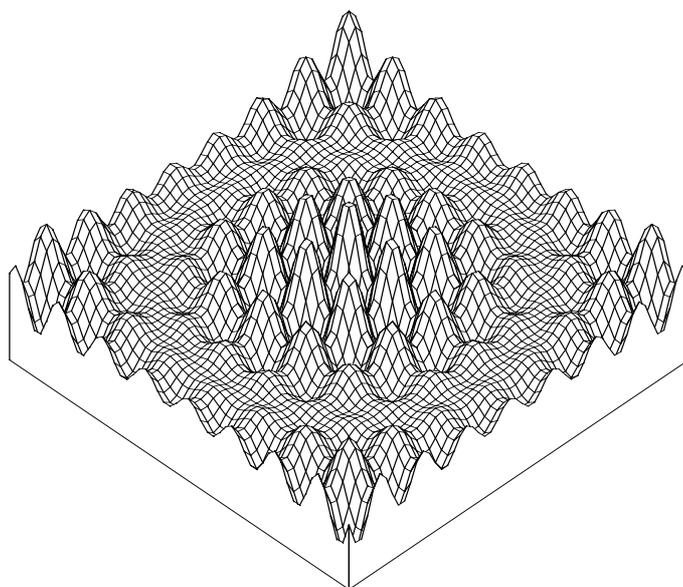


Figura 4.1: Função-objetivo do tipo polimodal, com vários pontos de máximo e mínimos locais.

Os algoritmos genéticos agem sobre um conjunto de modelos gerados inicialmente de forma aleatória, aqui tratados como “população”, de forma a favorecer a criação de novos modelos que teriam um desempenho consideravelmente melhor que o de seus predecessores. O processo de resolução de um dado problema, envolve inicialmente o estabelecimento de um conjunto de parâmetros ou universo de busca, nos limites do qual serão estabelecidas as

populações. Os indivíduos de uma população que não se adaptam ao meio, aqui representado pela função-objetivo, são automaticamente descartados do processo, e apenas os indivíduos mais aptos serão selecionados e competem por uma oportunidade de se reproduzirem, transmitindo algumas de suas características para gerações posteriores. O processo de seleção é realizado de forma probabilística, porém de maneira tal que favoreça os indivíduos de melhor desempenho. Adicionalmente, de vez em quando um “gene” é alterado, produzindo uma mutação, tal como ocorre na evolução natural. O processo de seleção, reprodução e mutação, continua por várias gerações e tende a produzir indivíduos cada vez mais adaptados ao meio (função-objetivo).

Algoritmos genéticos permitem que se resolvam problemas considerados complicados e trabalhosos do ponto de vista computacional. São muito úteis na resolução de problemas que envolvem funções não-lineares como a que se tem em eletorresistividade. Tais funções costumam possuir vários pontos de máximo e mínimo locais que dificulta a determinação dos pontos de máximo ou mínimo global (figura 4.1). Na verdade o que faz da otimização global um problema desafiador, é justamente a existência de tais pontos de máximo ou mínimos locais. As técnicas de inversão que envolvem a utilização de algoritmo genético, sofrem não só com os problemas que afligem outros métodos que buscam a otimização global, como também de problemas que são específicos do processo genético. Pode-se dizer que os mínimos locais atraem as populações como um imã, e não há uma maneira efetiva de se proteger contra isso, mantendo a diversidade. Algumas soluções propostas acabam por modificar a função-objetivo, o que pode resultar na perda total do mínimo global.

## 4.2 Codificação e o problema da otimização

Existem duas etapas primordiais na implementação de um algoritmo genético, que estão diretamente ligadas ao problema de otimização: O processo de codificação dos parâmetros e o estabelecimento da função-objetivo.

O problema de otimização de um vetor de parâmetros, pode ser encarado como uma caixa preta, em que se dispõe do controle dos parâmetros de entrada, e a única informação obtida é um valor numérico estabelecido por uma função, que indica quão bem uma combinação particular de um vetor de parâmetros resolveu o problema de otimização. Em condições mais tradicionais, o objetivo é minimizar (ou maximizar) uma dada função.

Algoritmos genéticos são aplicados na maioria das vezes em problemas não-lineares. Isso implica que não é possível tratar cada parâmetro como uma variável independente que pode ser resolvida isoladamente das outras. Deve ser considerado que os efeitos combinados dos parâmetros maximizam ou minimizam a função estabelecida. A primeira suposição adotada é que as variáveis que representam parâmetros, são colocadas através de cadeias binárias, o

que significa que elas são discretizadas, e o alcance da discretização corresponde a um valor numérico que é potência de 2. Por exemplo, com 10 bits por parâmetro, pode-se obter 1024 valores discretos.

A função-objetivo normalmente é estabelecida como parte da descrição do problema. Por outro lado, no desenvolvimento de tal função pode estar envolvida a elaboração de funções simuladas, que não estejam ligadas diretamente ao problema. Em outros casos, a função poderá representar apenas uma avaliação aproximada ou parcial do problema proposto. Neste trabalho, pretende-se tornar mínima a função constituída pelo somatório dos desvios elevado ao quadrado, o que significa minimizar utilizando-se norma 2. Entretanto, não é esta a função tomada para se fazer as avaliações dos vetores de parâmetros, e sim uma outra que representa a função de avaliação de cada indivíduo da população, escrita da seguinte forma:

$$f(\mathbf{m}) = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^M [d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i)]^2}{\sum_{i=1}^M [d_{obs\ i} - \rho_a(\mathbf{m}, t_i)]^2 + \sum_{i=1}^M [d_{obs\ i} + \rho_a(\mathbf{m}, t_i)]^2} \quad (4.1)$$

onde:  $f(\mathbf{m})$  é a função de avaliação ou função-objetivo,  $\mathbf{m}$  é o vetor de parâmetros que esta sendo avaliado,  $d_{obs\ i}$  representa o dado medido em campo (nesse caso, os valores de resistividade aparente medidos) e  $\rho_a(\mathbf{m}, t_i)$  representa o dado calculado através da função que realiza o modelamento direto.

A intenção aqui é maximizar esta função, ou seja, determinar um vetor de parâmetros que torne maior possível o valor da função, que como se pode constatar, possui 1 como valor máximo. A função-objetivo, na condição de função geratriz de desempenho, possui uma conexão direta com a função que representa o somatório do erro quadrático, isto é, maximizando uma, teremos necessariamente minimizado a outra, haja vista que a única possibilidade de se estabelecer um valor unitário (máximo) para a função de avaliação, seria tornar iguais os valores observados e calculados para cada ponto tomado, e isto significaria tornar mínimo (zero) o valor da função que representa o somatório do erro quadrático.

Dentre os muitos métodos de otimização já desenvolvidos, os algoritmos genéticos são frequentemente descritos como um método de procura global que não usa informação de gradiente, assim, funções que contenham mínimos (ou máximos) locais múltiplos, representam classes de problemas para os quais poderiam ser aplicados. Os AG's de uma forma geral são métodos robustos, porém muito pouco específicos. Existem problemas particulares em que não se recomenda o uso dessa técnica, entretanto, alguns pesquisadores trabalham com algoritmos híbridos que combinam métodos existentes com AG's.

### 4.3 Etapas de desenvolvimento do método

O primeiro passo na implementação do algoritmo genético, é gerar uma população inicial. Cada indivíduo da população será uma cadeia binária de comprimento  $L$  que corresponde ao vetor de parâmetros codificado. Na maioria dos casos, a população inicial é gerada fortuitamente, e após criada, cada cadeia é avaliada, e lhe é estabelecido um valor de aptidão.

O conceito de avaliação e aptidão as vezes são utilizados erroneamente. A função de avaliação ou função-objetivo provê uma medida de desempenho com respeito a um conjunto particular de parâmetros. A função de aptidão transforma aquela medida de desempenho em uma distribuição de oportunidades de seleção. A avaliação de uma cadeia que representa um conjunto de parâmetros, é independente da avaliação de qualquer outra cadeia, porém, a aptidão daquela cadeia será sempre definida com respeito a outros indivíduos da população atual.

A aptidão ou probabilidade de seleção é definida como:

$$P_s(i) = \frac{f(i)}{\sum_{x=1}^m f(x)} \quad (4.2)$$

onde  $m$  é o número de indivíduos da população,  $f(i)$  é a avaliação associada com a cadeia  $i$  e o termo no denominador corresponde ao somatório das funções-objetivo de cada cadeia da população.

É útil destacar que o processo de execução do algoritmo genético, obedece a três fases distintas, que tem início com o estabelecimento da chamada população atual. Em seguida, o processo de seleção é aplicado a população atual, para criar uma população intermediária. A partir daí, são aplicadas a recombinação e a mutação à população intermediária, gerando a população de ninho. O processo que vai desde a população atual até a população de ninho, se constitui em uma geração na execução de um algoritmo genético. Goldberg (1989) se refere a esta implementação básica como um algoritmo genético simples.

Há vários modos de se fazer a seleção. Pode-se considerar por exemplo, uma roleta onde cada indivíduo de uma população seja representado por um espaço que proporcionalmente corresponda a sua aptidão. Girando a roleta repetidamente, os indivíduos vão sendo selecionados probabilisticamente, para fazer parte da população intermediária. Depois que o processo de seleção (que leva a construção da população intermediária) está completo, a recombinação pode acontecer. É o início da construção da população de ninho, a partir da população intermediária. O cruzamento é aplicado a cadeias fortuitamente emparelhadas, com uma probabilidade  $P_c$ . O par de cadeias escolhido se recombina para formar duas cadeias novas que são inseridas na nova população. Considere por exemplo duas cadeias

binárias: 110010 e 001100 que representam possíveis soluções para um problema de otimização. Novos parâmetros são gerados a partir da recombinação das duas cadeias genitoras. Considerando-se ainda o exemplo anterior, e admitindo-se um único ponto de recombinação fortuitamente escolhido, teremos:

$$11 \mid 0010$$

$$00 \mid 1100$$

produzindo na próxima descendência:

$$111100$$

e

$$000010$$

Depois da recombinação, pode-se aplicar um operador de mutação para que haja uma alteração em um determinado "bit" de uma cadeia, com uma probabilidade  $P_m$ . Tipicamente, a taxa de mutação é aplicada com menos de 1% de probabilidade. Depois que o processo de seleção, recombinação e mutação está completo, a nova população pode ser avaliada. Tal processo, forma uma geração na execução de um algoritmo genético.

#### 4.4 Como os AG's trabalham

John Holland (1975) conseguiu explicar como o algoritmo genético pode ser considerado um método de procura robusto e eficiente no processo de otimização. Começamos por considerar um espaço tridimensional simples. Imagine que tenhamos um conjunto de parâmetros a ser codificado, nos quais cada parâmetro possua três "bits" por cadeia. Isso pode ser representado por um cubo simples com a cadeia 000 na origem (figura 4.2). Os cantos do cubo são numerados de forma tal que nos cantos adjacentes sejam colocadas cadeias que diferem entre si por exatamente 1 "bit". Na figura, o plano dianteiro do cubo contém todos os pontos que começam com zero. Se o símbolo \* é usado, então este plano também pode ser representado pela cadeia especial 0 \* \*. Cadeias que contêm \* são chamadas esquemas. Formalmente, esquema é um padrão de similaridade que descreve um subconjunto de cadeias com semelhanças em algumas posições. Cada esquema corresponde a um hiperplano no espaço de procura. A ordem do esquema se refere ao número de valores numéricos (0 ou 1) que aparecem em sua formação. Assim, 1 \* \* tem ordem 1, enquanto que 1 \* \* 1 \* \* \* \* \* 0 tem ordem 3.

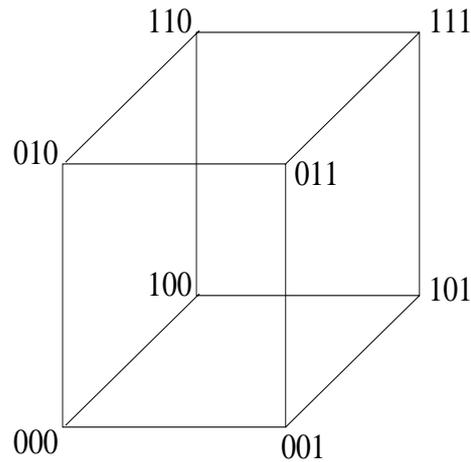


Figura 4.2: Hipercubo formado por hiperplanos com esquemas de ordem 1. Como pode ser observado, o primeiro plano é formado pelo esquema 0 \* \*.

Toda codificação binária, é uma cadeia que corresponde a um canto no hipercubo, e por sua vez, é um componente dos  $2^L - 1$  hiperplanos possíveis, onde  $L$  é o comprimento da cadeia (o esquema em que todos os "bits" são \*, representa o próprio espaço de procura, e também pode ser considerado um hiperplano).

A teoria sugere que pelo processo de reprodução e recombinação, aumentem ou diminuam o número de cadeias representantes de um determinado esquema em função da aptidão relativa das cadeias que fazem partes desses esquemas. Devido a características dos AG's em operar sobre populações de cadeias, é possível localizar a representação proporcional de um único esquema, e indicar se o número de cadeias relativas a ele aumentará ou diminuirá com o passar do tempo, quando o operador de seleção é combinado ao de cruzamento para produzir uma nova descendência de cadeias, ou seja, uma nova população.

## 4.5 Como o cruzamento afeta os esquemas

Um esquema é destruído por um processo de cruzamento, quando as cadeias ou esquemas produzidos não fazem mais parte do esquema genitor. Os esquemas de ordem 1 não são afetados pelo cruzamento, uma vez que o único "bit" existente sempre é herdado por um dos elementos descendentes. Já os esquemas de ordem maior ou igual a dois, podem ser afetados pelo cruzamento. Além disso, não são afetados necessariamente todos os esquemas da mesma ordem com a mesma probabilidade. Consideremos por exemplo o cruzamento realizado em apenas um ponto, sobre dois esquemas diferentes, de ordem dois, com doze "bits" cada.

1 1 \* \* \* \* \* \* \* \* \* \*      e      1 \* \* \* \* \* \* \* \* \* \* 1

A probabilidade dos "bits" serem separados no primeiro esquema durante o cruzamento feito em um ponto, é de  $\frac{1}{L-1}$ , visto que existem  $L - 1$  pontos de cruzamento em uma cadeia de comprimento  $L$ . A probabilidade de que os "bits" do segundo esquema sejam rompidos no processo de cruzamento é  $\frac{(L-1)}{(L-1)}$ , ou seja 1, já que  $L - 1$  pontos de cruzamento separam os elementos do esquema. Tal experiência nos conduz a conclusão de que as posições dos "bits" nos esquemas, são de fundamental importância na determinação da probabilidade de que esses "bits" permaneçam juntos após o cruzamento.

O conceito de comprimento definido de um esquema, esta baseado na distância entre o primeiro e o último "bit" do esquema, com valor 0 ou 1. Seja  $I_x$  o número situado mais a direita do esquema, e  $I_y$  o número mais a esquerda. O comprimento definido desse esquema será:  $I_x - I_y$ . Por exemplo, o comprimento definido do esquema  $****1**0**10**$  é  $12 - 5 = 7$ . O comprimento definido, que pode ser representado por  $\Delta(H)$ , é uma medida direta do grau de possibilidade do cruzamento afetar o esquema. Se for utilizado o cruzamento em apenas um ponto, então  $\frac{\Delta(H)}{L-1}$ , também dará uma medida direta da probabilidade de influência do cruzamento sobre o esquema.

## 4.6 O teorema fundamental dos AG's

O teorema fundamental dos AG's, ou teorema do esquema, desenvolvido por Holland (1975) procura determinar o número de cadeias representantes de um determinado esquema em uma próxima geração, em função da influência dos operadores de seleção, cruzamento e mutação. Supondo-se que a um dado tempo  $t$  existam  $m$  exemplos de um esquema particular  $H$  contido na população  $A(t)$ , com  $n$  elementos, onde  $m = m(H, t)$ , e relembrando que a probabilidade de seleção de uma determinada cadeia é dada por  $p_s(i) = \frac{f(i)}{\sum_{x=1}^n f(x)}$ , teremos:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) n \frac{f(H, t)}{\sum_{x=1}^n f(x)} \quad (4.3)$$

onde  $f(H, t)$  é o valor médio das avaliações das cadeias representadas pelo esquema  $H$  no tempo  $t$ . E  $m(H, t+1)$  é o número de cadeias representantes do esquema  $H$  na geração  $t+1$ . A avaliação média de toda população é  $\bar{f} = \frac{\sum_{x=1}^n f(x)}{n}$ . Pode-se então obter a equação de crescimento de um determinado esquema durante a seleção:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) \frac{f(H, t)}{\bar{f}} \quad (4.4)$$

No cálculo de  $m(H, t+1)$ , deve-se considerar também os efeitos do cruzamento sobre a população intermediária. Considera-se que o cruzamento é probabilisticamente aplicado

sobre uma porção da população. Para a parte da população que não sofre cruzamento, a representação devido a seleção, expressa na equação (4.4), permanecerá inalterada. Se o cruzamento for executado com uma probabilidade  $P_c$ , então a probabilidade de sobrevivência de um esquema (ver seção anterior) é dada pela expressão:

$$p_{sobr} \geq 1 - p_c \frac{\Delta(H)}{L - 1} \quad (4.5)$$

Levando-se em consideração agora não só os efeitos do cruzamento, mas também o da seleção, tem-se a seguinte expressão:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H, t)}{\bar{f}} \left[ 1 - p_c \frac{\Delta(H)}{L - 1} \right] \quad (4.6)$$

A análise dessa equação leva-nos a concluir que esquemas com avaliações acima da média, aqui representadas pelo termo  $f(H, t)$ , e pequenos comprimentos definidos,  $\Delta(H)$  serão amostrados em taxas crescentes exponencialmente.

Finalmente, pode-se analisar os efeitos da mutação, uma alteração aleatória de uma única posição da cadeia, que ocorre com uma probabilidade  $P_m$ . Definindo  $o(H)$  como a ordem de um determinado esquema  $H$ , pode-se afirmar que para tal esquema sobreviver à mutação, é preciso que todas as suas  $o(H)$  posições definidas (0 ou 1) sejam preservadas. Observando-se que a probabilidade de sobrevivência à mutação de um único "bit" é  $(1 - P_m)$ , pode-se expressar a probabilidade de sobrevivência à mutação de todos os seus  $o(H)$  "bits" através da expressão  $(1 - P_m)^{o(H)}$ . Levando-se em consideração que  $P_m$  é um valor muito pequeno ( $P_m \ll 1$ ), pode-se escrever a probabilidade de sobrevivência à mutação como  $(1 - o(H) P_m)$ . Dessa forma, o efeito combinado dos três operadores genéticos sobre um esquema em uma próxima geração é o seguinte:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H, t)}{\bar{f}} \left[ 1 - p_c \frac{\Delta(H)}{L - 1} \right] [1 - o(H) p_m] \quad (4.7)$$

A expressão acima, é a equação que rege o teorema fundamental dos algoritmos genéticos. Uma última análise nos leva a concluir que além do pequeno comprimento definido,  $\Delta(H)$ , e das altas avaliações,  $f(H, t)$ , um esquema também deverá ter uma baixa ordem,  $o(H)$ , se quiser garantir a sua hegemonia ao longo das gerações.

## 4.7 Cruzamento, mutação e o problema da convergência prematura

Ficou claro a partir da seção anterior, que o teorema fundamental dos AG's deposita uma maior ênfase no papel do cruzamento e mutação na preservação dos esquemas. Para maximizar tal preservação após a realização da etapa de seleção, é preciso que as probabilidades de cruzamento e mutação sejam minimizadas. Isso sugere que a mutação não devesse ocorrer. O motivo pelo qual se utiliza uma certa probabilidade de mutação aplicada a população, é prevenir a perda permanente de uma seqüência particular de alelos que poderia levar a determinação do mínimo global. A questão é que se em uma determinada população existir uma cadeia cuja avaliação é bastante alta, a tendência natural é que as características genéticas de tal cadeia sejam assimiladas cada vez mais intensamente nas populações posteriores, conduzindo a uma convergência das cadeias a um único ponto que muitas vezes não é o mínimo global. Este tipo de problema é muito frequente quando se está trabalhando com uma população relativamente pequena. Sem o operador de mutação, não há nenhuma possibilidade de reintroduzir a informação genética perdida. Mesmo nos casos em que a função-objetivo tem característica não-estacionária, e a aptidão varia com o passar do tempo (que é certamente o caso em sistemas biológicos reais), é preciso que se garanta a continuidade da diversidade genética. A mutação então age como um operador de reintegração, reintroduzindo informações genéticas perdidas, o que permite que sejam novamente testadas. Este conceito particular de mutação, ignora o seu potencial como mecanismo destruidor de esquemas. Na verdade, do ponto de vista imposto pelo teorema fundamental, a mutação é um mal necessário.

Outro problema relacionado com a convergência prematura, é a necessidade de se introduzir um mecanismo de cálculo de aptidão diferenciado, em função das várias gerações avaliadas. Como a avaliação das cadeias em cada população aumenta com as gerações, as discrepâncias nos valores das aptidões diminui, isto é, a tendência é que as cadeias fiquem cada vez mais parecidas no que diz respeito as suas eficiências em relação a função-objetivo. Isso faz com que a prática da seleção baseada nos valores de aptidão fique seriamente comprometida. Este problema pode ser resolvido parcialmente utilizando-se uma espécie de escala de aptidão. Isso pode ser feito através da adoção do conceito de expansão e contração da função-objetivo, com a utilização do parâmetro temperatura, extraído do "Simulated annealing", outro método randômico de otimização. No caso de temperaturas muito pequenas, pequenas diferenças nos valores da função-objetivo serão enfatizadas no momento da seleção. Assim, no início do processo utiliza-se altas temperaturas, de forma que os modelos com pequenas diferenças no valor da função-objetivo, tenham a mesma chance de serem selecionados. A medida em que se avança nas gerações, a temperatura diminui até a chamada temperatura crítica, desse modo, pequenas diferenças são exageradas e torna-se mais fácil discriminar os parâmetros do modelo mais adequado.

Na elaboração desse trabalho, os cuidados tomados para se evitar a convergência indesejável resumiram-se a uma pesquisa a respeito da escolha apropriada do tamanho da população, e da probabilidade de mutação, que segundo Goldberg e Segrest (1987), são fatores que podem determinar o êxito no alcance do mínimo global.

## 4.8 Testes com dado sintético

A etapa de testes do algoritmo genético utilizando dado sintético foi realizada para determinar a eficácia do método na inversão de dados de eletrorresistividade, pois a adoção de um modelo cujos parâmetros sejam conhecidos nos permite estabelecer a margem de erro obtida no processo de inversão. Aqui, adotou-se novamente o modelo já utilizado em testes com a inversão linearizada, que pode ser visto na tabela (3.1). O objetivo agora é testar os resultados da inversão ao se fazer variar o número de indivíduos da população e a probabilidade de mutação, pois esses, são parâmetros que segundo Goldberg e Segrest (1987), quando bem empregados, podem garantir a obtenção do mínimo global. Foram tomadas populações de 5 e 50 indivíduos e probabilidades de mutação de 0,2 e 0,02. O universo de procura dos sete parâmetros envolvidos, foi estabelecido através de uma interpretação inicial do modelo sintético. Vale ressaltar que a própria configuração das curvas de eletrorresistividade faz com que exista uma maior facilidade em se estabelecer os parâmetros das camadas superiores, que portanto, possuem um universo de procura mais limitado em relação à última camada. Abaixo encontra-se uma tabela com os parâmetros ajustados através do algoritmo genético.

	Pop=5, Pm=0,02	Pop=5, Pm=0,2	Pop=50, Pm=0,02	Pop=50, Pm=0,2
$\rho_1$	999,9	1068,0	996,7	997,7
$\rho_2$	10,3	19,5	11,4	8,7
$\rho_3$	298,4	109,2	280,2	294,5
$\rho_4$	3542,1	3863,7	5362,6	3362,6
$h_1$	5,1	4,8	5,0	5,0
$h_2$	5,7	8,1	6,2	4,7
$h_3$	53,9	33,8	61,2	57,9

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros do modelo sintético, ajustados com algoritmo genético

Analisando-se a figura (4.3), pode-se concluir que as curvas ajustadas de uma forma geral concordam com o modelo sintético, exceção feita à curva invertida com  $Pop=5$ ,  $Pm=0,2$ , que não obteve um bom ajuste dos pontos iniciais. O modelo foi melhor invertido quando se utilizou  $Pop=5$ ,  $Pm=0,02$ . Os desempenhos médios, como era de se esperar, mostraram um padrão menos oscilante quando se utilizou  $Pm=0,02$ , comprovando que a mutação de

fato afeta a distribuição dos indivíduos na população, podendo eventualmente afastá-los de uma região de mínimo local. No entanto, pode-se concluir também que o tamanho da população afeta o comportamento do desempenho médio, fazendo a curva oscilar mais, quando se tem uma população menor. Os desempenhos dos melhores indivíduos atingiram os valores máximos, com exceção novamente feita a inversão com  $Pop=5$ ,  $Pm=0,2$ . Uma análise da figura (4.4) inclusive, só vem a comprovar o pior desempenho dentre os testados, para a inversão feita com tais parâmetros. As outras inversões, atingiram um grau de ajuste semelhante entre si, com uma pequena vantagem para a inversão realizada com  $Pop=5$ ,  $Pm=0,02$ . Isso fez desses parâmetros os escolhidos para a inversão dos dados de campo.

Para demonstrar o poder de convergência do método sobre o conjunto de indivíduos da população, escolheu-se o modelo invertido com  $Pop=50$ ,  $Pm=0,02$ . As figuras (4.5), (4.6) e (4.7) referentes a esse modelo, mostram que para a primeira camada pode-se notar claramente uma convergência dos indivíduos em torno de um par (espessura, resistividade) comum. Já na vigésima geração, há uma total convergência dos pares. O resultado já era de se esperar, pois para essa camada o universo de procura pôde ser bastante limitado.

Os parâmetros da segunda camada não obtiveram um grau de ajuste tão favorável, o que pode ser compreendido em se observando que o universo de procura estabelecido neste caso foi bem mais largo, o que naturalmente proporciona um maior grau de dificuldade no ajuste. Novamente constata-se um processo de convergência dos pares a um ponto comum, embora neste caso não se verificou uma convergência tão homogênea.

O grau de ajuste para a resistividade da terceira camada foi o pior dentre todos. Na sequência de evolução dos indivíduos ao longo das gerações, pode-se perceber que a convergência não se deu de forma tão acentuada quanto das vezes anteriores. Tal fenômeno ocorreu provavelmente devido ao estabelecimento de um universo de procura mais vasto para essa camada.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Min.	900	5	100	3000	4	4	30
Max.	1100	20	300	6000	6	15	70

Tabela 4.2: Universo de procura estabelecido para a inversão do modelo sintético.

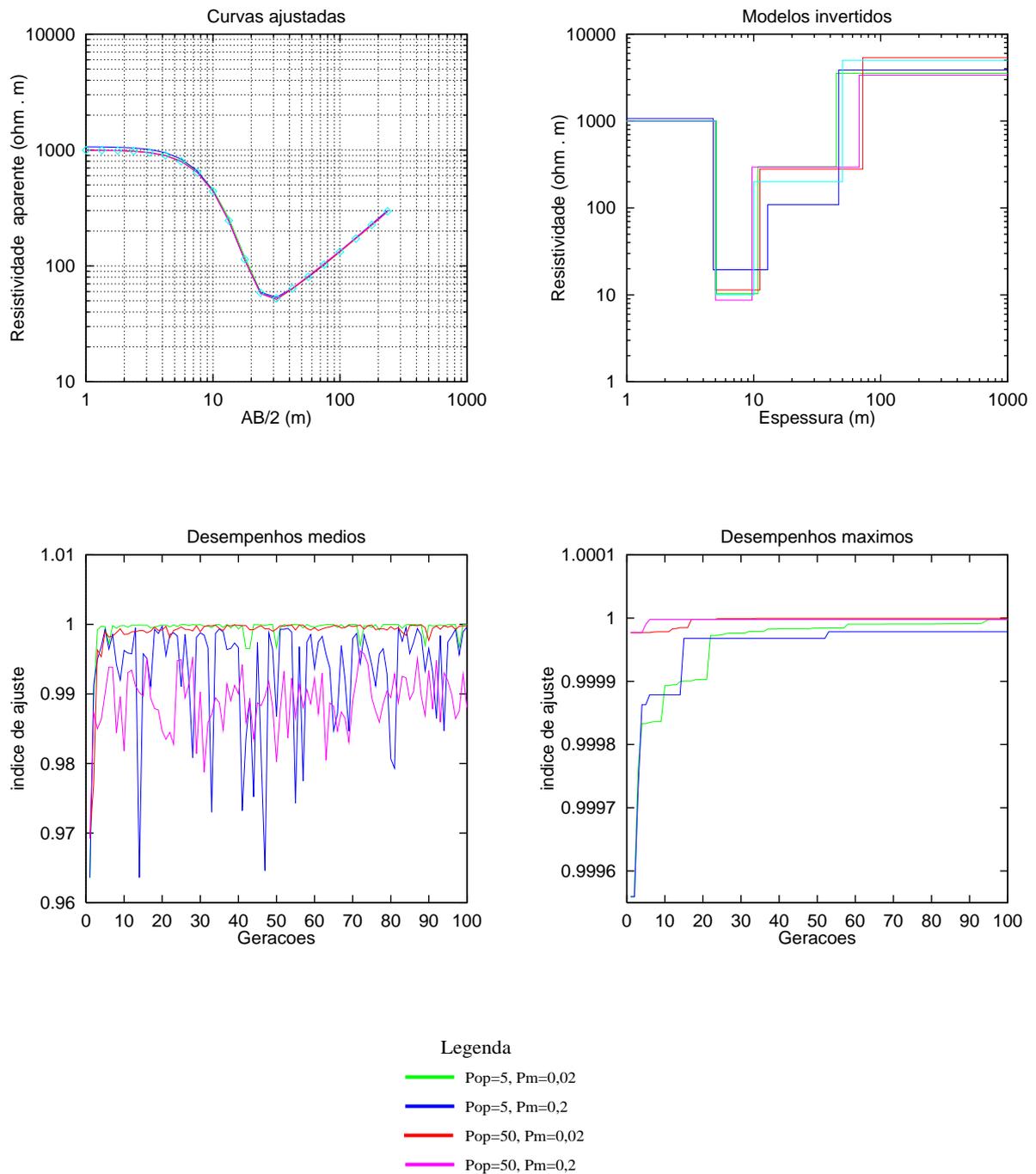


Figura 4.3: Resultados das inversões com diferentes populações e probabilidades de mutação. Acima à esquerda, estão as curvas ajustadas, à direita, os modelos invertidos, abaixo, à esquerda os desempenhos médios, à direita os desempenhos máximos. Os traços em ciano nas curvas superiores correspondem ao modelo sintético

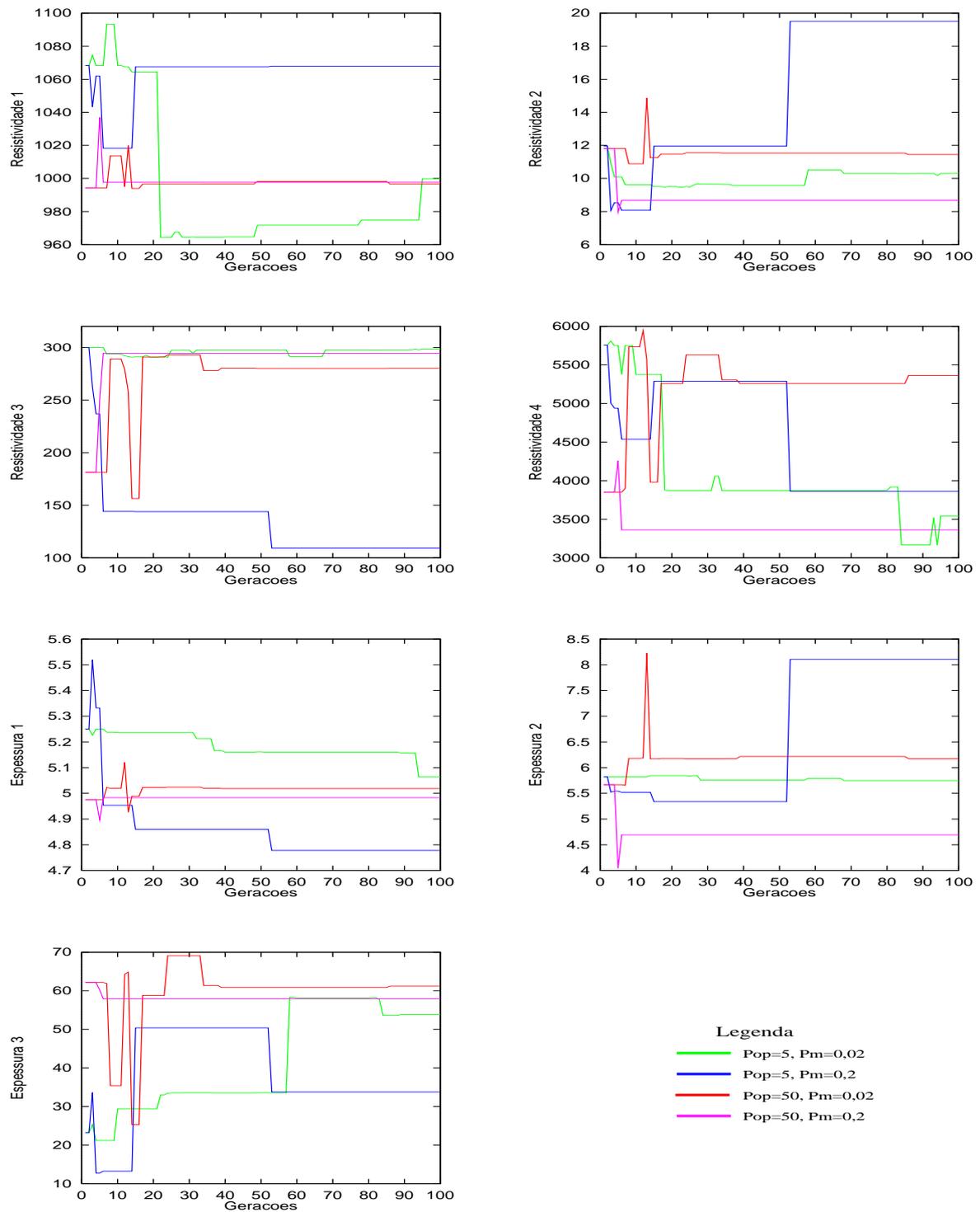


Figura 4.4: Comportamento dos parâmetros invertidos, durante as gerações.

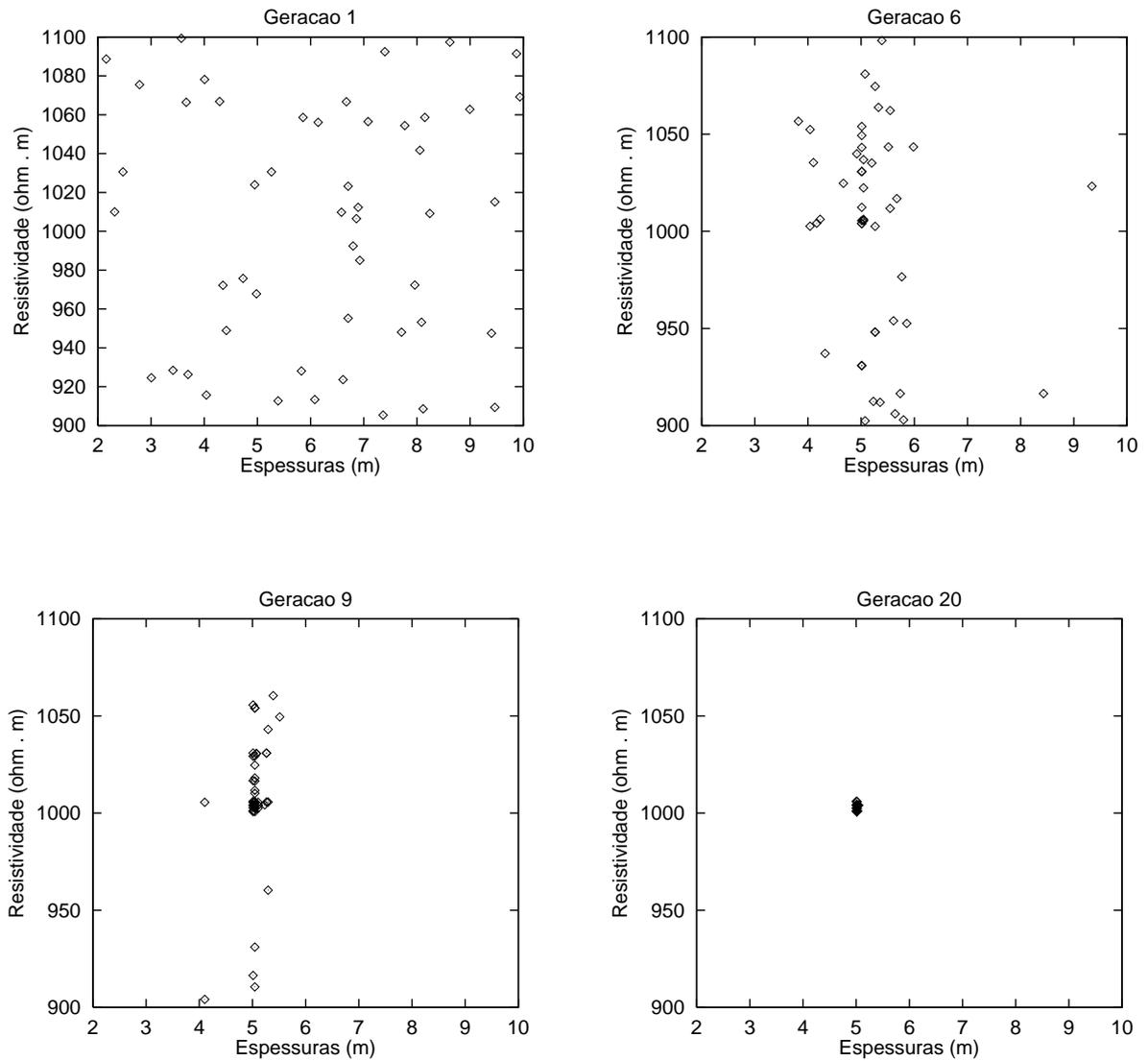


Figura 4.5: Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da primeira camada do modelo sintético durante as gerações. Cada ponto ou par (espessura,resistividade) é um indivíduo da população. O modelo foi invertido com  $Pop=50$ ,  $Pm=0.02$ .

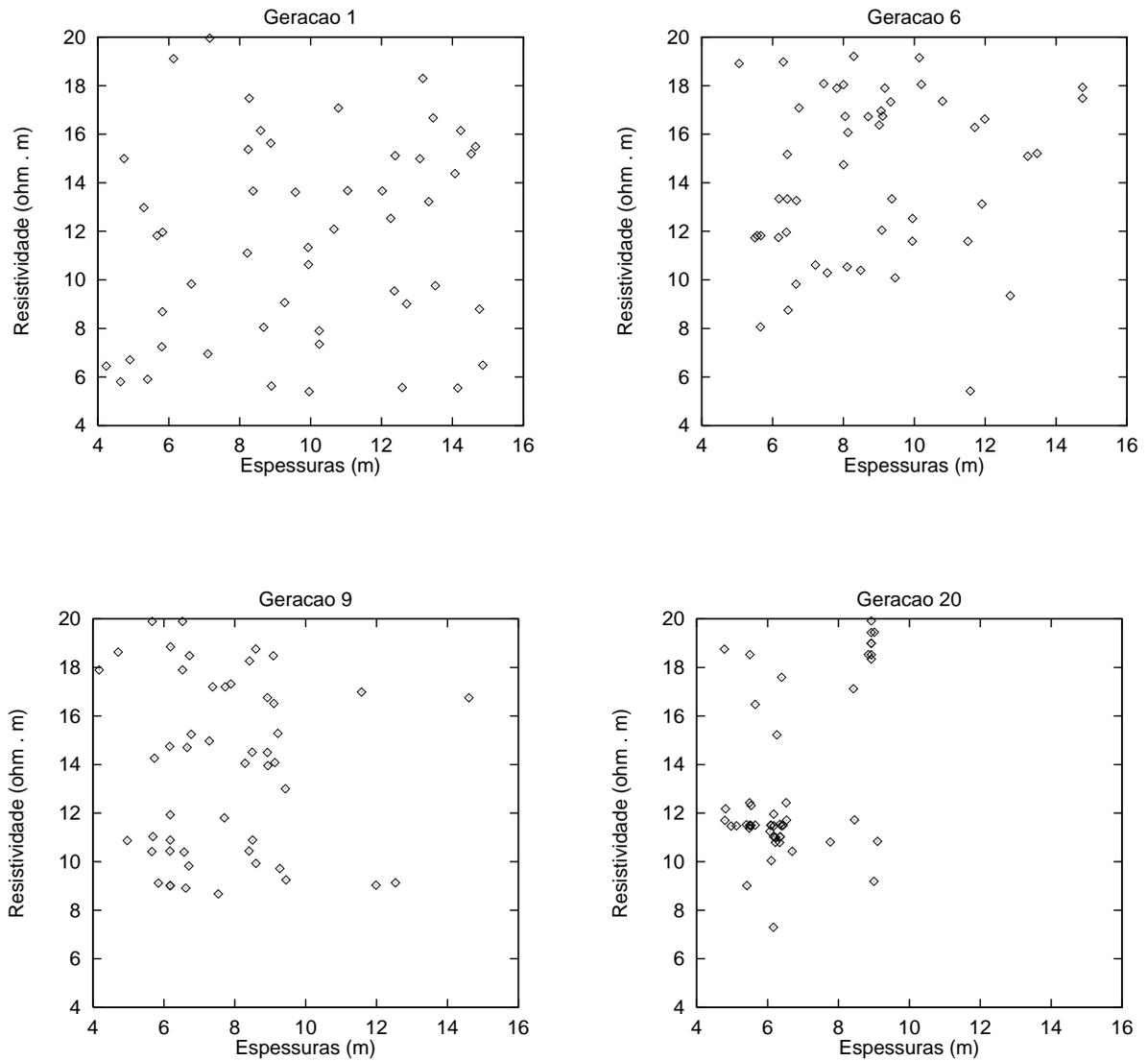


Figura 4.6: Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da segunda camada do modelo sintético durante as gerações. Cada ponto ou par (espessura;resistividade) é um indivíduo da população. O modelo foi invertido com  $Pop=50$ ,  $Pm=0.02$ .

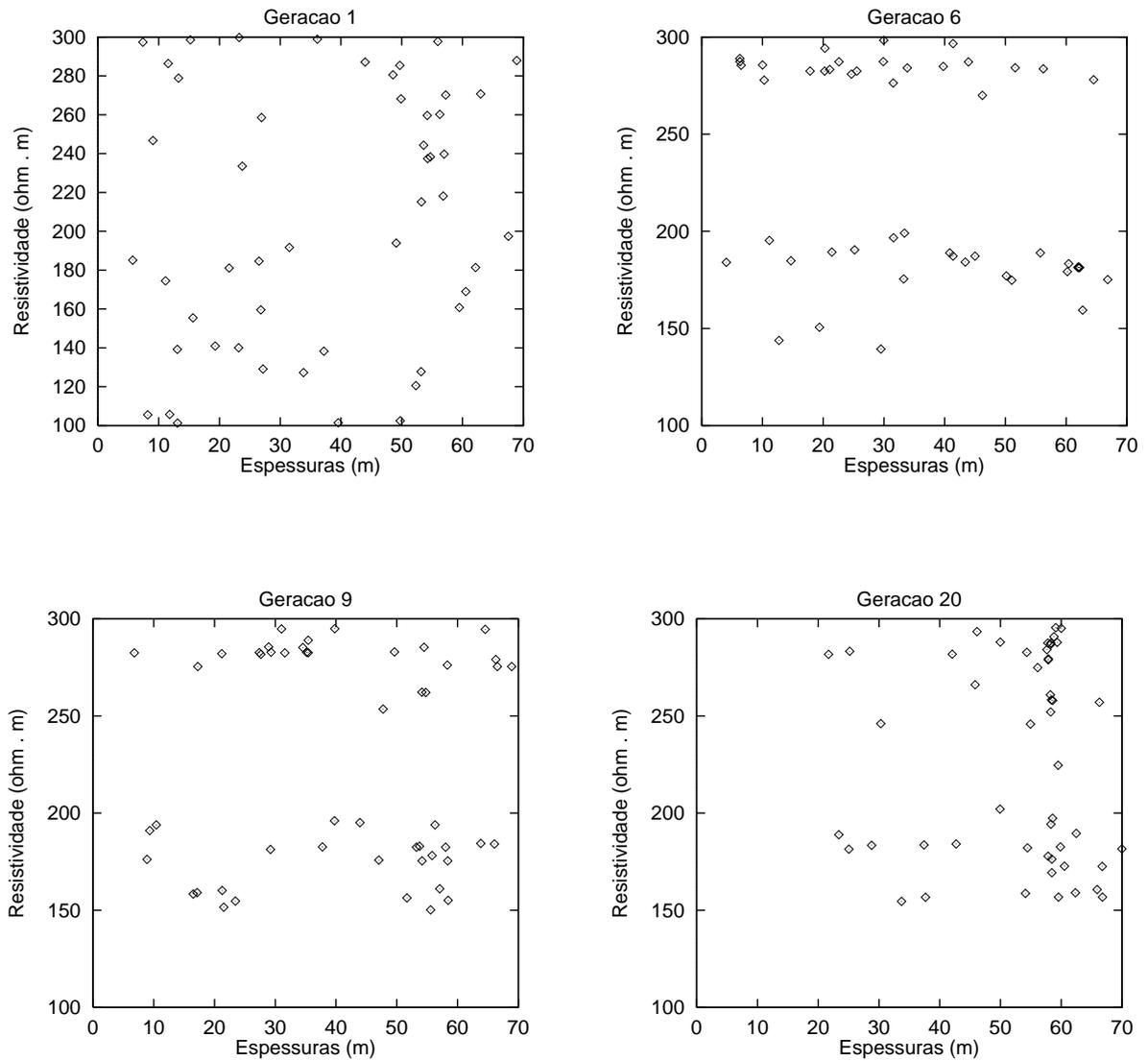


Figura 4.7: Sequência ilustrativa com a evolução dos parâmetros ajustados da terceira camada do modelo sintético durante as gerações. Cada ponto ou par (espessura,resistividade) é um indivíduo da população. O modelo foi invertido com  $Pop=50$ ,  $Pm=0.02$ .

## 4.9 O método aplicado aos dados de campo

A exemplo da inversão linearizada, o algoritmo genético também foi aplicado aos dados de campo coletados em Serrolândia e Quixabeira, com o objetivo de se avaliar a eficiência do método quando aplicado a esse tipo de dado comprovadamente mais complexo, e ao mesmo tempo obter um quadro comparativo entre os dois métodos utilizados. Os parâmetros adotados na inversão com algoritmo genético, foram testados em dados sintéticos (seção anterior), e mostraram ser eficientes para o processo de otimização.

A inversão dos dados relativos a primeira sondagem revelou padrões de similaridade com o modelo obtido através da inversão linearizada (doravante denominada I.L.). O aspecto destoante ficou por conta do ajuste obtido para segunda camada, cujo valor de espessura determinado a partir do A.G. mostra uma maior correlação com os dados obtidos do poço locado na área, ainda que, em relação a esses mesmos dados haja uma diferença de 4 metros no valor invertido. A comparação dos desempenhos obtidos e dos gráficos que mostram as curvas ajustadas para os dois métodos, revela uma significativa vantagem para o A.G. na inversão dos dados.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	86,3	2,8
camada 2	7,5	5,2
camada 3	62,7	76,4
camada 4	5193,2	$\infty$

Tabela 4.3: Parâmetros ajustados para a SEV 1.

A espessura da segunda camada, foi novamente o ponto de discórdia entre as inversões realizadas nos dois métodos para a SEV 2. A inversão realizada com A.G., aponta para um valor de espessura de 16 metros para tal camada, enquanto que de acordo com a I.L., a espessura seria de 1.9 metros. Infelizmente, não será possível determinar qual dos dois métodos mais se aproximou da realidade, pois não existem informações de poço para essa sondagem. Existem discrepâncias ainda nos valores de resistividade da segunda camada, que não vem a causar maiores transtornos visto que os dois valores indicados podem caracterizar a presença de embasamento alterado, o que parece ser o caso desta camada. As discrepâncias registradas na resistividade da camada aquífera porém, podem indicar uma diferença na salinidade da água. A julgar pelo ajuste alcançado com A.G., a água teria um grau de salinidade maior que o previsto através da I.L.

Para a SEV 3, os modelos invertidos com os dois métodos estão em harmonia quase perfeita. Com alguns padrões de variação que podem até ser considerados desprezíveis, o A.G. neste caso só veio a confirmar as tendências indicadas pela I.L.. Na análise das curvas

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	2061,1	4,2
camada 2	12,5	16,0
camada 3	499,9	$\infty$

Tabela 4.4: Parâmetros ajustados para a SEV 2.

obtidas pelos dois métodos, vale ressaltar a superioridade da curva obtida com I.L.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	98,6	0,4
camada 2	24,9	5,5
camada 3	10,8	9,1
camada 4	4615,4	$\infty$

Tabela 4.5: Parâmetros ajustados para a SEV 3.

A inversão realizada com a SEV 4 merece uma especial atenção, por se verificar ai uma discrepância entre os métodos que certamente causaria um erro fatal na determinação da estrutura da camada aquífera. Na I.L., foi feita uma previsão inicial de embasamento cristalino não fraturado para a terceira camada, atribuindo-lhe inclusive um valor de  $5000 \Omega \cdot m$  no modelo inicial. Entretanto, a inversão mostrou haver ali uma camada composta por embasamento fissurado ao inverter uma resistividade em torno dos  $900 \Omega \cdot m$ , o que foi comprovado através da análise dos dados de poço na área. Atento a esse fato, na especificação do universo de procura para essa camada, foram estabelecidos valores entre  $800 \Omega \cdot m$  e  $5000 \Omega \cdot m$ . Entretanto, contrariando-se todas as considerações previstas, o valor de resistividade registrado para essa camada ficou em torno de  $4000 \Omega \cdot m$ , que é um valor típico de embasamento não fissurado. Isso quer dizer que de acordo com os valores invertidos com A.G., não foi detectada uma camada aquífera no local.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	8,8	3,9
camada 2	39,1	10,0
camada 3	4054,4	$\infty$

Tabela 4.6: Parâmetros ajustados para a SEV 4.

Na SEV 5 o episódio se repete. Isto é, estabelacida inicialmente uma resistividade de  $5000 \Omega \cdot m$  para a terceira camada, a I.L mostrou que na verdade tartava-se de uma camada aquífera, ao determinar um valor de resistividade em torno dos  $650 \Omega \cdot m$  para a camada,

o que foi confirmado pelos dados de poço. Desta vez porém, os resultados alcançados pelo A.G. reforçam a idéia de uma terceira camada aquífera, registrando para essa camada uma resistividade de  $625 \Omega \cdot m$ , o que está de pleno acordo com a I.L.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	132,8	0,6
camada 2	9,3	4,8
camada 3	637,6	$\infty$

Tabela 4.7: Parâmetros ajustados para a SEV 5.

Os parâmetros invertidos para a SEV 6 com o A.G., apesar das pequenas diferenças em relação a I.L., permite-nos determinar camadas de mesmas características eletrorresistivas. A única discrepância fica por conta da determinação da espessura da terceira camada, correspondente ao embasamento cristalino alterado, que é, segundo o modelo invertido pelo A.G. cerca de 15 metros mais espesso do que o valor encontrado através da I.L.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	153,4	0,6
camada 2	649,4	5,0
camada 3	10,0	22,0
camada 4	4475,2	$\infty$

Tabela 4.8: Parâmetros ajustados para a SEV 6.

O que há para ser destacado na inversão da SEV 7 realizada com A.G., é o valor da espessura invertida para a terceira camada. Enquanto que através da I.L. pode-se afirmar que trata-se de uma camada aquífera de 85 metros aproximadamente, a espessura encontrada através do A.G. pressupõe a existência de um aquífero ainda mais profundo, com cerca de 143 metros de profundidade. Apesar de haver informações de poço a respeito dessa sondagem, não é possível tirar qualquer conclusão a partir dela, pois as investigações vão até o limite de 70 metros.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	21,4	16,3
camada 2	481,8	143,4
camada 3	4999,0	$\infty$

Tabela 4.9: Parâmetros ajustados para a SEV 7.

A inversão da SEV 8 feita através de A.G. somente reforçou as hipóteses propostas através da análise dos dados invertidos com I.L. em relação as características eletrorresistivas das camadas e a influência do riacho nos valores de resistividades registrados. Entretanto, na determinação da espessura da camada aquífera nesta sondagem, a inversão com I.L. mostrou o seu maior grau de incorreção já registrado até então, ao indicar um valor em torno de 21 metros, quando na verdade os dados de poço revelaram um valor em torno dos 41 metros. Com A.G., esse erro não voltou a ocorrer. A inversão apontou um valor em torno dos 43 metros para a espessura dessa camada, o que estaria de pleno acordo com a informação do poço.

	Resistividade ( $\Omega \cdot m$ )	Espessura (m)
camada 1	728,8	0,4
camada 2	14,4	3,0
camada 3	59,5	13,3
camada 4	48,8	29,5
camada 5	5974,4	$\infty$

Tabela 4.10: Parâmetros ajustados para a SEV 8.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	
Min.	65	5	40	2000		2	5	10		SEV 1
Máx.	90	15	100	6000		5	15	100		
Min.	1900	10	200			3	15			SEV 2
Máx.	2100	15	500			7	40			
Min.	50	15	10	3000		0,25	1	5		SEV 3
Máx.	100	25	20	6000		3	10	20		
Min.	8	25	800			2	2			SEV 4
Máx.	10	40	5000			7	100			
Min.	80	5	600			0,25	3			SEV 5
Máx.	300	15	5000			2	15			
Min.	150	500	10	2000		0,25	1	5		SEV 6
Máx.	300	800	20	6000		3	15	50		
Min.	18	300	1000			5	70			SEV 7
Máx.	22	800	5000			20	150			
Min.	200	5	40	40	3000	0,25	2	10	20	SEV 8
Máx.	800	15	60	100	6000	2	5	50	60	

Tabela 4.11: Quadro de valores mínimos e máximos dos parâmetros utilizados na inversão das SEV's.

Parâmetro	Definição	Valor adotado
irestrt	0 para executar um novo AG, ou para uma função de avaliação simples. 1 para reiniciar a continuação da execução de um AG	0
microga	0 para uma operação normal convencional do AG 1 para uma micro operação do AG	1
npopsiz	Tamanho da população	5
nparam	Número de parâmetros (grupo de bits) de cada indivíduo	variável
pmutate	Probabilidade de mutação	0,02
maxgen	Número máximo de gerações	1000
idum	Número randomico inicial necessário para executar o AG (inteiro negativo)	-1000
pcross	Probabilidade de cruzamento	0,5
ielite	0 para o não elitismo (o melhor indivíduo não é necessariamente replicado de uma geração para a outra 1 para o elitismo	1
iunifrm	0 para cruzamento em um único ponto 1 para cruzamento uniforme	0
nowrite	0 para escrever mutações destacadas e ajuste de parâmetros 1 para não faze-lo	1
paramin	valores mínimos de cada parâmetro de entrada	variável
paramax	valores máximos de cada parâmetro de entrada	variável

Tabela 4.12: Variáveis de entrada: suas definições e valores adotados

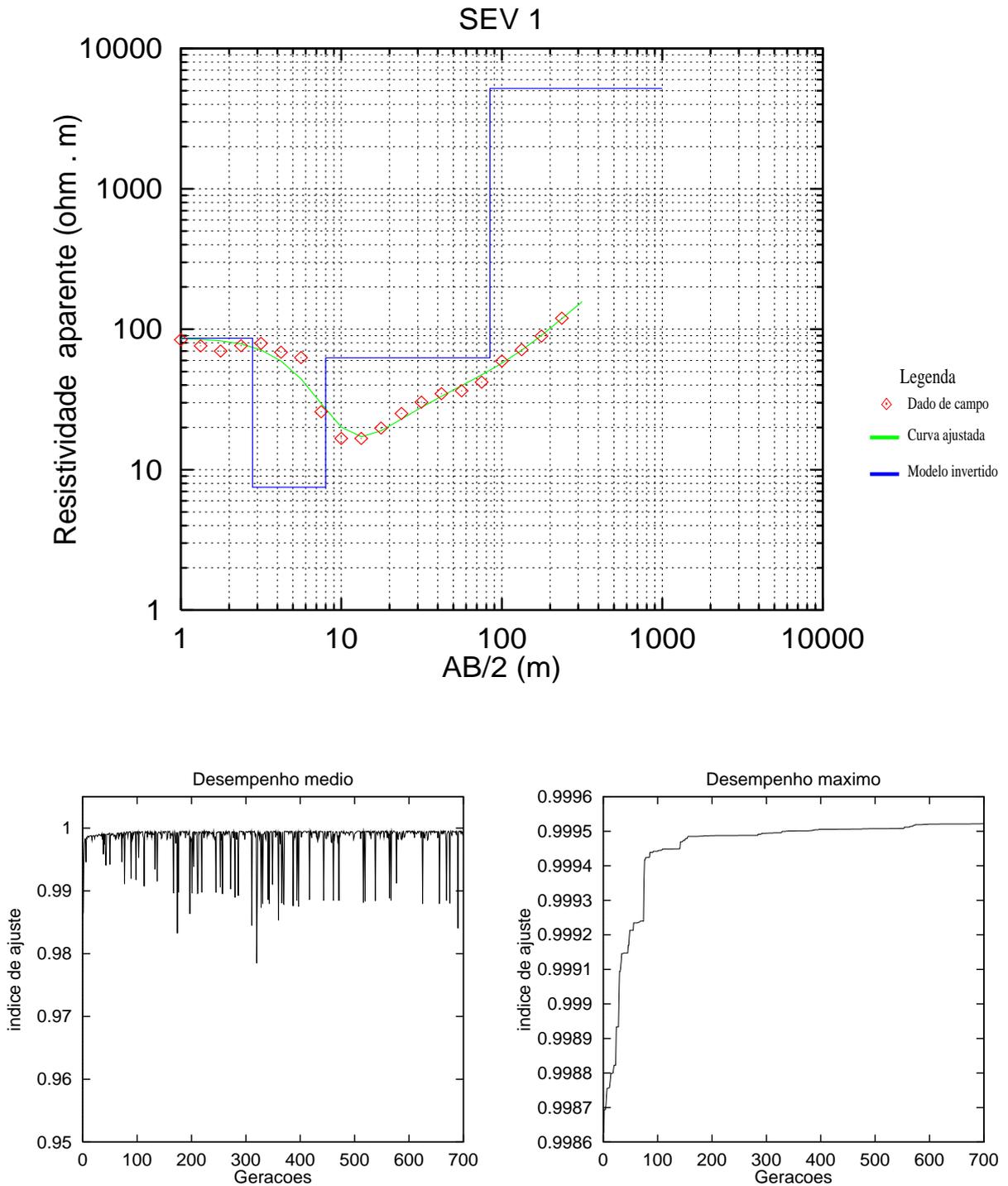


Figura 4.8: Resultados da inversão da SEV 1 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

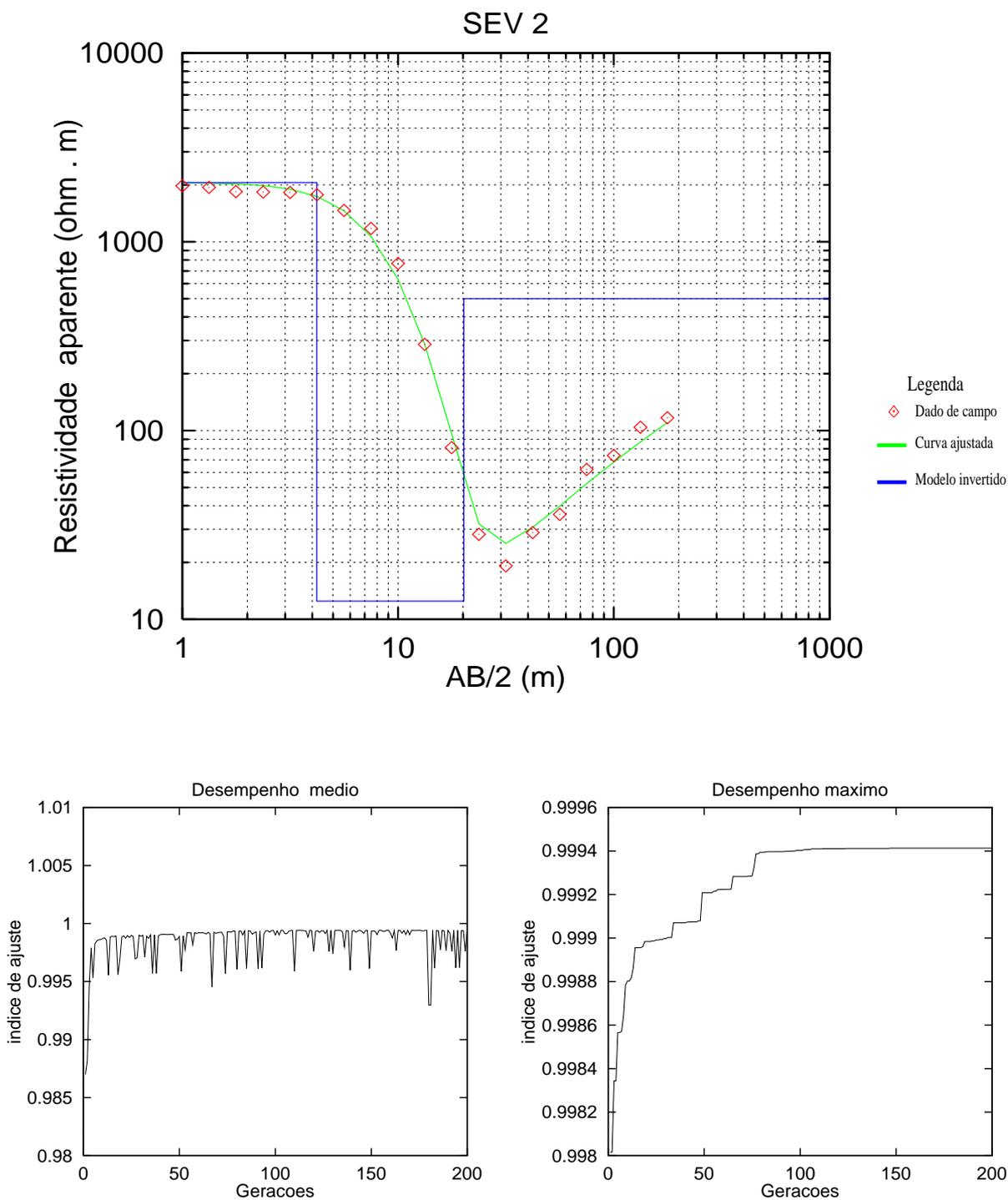


Figura 4.9: Resultados da inversão da SEV 2 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

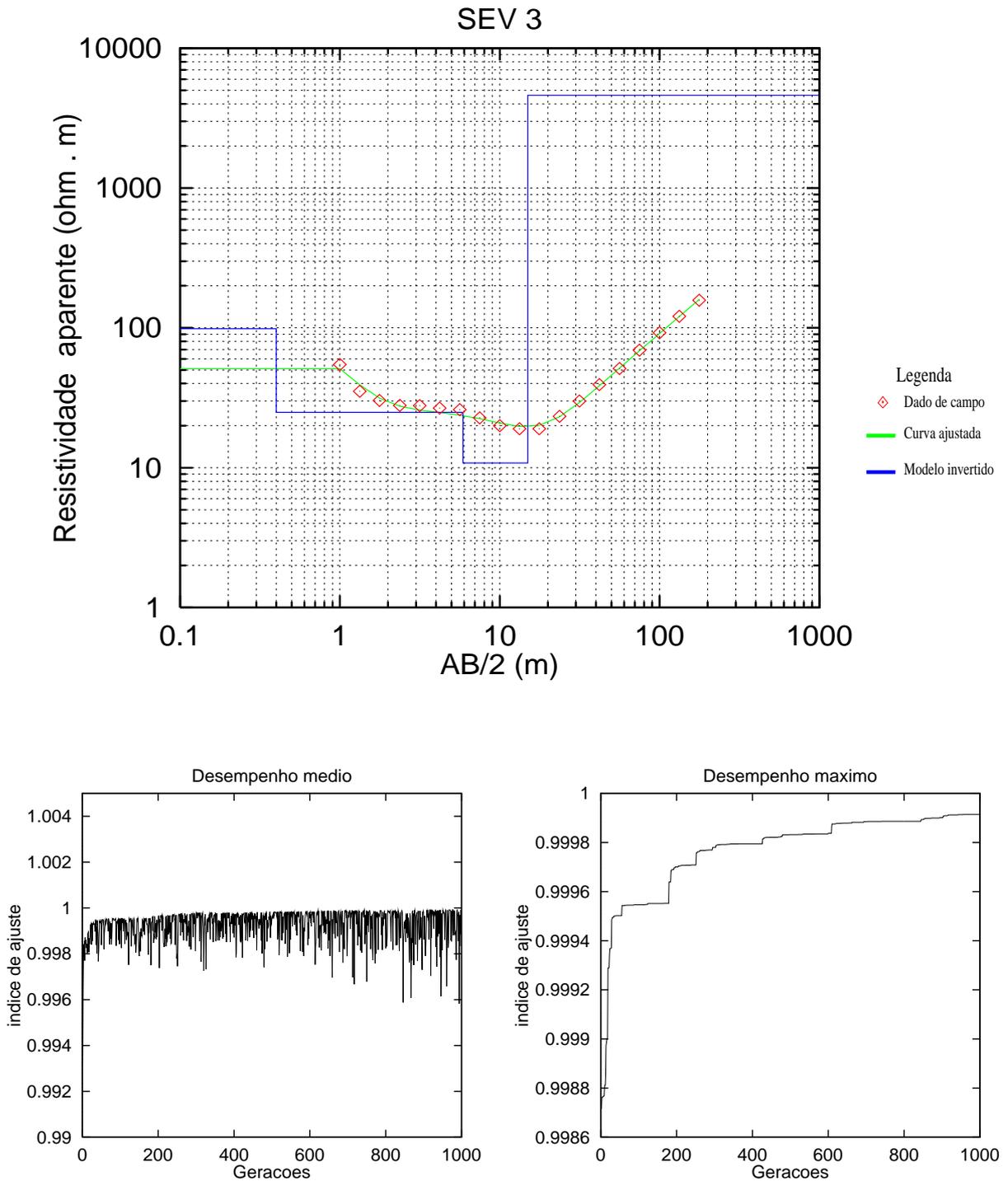


Figura 4.10: Resultados da inversão da SEV 3 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

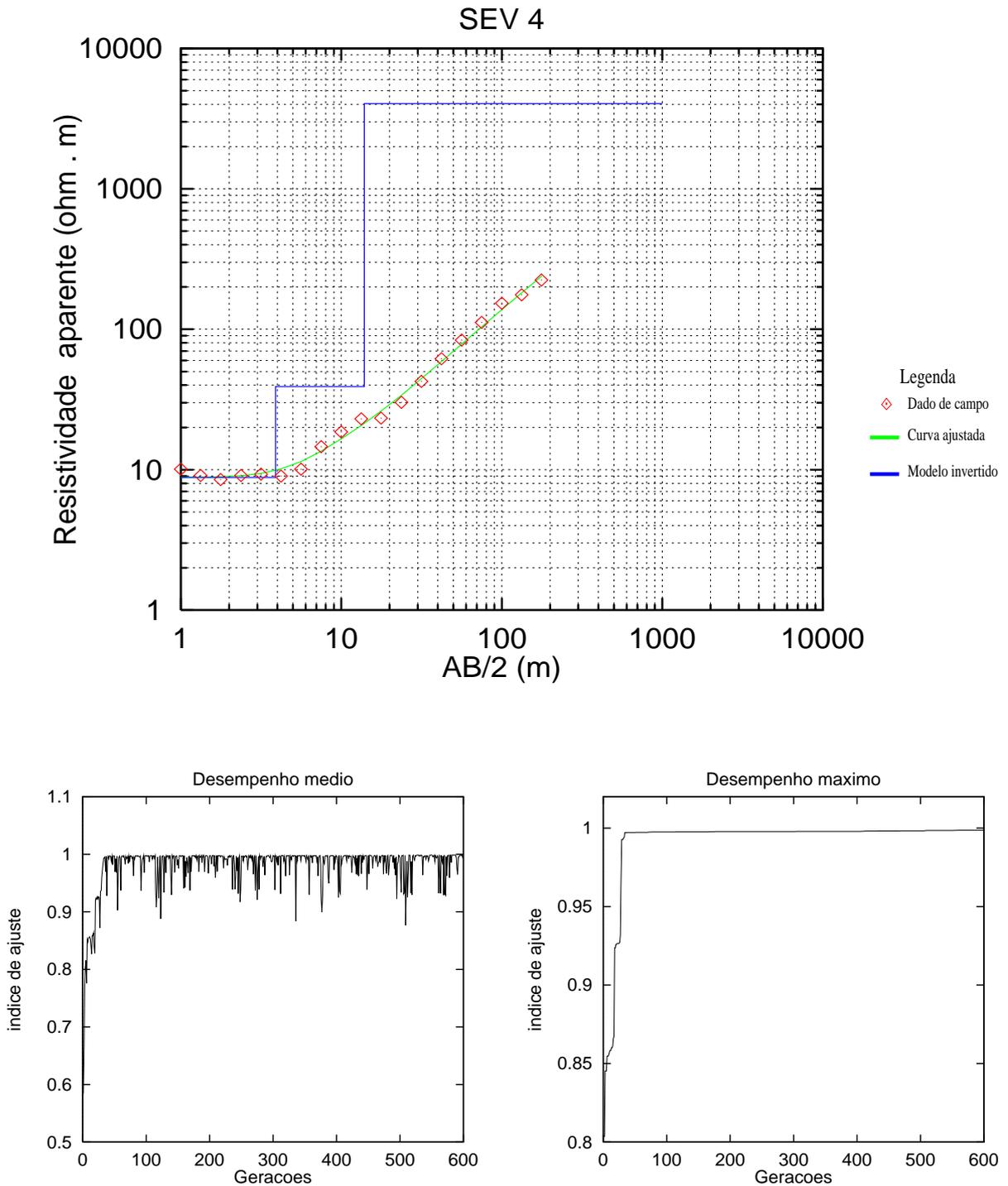


Figura 4.11: Resultados da inversão da SEV 4 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

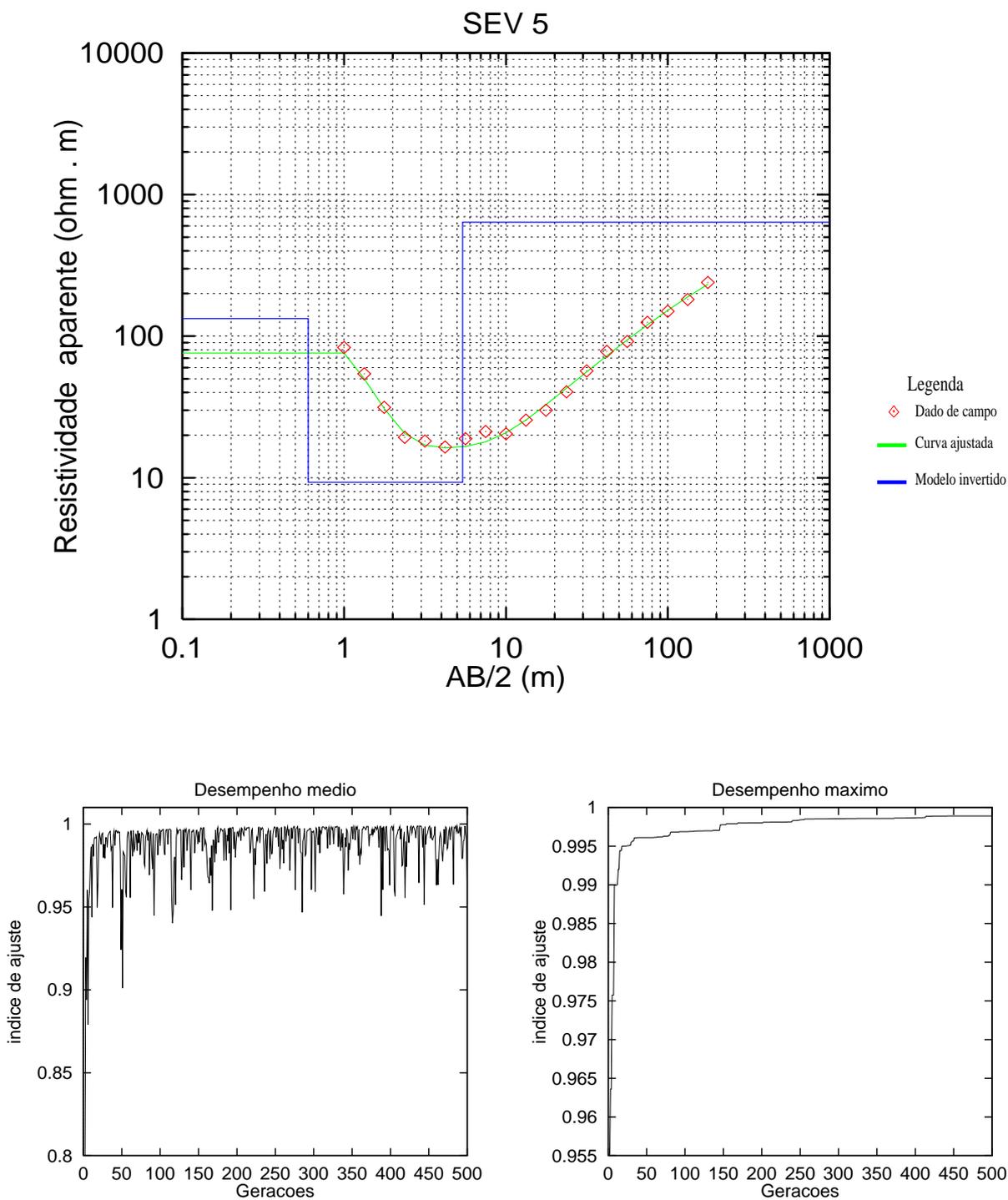


Figura 4.12: Resultados da inversão da SEV 5 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

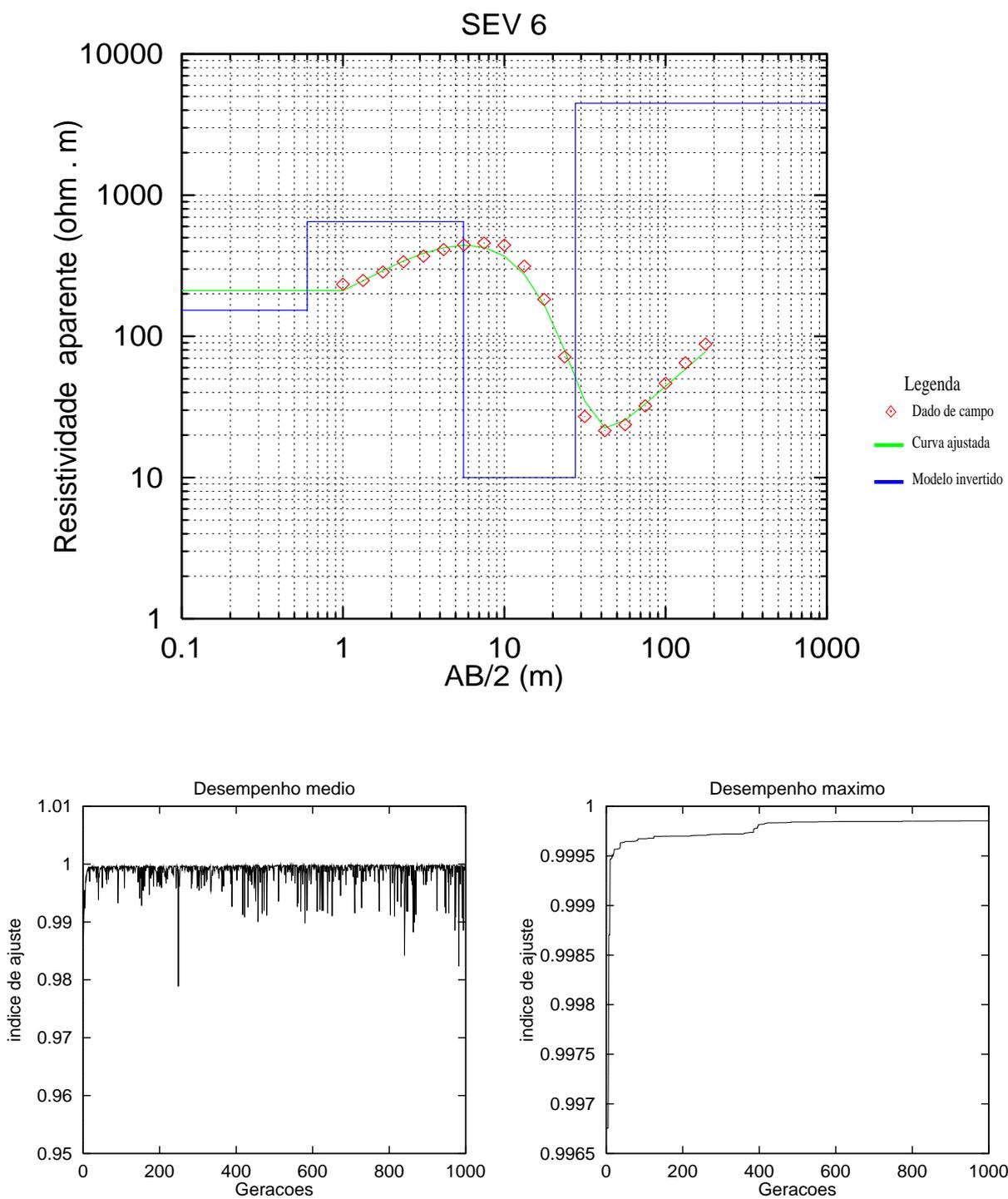


Figura 4.13: Resultados da inversão da SEV 6 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

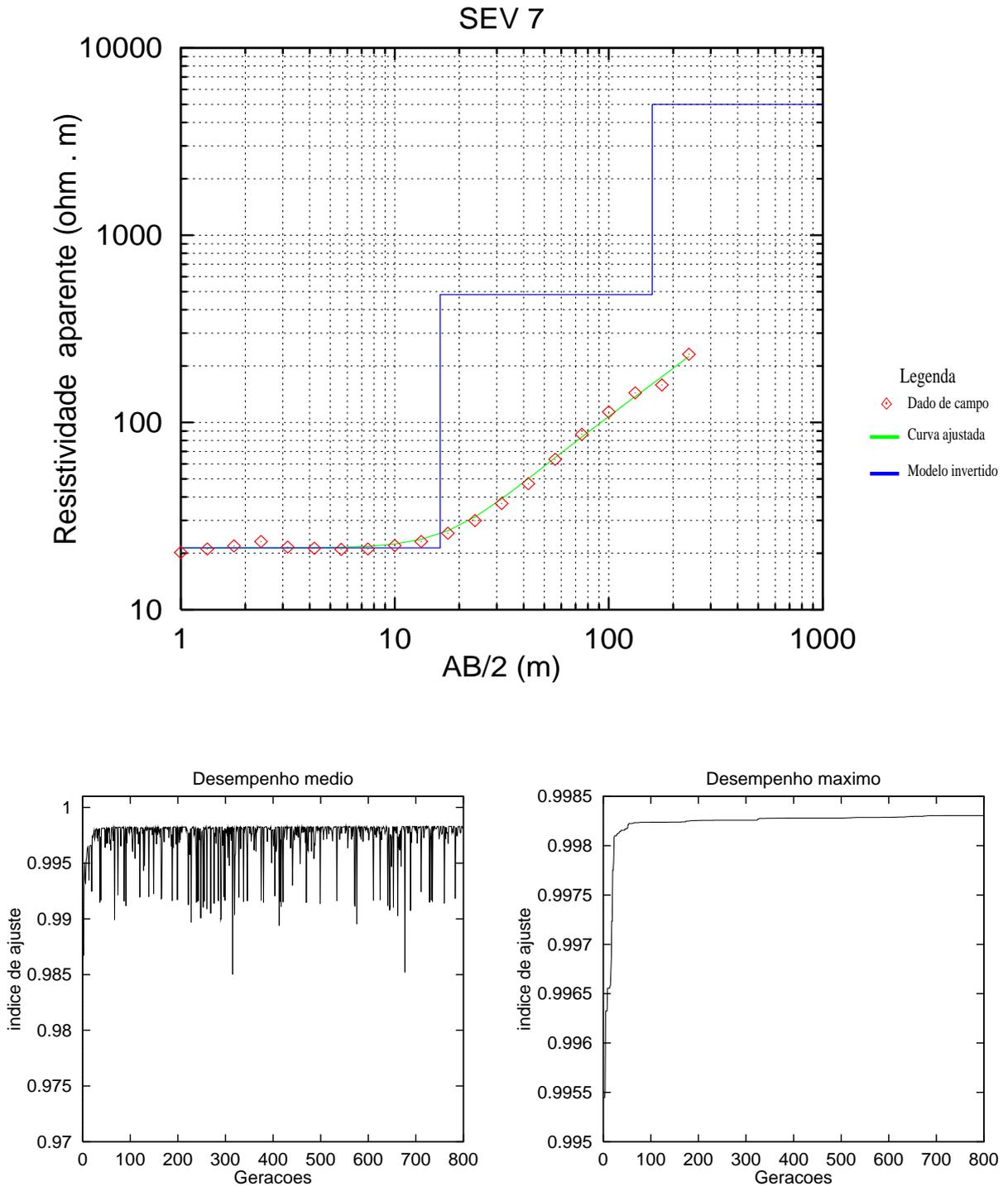


Figura 4.14: Resultados da inversão da SEV 7 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

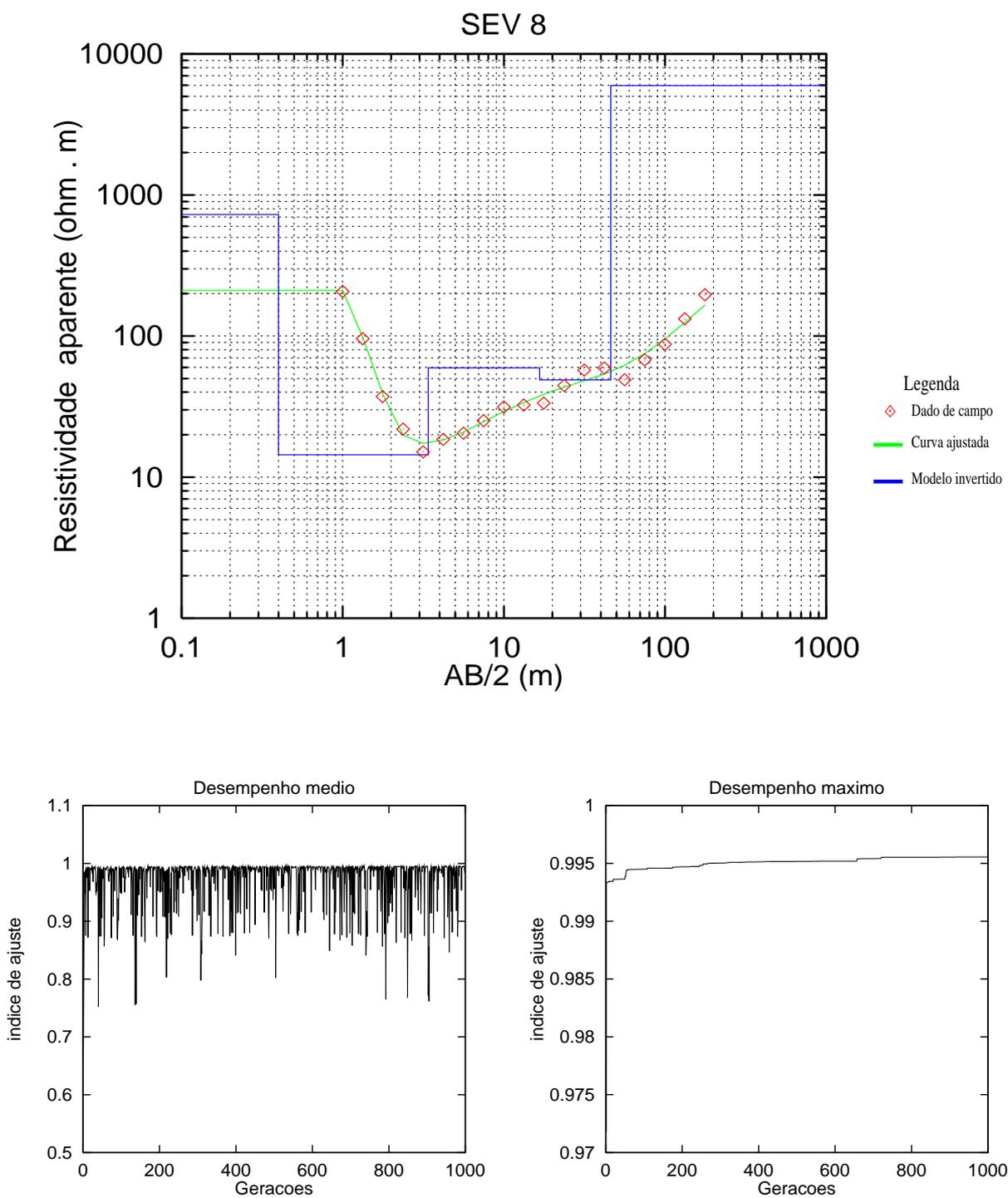


Figura 4.15: Resultados da inversão da SEV 8 feita com A.G. Acima, os dados de campo, curva ajustada e modelo invertido. Abaixo, o gráfico com os desempenhos médio e máximo ao longo das gerações.

## CAPÍTULO 5

# CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Ao longo desse trabalho, procurou-se demonstrar a habilidade de duas técnicas especiais de inversão quando aplicadas a dados de sondagens elétricas verticais: A inversão linearizada e o algoritmo genético. Primeira a ser investigada, a inversão linearizada mostrou ser uma importante ferramenta no trato do problema, ainda mais quando a ela são acoplados procedimentos que lhe aumentam o poder de resolução, tais como é o conceito de norma arbitrária introduzido por Porsani (1993), fator de amortecimento de Marquardt (Rijo et al, 1977) e até mesmo de recursos da teoria da inversão no domínio logarítmico (Johansen, 1977). Etapas de testes com modelos sintéticos e reais (inclusive com os dados coletados em campo) foram realizadas, onde procurou-se estabelecer de que forma os procedimentos implantados tornariam mais eficaz a inversão das sondagens elétricas. Baseados nos resultados produzidos, chegou-se as seguintes conclusões:

1 - A eficiência na utilização das normas 1, 2 e 3 na inversão de dados sintéticos não é estabelecida unicamente em função delas próprias, mas avaliada quanto a atuação conjunta em relação aos domínios, fatores de amortecimento e modelos iniciais adotados. Foi observado como regra geral a pouca eficiência na utilização da norma 1 quando se dispunha de um fator de amortecimento inoperante, ainda que frente a um modelo inicial bom, o que revela o quanto a norma pode tornar o método frágil em seu processo de convergência. As normas 2 e 3 não demonstraram o mesmo problema, e surpreenderam ao apresentarem graus de eficiência semelhantes, mesmo para modelos iniciais ruins, sem que se fizesse uso do fator de amortecimento. Para dados reais (inclusive os dados de campo), onde foram testadas as normas 1 e 2, observou-se que em 100% dos casos, os ajustes conseguidos com norma 2 foram superiores, permitindo inclusive que se fizesse um maior número de iterações sem que houvesse divergência (comum quando se trabalhava com norma 1).

2 - O fator de amortecimento mostrou ser relevante quando aplicado a dados sintéticos, principalmente ao se fazer uso de norma 1, pois nesse caso, conseguia equilibrar os resultados com aqueles atingidos com as outras normas. Entretanto, para as normas 2 e 3, a sua utilização além de não produzir maiores resultados, tornava o processo de convergência mais lento. A sua maior contribuição foi registrada para inversões no domínio logarítmico e modelo inicial ruim, que obtiveram os piores resultados quando feitas com fator inoperante.

Ainda de acordo com os resultados dos testes, constatou-se que a adoção de um fator de amortecimento não nulo parecia equilibrar o grau de ajuste para os dois domínios, qualquer que fosse o modelo inicial. Em relação as inversões dos dados reais, a utilização de um fator de amortecimento, embora de valor não muito elevado, provou ser imprescindível quando se almejava um grau de ajuste razoável.

3 - Os testes com dados sintéticos mostraram ser clara a vantagem do domínio logarítmico nas inversões feitas com modelo inicial bom e fator de amortecimento inoperante. Neste caso, pôde-se observar que a utilização de tal domínio conseguiu inclusive eliminar o problema do baixo ajuste para a resistividade da última camada, que vinha sendo uma constante no trato com o domínio linear, elevando essa resistividade a valores próximos aqueles estabelecidos no modelo sintético. As recomendações quanto a adoção de um determinado domínio parecem estar diretamente relacionadas ao modelo inicial adotado, visto que os testes mostraram que se tal modelo for bom, o domínio logarítmico será mais bem empregado, porém, se ao contrário dispusermos de um modelo ruim, sugere-se o uso do domínio linear. Entretanto, essas diferenças parecem desaparecer quando se adota um determinado fator de amortecimento nas inversões. Nessa nova situação (como comentou-se anteriormente), parece haver um equilíbrio entre os graus de ajuste para os dois domínios. Os testes utilizando-se os dois domínios para a inversão de dados reais, mostraram claramente que a influência da utilização deles se dá mais acentuadamente quando se dispõe de norma 2 na inversão. Neste caso, observa-se um melhor ajuste no domínio linear para os pontos iniciais das curvas de campo, onde as resistividades aparentes possuíam valores mais elevados, enquanto que para valores intermediários, onde a curva registrava um decréscimo dos valores de resistividade aparente, alcançou-se um ajuste mais preciso no domínio logarítmico. Esse padrão de ajuste também foi verificado nas inversões dos dados sintéticos. É necessário concluir também que não houve diferenças significativas no desempenho das inversões realizadas nos domínios logarítmicos com bases diferentes (decimal e neperiana), e que durante o processo de escolha dos modelos de campo a serem invertidos, observou-se que por algumas vezes não era possível realizar a inversão com domínio logarítmico, mesmo ao se fazer variações na norma e fator de amortecimento. As inversões no domínio linear ao contrário, eram sempre possíveis ainda que por vezes não apresentassem os melhores resultados.

As inversões realizadas nos dados de campo com norma 2, fator de amortecimento 1.1 e domínio linear, provaram ter um desempenho satisfatório quando comparadas com as informações de poços locados nos pontos de sondagem, o ajuste, é bem verdade, não foi ideal, e a inversão das espessuras contou com alguma margem de erro em relação aos dados de poço, porém, se mantiveram em um limite de tolerância tal, que não chegaram a comprometer a caracterização das camadas aquíferas, pelo contrário, pode-se considerar que tal caracterização foi realizada com sucesso.

Como recomendações a trabalhos futuros nessa linha de pesquisa, sugere-se um estudo

mais aprofundado a cerca das normas a serem utilizadas (já que aqui foram realizados testes apenas com as normas 1, 2 e 3), no sentido de se desenvolver um algoritmo que permita a utilização discretizada das mesmas, e possa haver uma seleção adequada daquela que melhor proporcione a otimização. A utilização do domínio logarítmico também em algumas situações demonstrou sua eficiência no processo de inversão, obtendo índices de desempenho maiores do que para o domínio linear. Embora detectado o problema da completa divergência quando da utilização do domínio para alguns casos, (fator que levou a se optar pela inversão dos dados de campo no domínio linear), as pesquisas adicionais devem ser encorajadas em função dos vários resultados promissores.

Na segunda fase das atividades, testes com algoritmo genético foram realizados em dados sintéticos, com o objetivo de se determinar o tamanho da população ( $Pop$ ) e a probabilidade de mutação ( $Pm$ ), que melhor se adaptassem ao processo (Goldberg e Segrest, 1987). Esses testes demonstraram que adoção dos valores  $Pop=5$ ,  $Pm=0,02$  fazia com que o método trabalhasse de forma mais objetiva conduzindo a população a uma região que continha os parâmetros do modelo sintético. Na análise da inversão feita com  $Pop=50$ ,  $Pm=0,02$ , ficou claro que o desempenho no ajuste da primeira camada foi o mais satisfatório, haja vista a análise dos gráficos. Na verdade, tal desempenho deve-se ao fato de que devido a própria configuração da curva, pôde-se estabelecer um universo de procura para esta camada bastante limitado. Entretanto, o ajuste estabelecido para as outras camadas, apesar de não proporcionar o alcance do mínimo global, pode ser considerado bem sucedido em vista dos baixos erros registrados. Atingiu-se um desempenho máximo em torno de 1 para quase a totalidade dos casos, o que pode ser verificado no ajuste gráfico perfeito, e o desempenho médio com seu caráter oscilatório, denotou a importância do processo de mutação para afastar os indivíduos de uma possível região de mínimo local. O tamanho da população mostrou ser também um aspecto importante no comportamento da curva de performance média, que se torna mais oscilante quando se trata de pequenas populações.

Na inversão dos dados de campo, os resultados das análises gráficas e desempenhos obtidos mostram que o método atingiu um nível de ajuste bastante apreciável, em alguns casos inclusive superior a inversão linearizada. As inversões que puderam ser analisadas à luz dos dados de poço, em sua maioria mostraram estar em sintonia com a realidade geológica da região, com exceção do valor de resistividade invertido para a terceira camada da SEV 4 onde o A.G. cometeu um erro grave ao não caracterizar tal camada como aquífera, conferindo-lhe uma resistividade em torno dos  $4000 \Omega \cdot m$ , típica de embasamento são. Na SEV 7, também houve uma discordância em torno da inversão da espessura da terceira camada realizada pelos dois métodos, porém, apesar de haver informações de poço a cerca dessa sondagem, não é possível tirar qualquer conclusão a partir dela, pois as investigações vão até o limite de 70 metros.

Na elaboração desse trabalho, os cuidados tomados para se evitar a convergência indesejável, resumiram-se a uma pesquisa a respeito da escolha do tamanho da população, e da probabilidade de mutação, fatores que podem determinar o êxito no alcance do mínimo global. Entretanto, existem outros métodos, até mais eficientes de se alcançar essa meta, tal como o conceito de contração e expansão da função-objetivo, com a utilização do parâmetro temperatura, extraído do "Simulated Annealing", outro método randômico de otimização. Pode-se recomendar para trabalhos futuros a pesquisa em torno desses e de outros métodos que venham a contribuir para a eliminação daquele que é um dos principais problemas no trato com esse tipo de método. Por fim, recomenda-se também uma linha de pesquisa que envolva a utilização combinada dos dois métodos estudados. Como se sabe, o A.G. é um método de procura que visa estabelecer uma população de indivíduos que esteja na região de mínimo global. No espaço limitado por essa região, existem indivíduos mais aptos que outros, porém, pode não haver necessariamente um indivíduo que represente exatamente o mínimo global. A idéia então, seria utilizar um dos indivíduos dessa população como modelo inicial a ser introduzido na inversão linearizada com o objetivo de se determinar o modelo que represente o ponto exato de mínimo global, que terá essa característica pois quaisquer dos modelos iniciais tomados estará em uma região de mínimo global.

# AGRADECIMENTOS

Ao Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia, CPGG/UFBA, pelo suporte técnico computacional nas etapas de laboratório.

A Companhia de Pesquisa em Recursos Minerais, CPRM-Ba, pelo patrocínio e colaboração nas etapas de campo.

A Companhia de Engenharia Rural da Bahia, CERB, por fornecer dados relativos a poços locados na região de estudo.

Ao técnico de campo Luis Medeiros, do CPGG, por garantir sempre o bom funcionamento dos aparelhos em campo.

Aos geólogos da CPRM e colegas da pós graduação, João José Santos Costa e Alexandre César Monteiro por participar e colaborar nas etapas de campo, bem como fornecer importantes informações geológicas a respeito da região estudada.

A todos os colegas da iniciação científica, pelos agradáveis anos de convivência, e pelas dicas importantes ao longo desse tempo. Em especial a Washington Oliveira Martins por participar e colaborar nas etapas de campo, e a Emerson Araújo do Carmo pelas animadas discussões sobre o tema.

A todos os professores do CPGG, com os quais aprendi a gostar e respeitar essa ciência tão valorosa. A geofísica.

Aos professores Joaquim Xavier Cerqueira Neto e Sérgio Cavalcante Guerreiro, membros da comissão examinadora, agradeço pelas correções sugeridas, que elevaram bastante a qualidade do texto.

E finalmente ao professor Milton José Porsani, não somente pela orientação no desenvolvimento dessa monografia, como também pelos três anos de aprendizado nos quais tive o privilégio de participar dos projetos de iniciação científica como seu orientando.

## APÊNDICE A

### Expansão por série de Taylor

Tomemos uma função  $Y=f(x)$ , em que as derivadas existam até a ordem  $(n+1)$ , inclusive na vizinhança do ponto  $x=a$ . Tomemos agora um polinômio  $Y=P_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , cujo valor no ponto  $x=a$  é igual ao valor da função  $f(x)$  neste ponto, e os valores no ponto  $x=a$  das derivadas sucessivas até a ordem  $n$  (inclusive) são respectivamente iguais aos valores neste ponto, das derivadas correspondentes da função  $f(x)$ . Assim teremos:

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Podemos expressar o polinômio  $P_n(x)$  da seguinte maneira:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \dots + C_n(x - a)^n \tag{A.2}$$

Deve-se então calcular os coeficientes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de maneira que seja satisfeita a relação (A.1) desta forma:

$$\left. \begin{aligned} P_n'(x) &= C_1 + 2C_2(x - a) + 3C_3(x - a)^2 + \dots + nC_n(x - a)^{n-1} \\ P_n''(x) &= 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - a) + \dots + n(n - 1)C_n(x - a)^{n-2} \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n - 1)\dots 2 \cdot 1C_n \end{aligned} \right\} \tag{A.3}$$

Substituindo-se  $x$  por  $a$  nas expressões acima teremos:

$$\begin{aligned} f(a) &= C_0 \\ f'(a) &= C_1 \\ f''(a) &= 2 \cdot 1 \cdot C_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= n(n - 1)(n - 2)\dots 2 \cdot 1 \cdot C_n \end{aligned} \tag{A.4}$$

de onde tiramos que:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= f(a) \\
 C_1 &= f'(a) \\
 C_2 &= \frac{1}{1 \cdot 2} f''(a) \\
 C_3 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) \\
 &\vdots \\
 C_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Substituindo os valores dos coeficientes  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  na fórmula (A.2), tem-se o polinômio:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \tag{A.6}$$

Como a função  $f(x)$  e o polinômio  $P_n(x)$  não são exatamente iguais, teremos um polinômio que expressa a diferença entre eles, que pode ser chamado  $R_n(x)$ , de forma que possamos obter a seguinte expressão:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{A.7}$$

Através de cálculos outros, podemos chegar a expressão de  $R_n(x)$  como sendo:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \tag{A.8}$$

Se a função  $f(x)$  é indefinidamente derivável na vizinhança do ponto  $x=a$ , pode-se tomar  $n$  arbitrariamente grande na fórmula de Taylor. Suponhamos que o resto  $R_n(x)$  tende para zero quando  $n$  tende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \tag{A.9}$$

Desta forma, fazendo  $n \rightarrow \infty$  na expressão de  $f(x)$  obtem-se uma série com uma infinidade de termos, dita série de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (\text{A.10})$$

Portanto temos que para uma série de Taylor de uma dada função, determinaremos se ela representa efetivamente essa função, se demonstrarmos que o resto tende para zero, para  $n \rightarrow \infty$ , bem como comprovarmos que a série escrita converge para a função dada.

## APÊNDICE B

### Conceitos e propriedades de norma de um vetor

Seja  $u$  e  $v$  vetores de  $R^n$  :  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . A distância entre os pontos  $u$  e  $v$  é definida por:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \quad (\text{B.1})$$

A norma euclidiana (norma 2) do vetor  $u$ , escrita  $\|u\|$ , é definida como sendo a raiz quadrada não negativa de  $u \cdot u$  :

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \quad (\text{B.2})$$

Como, por teorema temos que  $u \cdot u \geq 0$ , verifica-se a existência da raiz quadrada.

Pode-se notar que  $d(u, v) = \|u - v\|$ . Portanto temos que o conceito de norma de um vetor em um espaço vetorial linear, é uma generalização da idéia de comprimento.

Vejam os a seguir as três propriedades de norma:

1 -  $\|u\| \geq 0$  e  $\|u\| = 0$  se e somente se  $u=0$

2 -  $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ , onde  $\alpha$  é uma constante definida.

3 -  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , teorema de Cauchy-Schwarz.

Podemos generalizar o conceito de norma, escrevendo-a da seguinte maneira:

$$\|u\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{B.3})$$

onde  $p$  deverá ser um número  $\geq 1$ , pois do contrário ( $p < 1$ ) o teorema de Cauchy-Schwarz não será satisfeito.

## APÊNDICE C

### O método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados, tem por objetivo ajustar as amostras de um determinado sinal medido à uma curva que obedece a uma dada função matemática. Para isso, tenta-se fazer com que o somatório da diferença entre os valores medidos e calculados elevado ao quadrado seja mínimo. Esta expressão é do tipo:

$$Q = \sum_{j=1}^M (y_{obsj} - y_{calcj})^2 = \sum_j e_j \quad (C.1)$$

onde:

$Q$  - Somatório do erro quadrático mínimo

$y_{obsj}$  - dados coletados através de medição

$y_{calcj}$  - dados calculados através de uma função matemática pré estabelecida

$e_j$  - erro entre os dados observados e calculados em cada ponto  $j$

O procedimento consiste em determinar uma função a qual deseja-se ajustar a curva dos dados medidos, e em seguida aplicar o método, calculando através dele o valor dos coeficientes da função que fazem do somatório do erro quadrático um valor mínimo.

Na forma geral e matricial, podemos escrever esta equação da seguinte maneira:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

onde:

$\mathbf{y}$  - vetor dos dados observados

$\mathbf{X}$  - matriz que representa a função linear

$\mathbf{h}$  - vetor dos parâmetros

$\mathbf{e}$  - vetor erro

Do produto do vetor erro pela sua transposta, obtemos o somatório do erro quadrático:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Ainda utilizando notação matricial, podemos escrever a forma ampliada das equações normais da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{y} & \mathbf{y}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{y} & \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

De onde temos que:

$$\mathbf{h} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (\text{C.5})$$

e

$$\min \{\mathbf{e}^T \mathbf{e}\} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X} \mathbf{h} \quad (\text{C.6})$$

O método dos mínimos quadrados é empregado em várias operações de ajuste de uma curva matemática a um conjunto de dados observados. Esta explicação sobre o método coube aqui, devido a sua aplicação no método de inversão linearizada visto no capítulo 3.

## APÊNDICE D

### O método conjugado gradiente

O método conjugado gradiente, é um dos vários métodos utilizados para a resolução das equações normais obtidas através da utilização de mínimos quadrados. Entretanto, por se tratar de um algoritmo iterativo, esse método trás consigo a característica de poder ser aplicado particularmente em procedimentos de inversão interativa, oferecendo resultados mais objetivos na obtenção do mínimo desejado. O método foi utilizado na inversão dos parâmetros resistividade e espessura das camadas neste trabalho, e portanto esse apêndice tem como objetivo expor a sua filosofia de operação.

Lembremos primeiramente que o objetivo aqui é ajustar uma equação linear do tipo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h} \quad (\text{D.1})$$

onde:

$\mathbf{y}$  é o vetor dos dados observados (dados de campo)

$\mathbf{X}$  representa a matriz com valores da função linear a qual se deseja ajustar os dados

$\mathbf{h}$  é o vetor dos parâmetros a serem ajustados

O erro entre os dados observados e calculados pode ser dado da seguinte forma:

$${}^k\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X} {}^k\tilde{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -{}^k\tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

a expressão matricial do erro quadrático, é dada da seguinte forma:

$${}^kQ_h = \begin{bmatrix} 1 & {}^k\mathbf{h}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T\mathbf{Y} & \mathbf{y}^T\mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T\mathbf{y} & \mathbf{X}^T\mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ {}^k\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

onde  $-{}^k\tilde{\mathbf{h}} = {}^k\mathbf{h}$

Define-se então a expressão iterativa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ {}^{k+1}\mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ {}^k\mathbf{h} \end{bmatrix} + \lambda_{k+1} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^k\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

onde  ${}^k\mathbf{u}$  representa um vetor arbitrário não nulo.

Substituindo-se a equação (D.4) na equação matricial que define o erro na interação  $k+1$ , tem-se:

$${}^{k+1}Q_h = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^kE_h & {}^k\Delta_h \\ {}^k\Delta_h & {}^kQ_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

onde:

$${}^kE_h = {}^k\mathbf{e}^T {}^k\mathbf{e}$$

$${}^kQ_u = {}^k\mathbf{u}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} {}^k\mathbf{u}$$

$${}^k\Delta_h = {}^k\mathbf{e}^T \mathbf{X} {}^k\mathbf{u}$$

Minimizando a equação (D.5) com relação a  $\lambda_{k+1}$ , obtém-se a equação normal que pode ser apresentada na forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} {}^kE_h & {}^k\Delta_h \\ {}^k\Delta_h & {}^kQ_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{k+1}E_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Resolvendo-se para  $\lambda_{k+1}$ , obtém-se:

$$\lambda_{k+1} = -\frac{{}^k\Delta_h}{{}^kQ_u} \quad (\text{D.7})$$

Retornando-se com a equação (D.7) em (D.6), obtém-se:

$${}^{k+1}E_h = {}^kE_h \left( 1 - \frac{{}^k\Delta_h^2}{{}^kE_h {}^kQ_u} \right) \quad (\text{D.8})$$

Porque  ${}^kE_h$  e  ${}^{k+1}E_h$  são não negativos, podemos escrever:  $0 \leq \xi^2 = \frac{{}^k\Delta_h^2}{{}^kE_h {}^kQ_u} \leq 1$ . A relação de proporcionalidade inversa entre  ${}^{k+1}E_h$  e  ${}^kQ_u$ , expressa na equação (D.8), pode ser utilizada para acelerar a convergência. Para tanto, define-se  ${}^k\mathbf{u}$  da seguinte forma:

$${}^k \mathbf{u} = {}^k \mathbf{r} + \alpha_k {}^{k-1} \mathbf{u} \quad (\text{D.9})$$

onde

$${}^k \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{y} & \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ {}^k \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

é o vetor residual (gradiente) na interação  $k$ .

Substituindo-se a equação (D.9) na expressão de  ${}^k Q_u$ , tem-se:

$${}^k Q_u = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^k \mathbf{r}^T \\ {}^{k-1} \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} {}^k \mathbf{r} & {}^{k-1} \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_k \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

minimizando com relação a  $\alpha_k$  podemos escrever:

$$\alpha_k = -\frac{{}^k \Delta_u}{{}^{k-1} E_u} \quad (\text{D.12})$$

onde:

$${}^k \Delta_u = {}^{k-1} \mathbf{u} \mathbf{X}^T \mathbf{X} {}^k \mathbf{r}$$

$${}^{k-1} E_u = {}^{k-1} Q_{u, \min} = {}^{k-1} \mathbf{u}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} {}^{k-1} \mathbf{u}$$

Substituindo-se a equação (D.4) na equação (D.10), para a interação  $k+1$ , obtem-se a expressão recursiva para atualizar o vetor gradiente:

$${}^{k+1} \mathbf{r} = {}^k \mathbf{r} + \lambda_{k+1} {}^k \mathbf{q} \quad (\text{D.13})$$

onde:  ${}^k \mathbf{q} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} {}^k \mathbf{u}$

## Referências

- Chada Filho, L., 1965, Água subterrânea em rochas pré-cambriana do nordeste. Água subterrânea. Ano I, N° 3, 21-33.
- Costa, W, D, 1965, Análise dos fatores que influenciam na hidrogeologia do cristalino. Água subterrânea. Ano I, N° 4, 14-47.
- Cruz, W, B, 1974, Alguns aspectos de circulação e salinização de águas subterrâneas em rochas cristalinas do nordeste brasileiro. Min. do interior, SUDENE, Departamento de recursos naturais. Série Brasil, Hidrogeologia 8.
- Ferreira, N.R., Porsani, M.J., 1997, Inversão de sondagem elétrica vertical utilizando algoritmos genéticos combinado com inversão linearizada. 5° Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, resumos expandidos. S.P. 646-648.
- Ferreira, N.R., Porsani, M.J., 1995, Inversão linearizada de sondagem elétrica vertical utilizando norma Lp. 4° Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, resumos expandidos. R.J. 555-558
- Figueiró, W.M., 1994, Tomografia de reflexão no caso de refletor curvo. Tese de doutorado. CPGG/UFBa, Univ. Federal da Bahia.
- Figueirola, J.C., 1974, Tratado de geofísica aplicada. Madrid, 379-433.
- Goldberg, D.E., Segrest, P., 1987, Finite Markov Chain Analyses of Generic Algorithms in Genetic Algorithms and Application: Proceeding of second international conference on genetic algorithms, J.J. Grefenstette, ed., 1-8.
- Goldberg, D.E., 1989, Genetic algorithms in search, optimization and machine learning, Addison Wesley Publishing Company.
- Goldberg D.E., 1990, A note on the Boltzman tournament selection for genetic algorithms and population oriented simulated annealing: Complex Systems, 4, 445-460.
- Holland, J.H., 1975, Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, USA.
- Johansen, H, K, 1977, A man/computer interpretation system for resistivity soundings over a horizontally stratified Earth, Geophysical Prospecting 25, 667-691.
- Lines, L.R., 1981, Inversion of geophysical data, Geophysics reprint series, SEG.
- Lines, L.R., Treitel, S., 1984, Tutorial, A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems, Geophysical prospecting, 32, 159-186.

- Medeiros, W.E., 1987, Eletroresistividade aplicada a hidrogeologia do cristalino. Dissertação de mestrado CPGG/UFBa.
- Menke, W., 1984, Geophysical data analysis, Discrete inverse theory.
- Porsani, M.J., 1993, Linearized inversion with arbitrary norm. CPGG/UFBa.
- Porsani, M.J., 1995, Processamento de dados em geofísica, notas de aula. CPGG/UFBa.
- Rijo, L., Pelton, W.H., Feitosa, E.C., Ward, S.H., 1977, Interpretation of apparent resistivity data from apodi Valley, Rio Grande do Norte, Brazil. *Geophysics*, 42, 811-822.
- Santos, P.R., 1995, Inversão elástica 1-D utilizando algoritmos geneticos. Dissertação de mestrado. CPGG/UFBa, Univ. Federal da Bahia.
- Sato, H.K., 1998, Métodos elétricos, notas de aula. CPGG/UFBa. Univ. Federal da Bahia.
- Scales, J.A., Gersztenkorn, A., Treitel, S. and Lines, L.R., 1988, Robust optimization methods in geophysical inverse theory: SEG, expanded abstract, 827-830.
- Sumner, J.S., 1976, Principles of induced polarization for geophysical exploration. Elsevier scientific publishing company.
- Tarantola, A., 1987, Inverse problem theory, Methods for data fitting and model parameters estimation: Elsevier, Amsterdam.
- Valarovich M.P., Parkhomenko, E.I., 1976, Geoelectric and geothermal studies. *Kapg Geophysical monograph*.
- Ward, S.H., 1980, Resistivity and induced polarization methods. *Geotechnical and Environmental Geophysics*. 147-185.
- Whitley, D.A., A genetic algorithm tutorial. Colorado State University.