UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

INVERSÃO DE VELOCIDADES INTERVALARES USANDO DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES E ENTROPIA RELATIVA MÍNIMA

VALTER MARQUES DOS SANTOS NETO

SALVADOR – BAHIA

JULHO – 2009

Inversão de Velocidades Intervalares usando Decomposição em Valores Singulares e Entropia Relativa Mínima

por

VALTER MARQUES DOS SANTOS NETO

GEO213 – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE GEOLOGIA E GEOFÍSICA APLICADA

DO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Comissão Examinadora

Dr. Amin Bassrei - Orientador

Dr. Jessé Carvalho Costa

Dr. Milton José Porsani

Data da aprovação: 10/07/2009

Esse trabalho é dedicado aos meus pais, Olter e Vanise, pelo amor, carinho, e apoio incondicional empenhados ao longo de toda minha vida.

RESUMO

Os métodos sísmicos têm por objetivo estudar o campo de propagação de ondas elásticas no interior da terra, com o intuito de obter imagens que se aproximem das feições geológicas em subsuperfície. Devido aos bons resultados obtidos, o método sísmico de reflexão vem se destacando, ao logo dos anos, na indústria do petróleo e nos estudos geofísicos aplicados à exploração de hidrocarbonetos.

Dentro do processamento de dados sísmicos de reflexão, a análise de velocidade é uma etapa fundamental para a obtenção de imagens que se aproximem do real contexto geológico. Segundo alguns autores, a determinação do campo de velocidades intervalares é o principal dado a ser obtido através do processamento sísmico, permitindo caracterizar o meio analisado. A velocidade intervalar corresponde a velocidade de propagação do pulso sísmico em um determinado meio ou camada geológica. A determinação do campo de velocidades intervalares interfere diretamente em muitas etapas do processamento de dados sísmicos, mostrando-se de suma importância em etapas como correção de NMO, empilhamento e migração.

A forma convencional de determinação das velocidades intervalares nos pacotes de processamento de dados sísmicos é através da fórmula de Dix. A fórmula de Dix apresenta bons resultados associados a modelos geológicos simples, estratificados com camadas plano-horizontais. Nos modelos mais complexos, apresentando refletores curvos e ou camadas mergulhantes mais próximas de condições geológicas reais, a fórmula de Dix fornece uma estimativa errônea e muitas vezes longe da realidade. Uma alternativa a essa limitação é o tratamento da obtenção do campo de velocidades intervalares como um problema inverso. A formulação do problema inverso correspondente apresenta algumas vantagens em relação a abordagem convencional, a exemplo da incorporação de informação a priori a solução encontrada. A decomposição em valores singulares mostra-se uma boa alternativa na obtenção do operador de inversão em casos onde o problema é mal-condicionado, ou apresenta outras características que dificultem uma solução trivial. A utilização do princípio da entropia relativa mínima aplicada ao problema de inversão de velocidades intervalares mostra-se uma abordagem interessante e válida, pricipalmente devido ao grau de sensibilidade que possui à adição de estimativas a priori ao problema, apresentando resultados satisfatórios na determinação das estimativas finais das velocidades intervalares nos modelos estudados.

ABSTRACT

The objective of seismic methods is to study the propagation of elastic waves within the Earth and to obtain images from the subsurface features. Due to its outstanding results in the last decades, the reflexion seismic method is the most used geophysical method in the oil industry.

Among the processing steps of reflexion seismic data, the velocity analysis is crucial for the determination of images that represent the real geology in the subsurface. According to some authors the determination of interval velocities is the main output of the seismic processing, allowing to characterize the medium under study. The interval velocity is the velocity of the seismic pulse in a given medium or geologic layer. Its determination interferes with other seismic processing steps like normal move-out correction, stacking and migration.

In the seismic processing packages, the conventional approach for the determination of the interval velocities is through the Dix formula. This expression provides good results for simple geological models with horizontal layers. In more complex models, with curve reflectors and deeping layers, very common in real geologic situations, Dix formula provide an erroneous estimate, sometimes far from physical reality.

A possible alternative is to treat the determination of interval velocities as an inverse problem, with some advantages like the incorporation of prior information. We used two approaches to solve the inverse problem. First, the well known singular value decomposition showed to be a good alternative for the pseudo-inverse matrix in ill-posed problems. Second, the less known minimum relative entropy approach had a good performance, in special with its sensibility in relation to the incorporation of prior information. We applied both techniques to synthetic and real data, and in general the second approach provided better results.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Atualmente na indústria do petróleo o método sísmico de reflexão mostra-se como o pricipal método geofísico utilizado para o estudo e imageamento de subsuperfície. O método sísmico se utiliza de um conjunto de técnicas baseadas na teoria de propagação de ondas acústicas e elásticas nos diferentes meios, cujo objetivo é focado na obtenção de modelos e imagens de subsuperfície.

Assim, no contexto do processamento de dados sísmicos, a obtenção do campo de velocidades intervalares é de fundamental importância. A velocidade intervalar corresponde à velocidade de propagação do pulso sísmico em um dado meio ou camada geológica. Uma vez obtida, a estimativa precisa do campo de velocidades intervalares nos permite caracterizar o meio analisado, além de garantir resultados de maior confiabilidade quanto a qualidade da imagem obtida, e que inclusive podem abranger outras áreas do processamento de dados sísmicos, a exemplo da correção NMO e migração. Nos pacotes de processamento de dados sísmicos, as velocidades intervalares são obtidas a partir das velocidades RMS, através da fórmula de Dix. A utilização da fórmula de Dix, nesses casos, pressupõe um conjunto de condições, como modelos de interfaces plano-horizontais que, na grande maioria das vezes, não são atendidas ocasionando erros na obtenção de velocidades intervalares em modelos que apresentam mergulhos ou simplesmente refletores curvos.

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem alternativa para obtenção do campo de velocidades intervalares, através da formulação do problema inverso correspondente. A inversão de velocidades intervalares é uma abordagem que se mostra bastante eficiente e que apresenta algumas vantagens quando comparada ao método convencional, que utiliza a fórmula de Dix, a exemplo da possibilidade de incorporação de informação prévia ou a priori no processo de inversão. Esse trabalho apresenta duas abordagens diferentes para a inversão de velocidades intervalares. A utilização da decomposição em valores singulares aplicada diretamente para obtenção do operador de inversão e a utilização do conceito da entropia relativa mínima na obtenção da estimativa posterior dos parâmetros do modelo segundo o conceito de entropia aplicado na Teoria da Informação. As duas abordagens mostram-se viáveis e robustas no processo de obtenção do campo de velocidades intervalares a partir das velocidades RMS, apresentando algumas vantagens sobre o método convêncional, além de não dependerem de condições que limitem sua aplicabilidade a modelos mais complexos.

Esse trabalho está dividido da seguinte forma:

O capítulo 1 aborda os principais aspectos teóricos sobre o processo de inversão, sua formulação, os pricipais elementos envolvidos e o método dos mínimos quadrados. Este capítulo também aborda a teoria de sistemas lineares, bem como o conceito de número de condição e condicionamento de um sistema linear.

O capítulo 2 é onde falamos sobre a fórmula de Dix, suas limitações e como essas limitações podem interferir na perda de qualidade na obtenção do campo de velocidades intervalares. Neste capítulo, também apresentamos os principais tipos de velocidades usadas no processamento de dados sísmicos de reflexão, suas definições e pricipais aplicações.

O capítulo 3 apresenta alguns conceitos de álgebra linear aplicada, a exemplo da decomposição em valores singulares. Alguns desmembramentos matemáticos da teoria de decomposição em valores singulares, como o conceito de pseudo-inversa e seu relacionamento com o método dos mínimos quadrados também são demonstrados nesse capítulo.

O capítulo 4 faz um apanhado geral sobre o conceito de entropia, dando maior enfoque ao conceito relacionado a Teoria da Informação. Esse capítulo aborda alguns princípios como o da máxima entropia e entropia relativa mínima, um dos focos deste trabalho. Aspectos relevantes à aplicação do pricípio da entropia relativa mínima, aos problemas de inversão, assim como a sua implementação computacional são mostrados e discutidos nessa etapa do trabalho.

O capítulo 5 apresenta maiores detalhes a respeito da metodologia utilizada nesse trabalho, assim como a aplicação das duas abordagens propostas para o problema de inversão de velocidades intervalares. Também são apresentados os resultados obtidos em inversões de dados sintéticos unidimensionais e bidimensionais. Aspectos referentes aos resultados, limitações e vantagens entre as diferentes abordagens aplicadas aos casos estudados são apresentados nesse capítulo.

O capítulo 6 mostra os resultados obtidos na aplicação da metodologia a um dado sísmico real. Detalhes de implementação e tratamento dos dados, bem como das informações de poço utilizadas no processo de inversão são mostrados nesse capítulo. Os resultados obtidos são discutidos e comparados visando constatar a aplicabilidade e validade das diferentes abordagens apresentadas.

O capítulo 7 apresenta as principais conclusões deste trabalho.

CAPÍTULO 1

Teoria da inversão

1.1 Introdução

A geofísica trabalha basicamente com a determinação dos parâmetros de subsuperfície a partir de observações feitas em superfície. Sob uma pespectiva mais ampla, a inversão é uma forma de estimar os parâmetros de um determinado modelo ou sistema físico a partir dos dados observados. O processo de inversão é a contrapartida da chamada modelagem direta ou problema direto, onde uma vez fixados os parâmetros, facilmente obtemos as propriedades ou os dados do modelo. Essa relação entre problema direto e problema inverso pode ser facilmente entendida em termos do binômio causa-efeito. Na modelagem direta, existe uma preocupação na determinação dos efeitos em um sistema onde se conhecem as causas, enquanto que no problema inverso, o objetivo se atém a determinação das causas associadas ao efeito observado.

1.2 Teoria da inversão

Dentro do que já foi previamente apresentado, nosso objetivo agora é entrar em datalhes a respeito do ferramental matemático utilizado na inversão de dados em geofísica. É comum a utilização de equações integrais na formulação de problemas inversos. Nas equações integrais, a função icógnita (que descreve os parâmetros do modelo no problema inverso) faz parte do integrando. Um exemplo de equação intergral comumente utilizada na inversão de dados é:

$$d(x) = n(x) + \int G(x, y)m(y)dy, \tag{1.1}$$

onde:
$d(x)$ é a função que representa os dados, conhecida no processo de inversão;
$n(x)$ representa a função ruido;
$G(x, y)$ é a função kernel dependente de duas variáveis, também conhecida;
$m(y)$ a função que representa os parâmetros do modelo, função icognita.

Neste trabalho a equação integral que mais será utilizada, pois melhor representa o tipo de problemas inverso abordado, é a equação linear de Fredholm de primeira espécie:

$$d(x) = \int_a^b G(x,y)m(y)dy, \tag{1.2}$$

que é advinda da equação:

$$d(x) = \int_a^b G[x,y,m(y)]m(y)dy, \tag{1.3}$$

para o caso não linear.

A equação de Fredholm linear de primeira espécie será retomada posteriomente neste trabalho, porém na sua forma discreta.

1.3 Formulação do problema inverso linear

A formulação clássica do problema linear direto em geofísica, segundo Menke (1984) e Tarantola (1987) é:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}, \tag{1.4}$$

sendo

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, \ldots, d_M]^T, \tag{1.5}$$

e

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N]^T, \tag{1.6}$$

onde $\mathbf{d}_M$ é o vetor dos dados observados do modelo, $\mathbf{m}_N$ o vetor dos parâmetros do modelo e $G_{M\times N}$ a matriz dos coeficientas que relaciona o vetor dos dados observados com os parâmetros do modelo. Porém, na maior parte dos problemas geofísicos o que se obtem é um vetor que contém as estimativas dos parâmetros do modelo, devido a ruídos ou ao caráter indireto dos métodos geofísicos de investigação. Neste caso, passamos a ter:

$$\mathbf{d}^{calc} = g(\mathbf{m}^{est}), \tag{1.7}$$

de modo que $\mathbf{d}^{calc}$ é o vetor dos dados calculados a partir dos parâmetros estimados $\mathbf{m}^{est}$ e g é o operador não linear que faz o relacionamento entre dados e parâmetros. A matriz G no caso linear, é muitas vezes, uma aproximação do operador g. Uma vez supondo que a matriz G é conhecida, utilizando a matriz inversa e a equação 1.4, podemos chegar à formulação do problema inverso linear clássico, expresso por:

$$\mathbf{m} = G^{-1}\mathbf{d}. \tag{1.8}$$

A equação acima nos permite estimar os parâmetros de um dado modelo simplesmente a partir dos dados observados, realizando o que chamamos de inversão dos dados. Um dos problemas relacionados a esse formalismo é que a determinação do operador inverso G^{-1}, essencial à inversão, fica condicionada a matriz G possuir características especiais, como ser quadrada ou possuir posto completo. Esse tipo de condicionamento mostra-se bastante restritivo quanto a aplicação deste formalismo a problemas reais, uma vez que esses problemas normalmente apresentam operadores não quadrados ou de posto incompleto. Esse aspecto torna necessário o estudo de técnicas e estratégias de resolução aplicadas a operadores de inversão não quadrados, esparços ou de posto incompleto. Dentre essas técnicas, podemos citar a decomposição em valores singulares, que será apresentada nos próximos capítulos.

1.4 Sistemas lineares e estudo das soluções

Podemos definir um sistema de equações lineares com M equações e N icógnitas como um conjunto de equações do tipo:

$$\left\{ \begin{array}{c} g_{11}m_1 + g_{12}m_2 + \ldots + g_{1N}m_N = d_1 \\ g_{21}m_1 + g_{22}m_2 + \ldots + g_{2N}m_N = d_2 \\ \vdots \\ g_{M1}m_1 + g_{M2}m_2 + \ldots + g_{MN}m_N = d_M \end{array} \right. , \tag{1.9}$$

onde os g_{ij} são os coeficientes do sistema e o vetor $\mathbf{m}$, cujos elementos $m_1, m_2, \ldots, m_N$ satisfazem o sistema acima, é chamado de vetor solução do sistema linear. O sistema de equacões lineares pode ser representado matricialmente, e tal representação é feita da seguinte maneira:

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d}, \tag{1.10}$$

onde:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MN} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \ldots, d_M]^T, \tag{1.12}$$

e

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \ldots, m_N]^T. \tag{1.13}$$

Outra representação utilizada é a representação matricial do sistema na forma ampliada, onde utilizamos a matriz ampliada $\widetilde{G}$ onde:

$$\widetilde{G} = (G\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} & d_1 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MN} & d_M \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Levando-se em consideração a matriz G sua respectiva matriz ampliada $\widetilde{G}$ para um sistema $N \times M$ onde M é o número de icógnitas do sistema, temos:
(i) se posto(G) = posto$(\widetilde{G})$ e posto$(G) = N$, o sistema é determinado e possui solução única, o vetor $\mathbf{m}$;
(ii) se posto(G) = posto$(\widetilde{G})$ e posto$(G) < N$, o sistema é sobredeterminado e possui infinitas soluções;
(iii) se posto$(G) <$ posto$(\widetilde{G})$, o sistema é subdeterminado e não existe solução.

1.5 Número de condição

O conceito de estabilidade, associado a problemas matemáticos, está relacionado ao grau de dependência entre a solução e os dados do problema. O conceito também pode ser aplicado a problemas Geofísicos. Fica caracterizado como problema estável, o problema em que possíveis flutuações nos dados do problema não afetem significativamente a solução do mesmo. Os problemas em geofísica, de um modo geral, apresentam um tendência a instabilidade, devido a ruidos que constantemente afetam os dados medidos em superfície. Esses ruidos, muitas vezes, estão relacionados a variações instrumentais, erros analíticos, erros de medição e demais possíveis fontes que, juntamente com o caráter de investigação indireto dos métodos, contrubui para a instabilidade dos problemas em geofísica. Os problemas instáveis são caracterizados pelo fato da solução encontrada variar sensivelmente com possíveis perturbações nos dados do problema estudado. Um importante meio de fazer a avaliação do grau de estabilidade de um determinado sistema é aplicar o conceito do número de condição ao operador que faz o relacionamento entre dados e parâmetros desse sistema. O conceito do número de condição, assim como o de condicionamento, é uma forma de avaliar o grau de dificuldade inerente ao processo de inversão de um determinado sistema. É possivel contudo mostrar como o número de condição é obtido, e qual o seu significado em termos de medida de estabilidade de um determinado sistema. Vamos levar em consideração um sistema que pode ser representado por:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}, \tag{1.15}$$

a formulação do problema direto clássico anteriormente apresentada. Considerando que $\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}$ seja a representação da solução de um sistema perturbado por $\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}$, a partir da equação 1.15 obtemos:

$$\mathbf{d} + \delta\mathbf{d} = G(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}). \tag{1.16}$$

Considerando-se a equação 1.15 e que $\delta\mathbf{m} = G^{-1}\delta\mathbf{d}$, deduz-se pela Desigualdade de Shwartz, que:

$$\parallel G\mathbf{m} \parallel \;\; \leq \;\; \parallel G \parallel\parallel \mathbf{m} \parallel, \tag{1.17}$$

assim

$$\parallel \mathbf{d} \parallel \;\; \leq \;\; \parallel G \parallel\parallel \mathbf{m} \parallel, \tag{1.18}$$

e

$$\parallel \delta\mathbf{m} \parallel \;\; \leq \;\; \parallel G^{-1} \parallel\parallel \delta\mathbf{d} \parallel . \tag{1.19}$$

Das duas últimas equações é possível obter:

$$\frac{\parallel \delta\mathbf{m} \parallel}{\parallel \mathbf{m} \parallel} \;\; \leq \;\; \parallel G \parallel\parallel G^{-1} \parallel \frac{\parallel \delta\mathbf{d} \parallel}{\parallel \mathbf{d} \parallel}, \tag{1.20}$$

podemos reescrever a equação acima de modo que:

$$\frac{\parallel \delta\mathbf{m} \parallel}{\parallel \mathbf{m} \parallel} \;\; \leq \;\; NC\frac{\parallel \delta\mathbf{d} \parallel}{\parallel \mathbf{d} \parallel}. \tag{1.21}$$

A expressão acima decorre da definição do número de condição. O número de condição de uma matriz é definido como:

$$NC = \parallel G \parallel\parallel G^{-1} \parallel . \tag{1.22}$$

A interpretação do real significado associado ao número de condição vem da equação 1.21. Para um determinado erro relativo associado aos dados do modelo $\parallel \delta\mathbf{d} \parallel / \parallel \mathbf{d} \parallel$, o erro relativo da solução $\parallel \delta\mathbf{m} \parallel / \parallel \mathbf{m} \parallel$ pode admitir uma faixa maior de valores possíveis, o quanto maior for o número de condição. Desta forma, para valores do número de condição próximos de 1, temos praticamente a mesma faixa de variação entre os erros relativos dos dados e da solução, fato este que caracteriza o bom condicionamento do sistema e, por consequência, sua estabilidade. Para valores altos do número de condição, o erro relativo da solução do sistema assume uma faixa muito ampla de variação quando comparado ao erro relativo associado aos dados do modelo, uma vez que ampliado o erro relativo aos dados, observamos uma faixa de variação ainda maior do erro relativo associado à solução do sistema. Esses fatos caracterizam o mal-condicionamento do sistema, bem como a sua instabilidade. O número de condição também pode ser dado em função dos autovalores de um sistema. Segundo Hansen (1998), as normas matriciais podem ser expressas em função dos autovalores das matrizes, λ:

$$\parallel G \parallel = \lambda_1, \tag{1.23}$$

e

$$\parallel G^{-1} \parallel = \lambda_k^{-1}, \tag{1.24}$$

desta forma:

$$NC = \frac{\lambda_{\text{Máximo}}}{\lambda_{\text{Mínimo}}}. \tag{1.25}$$

De acordo com a equação acima, podemos facilmente, a partir dos autovalores associados ao sistema, determinar o grau de condicionamento e por consequência, o grau de estabilidade de um determinado problema a ser invertido.

1.6 Inversão e o método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados é comumente aplicado a sistemas sobredeterminados com o objetivo de encontrar a melhor curva de ajuste para os dados do modelo. O ajuste é feito de modo a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, a diferença entre a curva ajustada e os dados observados do modelo. A aplicação desses método, porém, fica condicionada a sitemas sobredeterminados e com a distribuição dos resíduos como uma função de densidade Gaussiana. Uma alternativa para a solução de sistemas subdeterminados é a aplicação de uma variante dos MMQ (método dos mínimos quadrados), os mínimos quadrados amortecido proposto por Levemberg (1944) e Marquardt (1963).

O nosso primeiro passo é fazer uma breve apresentação acerca do método dos mínimos quadrados, para posteriormente partirmos para uma explanação acerca dos mínimos quadrados amortecido. Nosso ponto de partida é a equação do problema direto linear clássico:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}, \tag{1.26}$$

O objetivo é encontrar uma estimativa de $\mathbf{m}$ que minimiza a função erro do problema, $E(\mathbf{m})$. Para os mínimos quadrados, a função erro fica definida como:

$$E(\mathbf{m}) = \mathbf{e} = \parallel \mathbf{d} - G\mathbf{m} \parallel_2, \tag{1.27}$$

onde $\parallel \bullet \parallel_2$ é a norma euclideana L_p, para $p = 2$. O objetivo pricipal do método dos mínimos quadrados é minimizar o somatório dos quadrados dos resíduos, esse somatório é dado pela função objetivo:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T\mathbf{e} = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T(\mathbf{d} - G\mathbf{m}), \tag{1.28}$$

$$\Phi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d}^T - \mathbf{m}^T G)^T(\mathbf{d} - G\mathbf{m}), \tag{1.29}$$

ou ainda,

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{d}^T\mathbf{d} - \mathbf{d}^T G\mathbf{m} - \mathbf{m}^T G^T\mathbf{d} + \mathbf{m}^T G^T G\mathbf{m}. \tag{1.30}$$

Minimizando a função objetivo:

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{m})}{\partial\mathbf{m}} = -G^T\mathbf{d} - G^T\mathbf{d} + 2G^T G\mathbf{m}. \tag{1.31}$$

Fazendo,

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 0, \tag{1.32}$$

finalmente obtemos:

$$2G^T\mathbf{d} = 2G^TG\mathbf{m}, \tag{1.33}$$

ou

$$\mathbf{m} = (G^TG)^{-1}G^T\mathbf{d}. \tag{1.34}$$

Como já foi dito anteriormente, este método não pode ser aplicado a sistemas subdeterminados pelo fato da matriz $(G^TG)^{-1}$ ser uma matriz singular. A partir deste momento é necessária a utilização de outro método aplicado a problemas subdeterminados, o MQA (mínimos quadrados amortecido). Repetindo os mesmos passos percorridos no caso dos mínimos quadrados convencional, temos a função objetivo para os mínimos quadrados amortecido definida como:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \alpha^2 L_2 = \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \alpha^2(\mathbf{m}^T\mathbf{m}), \tag{1.35}$$

$$\Phi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d}^T - \mathbf{m}^TG)^T(\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + \alpha^2(\mathbf{m}^T\mathbf{m}), \tag{1.36}$$

ou ainda:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{d}^T\mathbf{d} - \mathbf{d}^TG\mathbf{m} - \mathbf{d}\mathbf{m}^TG^T + \mathbf{m}^TG^TG\mathbf{m} + \alpha^2(\mathbf{m}^T\mathbf{m}). \tag{1.37}$$

Repetindo o processo de minimização da função objetivo, teremos:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 0, \tag{1.38}$$

logo,

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = -G^T\mathbf{d} - G^T\mathbf{d} + 2G^TG\mathbf{m} + 2\alpha^2\mathbf{m} = 0, \tag{1.39}$$

e

$$2G^T\mathbf{d} = 2G^TG\mathbf{m} + 2\alpha^2\mathbf{m}, \tag{1.40}$$

$$\mathbf{m}(G^TG + \alpha^2 I) = G^T\mathbf{d}, \tag{1.41}$$

finalmente, multiplicando ambos os lados da igualdade por $(G^TG + \alpha^2 I)^{-1}$, obtemos:

$$\mathbf{m} = (G^TG + \alpha^2 I)^{-1}G^T\mathbf{d}. \tag{1.42}$$

A solução acima nos permite estimar os parâmetros do modelo em função dos dados observados segundo o método dos mínimos quadrados amortecido. A função objetivo nos mínimos quadrados amortecido combina a minimização do erro associado aos dados como no MMQ convencional além de um termo relacionado ao amortecimento dos parâmetros do modelo. A solução dos mínimos quadrados amortecido é sensível e está diretamente relacionada ao parâmetro α, presente na diagonal principal do termo $\alpha^2 I$, conhecido como fator de amortecimento. A solução implica que α seja necessariamente diferente de zero, caso contrário $(G^TG + \alpha^2 I)$ se torna singular e voltamos a formulação do MMQ convencional. A escolha do parâmetro α é crucial, ele é responsavel pela relação acurácia $\times$ viabilidade da solução MQA. Valores muito pequenos de α tornam a solução mais precisa, porém compromete a viabilidade da mesma. Valores elevados de α tornam a solução viável, porém menos precisa. É possivel, ainda, estabelecer um relação entre o método dos mínimos quadrados e a matriz inversa generalizada ou pseudo-inversa da decomposição em valores singulares. Essa relacão será demonstrada no capítulo 3.

CAPÍTULO 2

Fórmula de Dix

2.1 Introdução

A fórmula para obtenção de velocidades intervalares a partir das velocidades RMS foi deduzida por Charles Hewwit Dix em 1955. Tal fórmula foi deduzida com o objetivo de obter as velocidades intervalares de um modelo geológico com camadas homogêneas plano-horizontais. A utilização da fórmula, todavia, pressupõe algumas condições que restringem sua utilização e comprometem os resultados obtidos quando aplicada em modelos que apresentam maior grau de complexidade. Neste capítulo, faremos uma breve apresentação da fórmula deduzida por Dix, suas principais caracteristicas e limitações, além de alguns aspectos sobre os diferentes conceitos de velocidade envolvidos no processamento de dados sísmicos de reflexão.

2.2 Velocidades sísmicas

No processamento de dados sísmicos de reflexão, existem diferentes conceitos de velocidades de propagação associadas a diferentes partes do processamento. Dentre esses diferentes tipos de velocidade, alguns se destacam, a exemplo da velocidade RMS, velocidade NMO, velocidade de empilhameto e, por fim, a velocidade intervalar, cuja obtenção é o pricipal objetivo desse trabalho.

2.2.1 Velocidade intervalar

O campo de velocidades intervalares é um dos principais dados a serem obtidos nos trabalhos que envolvem o processamento de dados sísmicos de reflexão. O campo de velocidades intervalares nos permite caracterizar o meio a ser estudado, e a partir dele, é possivel realizar o cálculo exato das demais velocidades envolvidas no processamento sísmico. A velocidade intervalar corresponde a velocidade de propagação do pulso sísmico em um dado meio ou camada geológica, é também a velocidade que mais se aproxima do conceito físico de velocidade de propagação no processamento de dados sísmicos. Devido a dimensão dos afastamentos utilizados na aquisição dos dados sísmicos, e por consequência a escala de estudo, a velocidade intervalar que obtemos é, na verdade, uma velocidade intervalar média, uma vez que pequenas feições como microestratificações não são perceptíveis a sísmica. Esses fatos podem também estar relacionados ao limite de resolução do método. Para um modelo simples de camadas planas e horizontais, a velocidade intervalar pode ser obtida através da fórmula de Dix, inclusive utilizando as velocidades de empilhamento e NMO, ao invés da velocidade RMS, fato este baseado em algumas considerações e simplificações. Para modelos um pouco mais complexos, a utilização da fórmula de Dix leva a erros, muitas vezes grosseiros, na determinação do campo de velocidades intervalares.

2.2.2 Velocidade RMS

Segundo Dix (1955), a velocidade RMS (*Root Mean Square*) é definida como o inverso do *slope* (inclinação) da reta tangente à curva $T_n^2(x) \times x^2$ no ponto $x = 0$. O conceito de velocidade RMS está relacionado a modelos estratificados de camadas planas e horizontais. Segundo alguns autores esse conceito está restrito a essas situações. A velocidade RMS é definida como (Dix ,1955):

$$V_{RMS,n}^2 = \left[\frac{d(T_n^2(x))}{d(x^2)}\right]_{x\to 0}^{-1}, \tag{2.1}$$

para um ponto qualquer $x \neq 0$, a velocidade RMS é dada por:

$$V_{RMS,n}^2(M) = \left[\frac{d(T_n^2(x))}{d(x^2)}\right]_{x=M}^{-1}, \tag{2.2}$$

onde M é um afastamento qualquer.

Outra abordagem define a velocidade RMS como sendo igual a uma soma quadrática média das velocidades intervalares v das camadas que o pulso sísmico percorreu, ou seja:

$$V_{RMS}^2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t v^2(t)dt, \tag{2.3}$$

ou ainda, discretizando:

$$V_{RMS}^2(k) = \frac{\sum_{k=1}^n v_k^2 t_k}{\sum_{k=1}^n t_k}. \tag{2.4}$$

A definição da velocidade RMS está relacionada a raios normais, raios que incidem verticalmente com ângulo de 90° na interface de reflexão, ou seja é um conceito ligado ao arranjo zero off-set. Segundo alguns autores a velocidade RMS trata-se apenas de uma abstração matemática, não possuindo significado físico real.

2.2.3 Velocidade NMO

Matematicamente, a velocidade NMO (*Normal Moveout*) também é definida como o inverso do *slope* da reta tangente à curva $T_n^2(x) \times x^2$ no ponto $x = 0$. Considerando Taner (1969), que diz que os tempos de chegada dos raios de uma frente de onda real podem ser dados por uma série infinita, temos:

$$T_n^2(x) = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4 + \ldots, \tag{2.5}$$

realizando o truncamento da série:

$$T_{1,n}^2(x) = C_1 + C_2x^2, \tag{2.6}$$

onde $C_1 = T_{o,n}^2$ e $C_2 = 1/V_{NMO,n}^2$, logo:

$$T_{1,n}^2(x) = T_{o,n}^2 + \frac{x^2}{V_{NMO,n}^2}, \tag{2.7}$$

onde:
$T_{o,n}$ é o tempo de trânsito inicial para $x = 0$;
$T_{1,n}$ é o tempo de trânsito para um determinado afastamento x;
$V_{NMO,n}$ a velocidade NMO na interface n.

A equação acima, deduzida por Taner, relaciona os tempos de chagada diretamente com o afastamento e a velocidade NMO. Vale resaltar, porém, que essa é uma expressão aproximada, válida apenas para pequenos afastamentos. Segundo Shah (1973), a velocidade NMO pode ser dada por:

$$V_{NMO,n}^2 = \left[\frac{d(T_n^2(x))}{d(x^2)}\right]_{x\to 0}^{-1} = \frac{1}{T_{o,n}\cos^2\beta_{o,n}} \sum_{j=1}^{n} v_j^2 t_j \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\cos^2\alpha_k}{\cos^2\beta_k}. \tag{2.8}$$

Para um modelo de camadas planas e horizontais, os ângulos de incidência a transmissão, respectivamente α e β, são iguais a zero. Desta forma, a equação acima reduz-se a equação 2.4, ou seja, a velocidade RMS pode ser considerada como um caso particular da velocidade NMO em modelos geológicos plano-estratificados. Em suma, as velocidades RMS e NMO possuem uma grande similaridade. A diferença fundamental entre as duas é que a velocidade NMO é admitida em modelos estratificados não horizontais e que possuam interfaces curvas enquanto que o conceito de velocidade RMS não admite essas considerações, sendo, a rigor, aplicados a modelos simples plano-horizontais.

2.2.4 Velocidade de empilhamento

A determinação da velocidade de empilhamento corresponde a encontrar a velocidade que produz máxima coerência entre os traços corrigidos do efeito de afastamento. A velocidade de empilhamento é a velocidade usada na correção NMO, sendo a velocidade responsável pela remoção do efeito de afastamento fonte-receptor nos dados sísmicos. Após aplicação da chamada correção NMO, é possível obter a seção sísmica dita zero-offset, ou seja, a seção sísmica que simula a condição de afastamento nulo entre fonte e receptor. Na correção NMO aplicada a dados sísmicos, alguns algoritmos utilizam a velocidade RMS ou NMO ao invés da velocidade de empilhamento, baseando-se em algumas considerações e simplificações. Essas considerações nem sempre são válidas, o que muitas vezes acaba por ocasionar erros no processo de correção, ou até mesmo redução na qualidade da seção sísmica empilhada. Existe uma forma de minimizar os efeitos dessa simplificações feitas ao usar a velocidade RMS na correção NMO. Para tanto, é nescessário utilizar o conceito de bias existente entre a velocidade RMS e a velocidade de empilhamento. O bias entre velocidade RMS e velocidade de empilhamento é definido como:

$$B_n = V_{s,n} - V_{RMS,n}, \tag{2.9}$$

onde o bias é obtido da seguinte maneira:

$$B_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^4 t_k - V_{RMS,n}^4 T_{o,n}\right) x_e}{8 V_{RMS,n}^5 T_{o,n}^3} \tag{2.10}$$

onde:
$x_e = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^2$;
x_i é o afastamento do traço i;
m é o número de traços empilhados;
v_k a velocidade intervalar na camada k.

O conceito de bias nos permite estipular um relação entre os valores de velocidade RMS e velocidade de empilhamento, essa relação permite corrigir os valores de velocidade RMS usados na correção NMO. O valor de correção do bias é função da velocidade RMS mas também é função da velocidade intervalar, o que mais uma vez ressalta a importância de uma boa estimativa do campo de velocidades intervalares.

2.3 Fórmula de Dix

A fórmula de Dix, como é conhecida, foi deduzida a partir de um modelo geológico simples, de camadas com interfáces planas, horizontais e homogêneas em 1955 por Charles Hewitt Dix, com objetivo de determinar as velocidades individuais de propagação do pulso sísmico nas camadas do modelo a partir das velocidades RMS, como são conhecidas hoje.

A utilização da fórmula de Dix é condicionada a modelos simples. A aplicação da fórmula em modelos que apresentam mergulhos ou simplesmente refletores curvos pode estar associada a erros na determinação do campo de velocidades intervalares. Esses erros são maiores quanto maior for a diferença entre o modelo estudado e o modelo da camadas planas e horizontais. A depender da complexidade do modelo estudado, esses erros podem

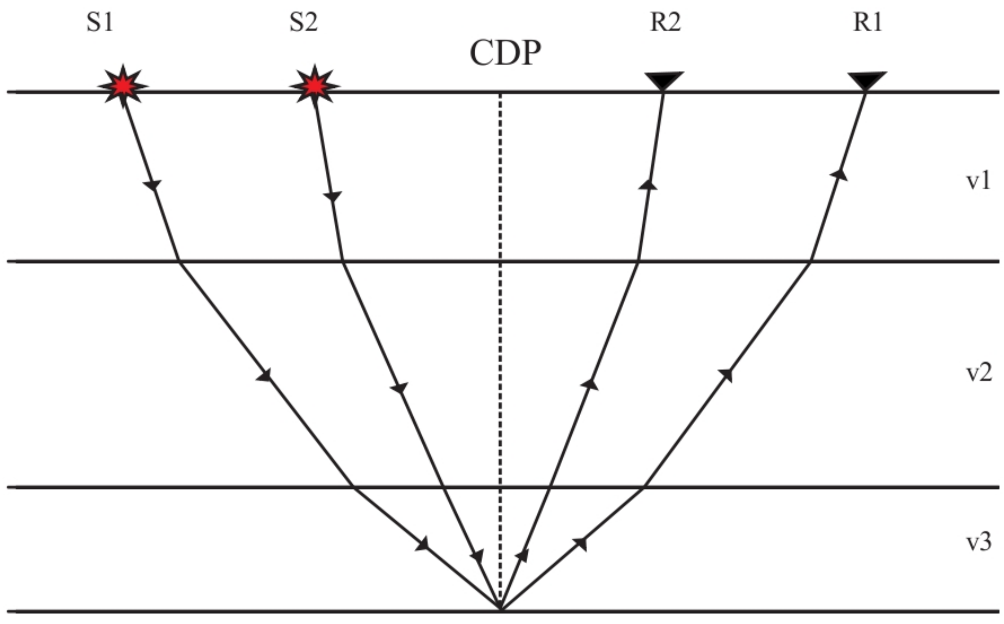

Figura 2.1: Modelo de camadas plano-horizontais

ser inaceitáveis, tanto na sua aplicação voltada a determinação do campo de velocidades intervalares, quanto na conversão tempo-profundidade.

A Figura 5.1 representa um modelo geológico de camadas plano-horizontais, para o qual a fórmula de Dix foi deduzida. As fórmulas para cálculo das velocidades intervalares e espessuras das camadas, para um modelo estratificado plano-horizontal, podem ser obtidas a partir das seguintes expressões:

$$V_{RMS,n}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} v_j^2 t_j}{\sum_{j=1}^{n} t_j}, \tag{2.11}$$

$$T_{o,n} = \sum_{j=1}^{n} t_j = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{v_j}, \tag{2.12}$$

$$t_n = T_{o,n} - T_{o,n-1}, \tag{2.13}$$

$$d_n = \frac{1}{2} v_n t_n, \tag{2.14}$$

$$d_n = \frac{v_n (T_{o,n} - T_{0,n-1})}{2}, \tag{2.15}$$

a partir das equações acima, facilmete obtemos fórmula de Dix:

$$v_n^2 = \frac{V_{RMS,n}^2 T_{o,n} - V_{RMS,n-1}^2 T_{o,n-1}}{T_{o,n} - T_{o,n-1}}, \tag{2.16}$$

onde:

v_n é a velocidade intervalar na camada n;
t_n é o tempo duplo de trânsito dentro da camada n, considerando-se incidência normal;
$T_{o,n}$ é o tempo duplo de trânsito da origem até a interface n, considerando-se afastamento nulo entre fonte e receptor;
d_j é a espessura da camada n;
$V_{RMS,n}$ é a velocidade RMS da interface n.

Desta forma, fica difinida a obtenção da estimativa do campo de velocidades intervalares a partir das velocidades RMS obtidas para um modelo da camadas plano-horizontais, segundo a aplicação da fórmula de Dix. Maiores detalhes sobre as limitações da aplicação da fórmula de Dix serão apresentados na etapa de discursão dos resultados obtidos entre as metodologias.

CAPÍTULO 3

Decomposição em Valores Singulares

3.1 Introdução

A decomposição em valores singulares é uma poderosa técnica, usada na obtenção de matrizes e operadores inversos usualmente encontrados em problemas multivariáveis e na análise de sistemas estacionários, auxiliando na estratégia de obtenção dos operadores inversos de suas respectivas matrizes de funções de tranferência.

A utilização da decomposição em valores singulares é facilmente justificada, nesses casos, devido a sua precisão e a possibilidade de utilização em problemas que envolvem relativo grau de complexidade dos operadores matriciais envolvidos, tais como mal-condicionamento e posto incompleto. Outro aspecto favorável à utilização da decomposição em valores singulares quanto a sua implementação e análise computacional mostra-se no fato da mesma apresentar-se bastante robusta e estável a erros numéricos e possíveis flutuações.

Neste capítulo abordaremos o conceito da decomposição em valores singulares, seus fundamentos, aspectos teóricos, propriedades, assim como todo o tratamento matemático necessário para o seu entendimento.

3.2 Autovalores e autovetores

O estudo dos autovalores e autovetores é de fundamental importância em algebra aplicada, estando intimamente ligado ao estudo de transformações lineares. O estudo das tranformações lineares permite, por exemplo, descrever a evolução de um determinado sistema em diferentes instantes de tempo. Tomando como exemplo um sistema hipotético, o seu estado pode ser determinado em qualquer instante de tempo pela variável x, pertencente a um espaço vetorial V. A transformação linear A transforma o estado x em V para o estado $A(x)$ também em V, ou seja: $A : V \to V$. De um modo geral, no estudo de sistemas reais, o espaço vetorial V possui dimensões muito amplas, o que muitas vezes torna inviável seu estudo como um todo. Uma estratégia, porém, habitualmente usada na solução desse tipo de problema, é a substituição desses espaços complexos por sub-espaços menores e mais simples, reescrevendo todo o sistema em função dessas variáveis ou combinações de variáveis. Do ponto de vista algébrico, isso corresponde a encontrar um subespaço V_o de V, de dimensão pequena, tal que $A(x)$ esteja em V_o sempre que x também esteja em V_o. Isso possibilitaria, então, estudar o problemas mais simples inerentes a natureza da transformação linear em espaços menores. Toda essas considerações, todavia, podem ser sintetizadas em encontrar um vetor não-nulo x (autovetor) e um escalar λ (autovalor) de modo que (Noble e Daniel, 1986):

$$Ax = \lambda x. \tag{3.1}$$

A transformação linear A transforma um subespaço V_o de dimensão um, gerado por x, nele próprio. Para encontrar um autovetor x associado a um autovalor, é necessário escolher λ de modo que a equação 3.1 tenha solução x não-nula, ou seja:

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{3.2}$$

Por fim, é preciso garantir que a matriz $A - \lambda I$ para $x \neq 0$ seja singular, desta forma:

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{3.3}$$

A partir do determinante da equação 3.3, obtemos o chamado polinômio característico. Na solução do polinômio encontramos os autovalores e, por fim, os autovetores associados. As estratégias de solução aplicada a sistemas naturais utilizando a teoria de auto-sistemas relacionados aos subespaços invariantes V_o de uma transformação linear A, muitas vezes, se resumem a uma forma de simplificar o estudo e facilitar o entendimento acerca dos sistemas reais complexos.

3.3 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares, do inglês *Singular Value Decomposition* (SVD), trata-se de um conceito generalizado do teorema espectral aplicado à matrizes e operadores em sistemas lineares. O teorema espectral permite decompor uma matriz $A_{N\times N}$ em um tipo especial de produto de acordo com a formulação:

$$A = P\Lambda P^{-1}, \tag{3.4}$$

onde A é uma matriz normal por definição, $P_{N\times N}$ uma matriz não-singular formada pelos autovetores de A e $\Lambda_{N\times N}$ uma matriz diagonal formada pelos autovalores associados da matriz A. A generalização do conceito do teorema espectral onde A é não quadrada, ou possui posto incompleto, e P é uma base ortonormal qualquer, nos leva a um conceito mais amplo e generalizado de decomposição, a decomposição em valores singulares.

Dada uma matriz $A_{M\times M}$ qualquer, é possível obter os autovalores e os autovetores associados mediante aplicação do algoritmo proposto inicialmente por Lanczos (1961). A aplicação do algoritmo proposto por Lanczos nos permite a construção de uma matriz simétrica particular S, de modo que:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}M \\ \}N \end{array} . \tag{3.5}$$

A obtenção dos autovalores e autovetores da matriz A é feita mediante a formulação de um sistema envolvendo a matriz S, como mostrado na equação 3.6.

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_i \\ \hline v_i \end{array}\right) = \lambda_i \left(\begin{array}{c} u_i \\ \hline v_i \end{array}\right), \tag{3.6}$$

resolvendo o sistema:

$$Av_i = \lambda_i u_i, \tag{3.7}$$

$$A^T u_i = \lambda_i v_i, \tag{3.8}$$

substituindo 3.7 em 3.8 obtemos:

$$AA^T u_i = \lambda_i^2 u_i, \tag{3.9}$$

$$A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i. \tag{3.10}$$

Se AA^T e $A^T A$ são ambas hermitianas, os autovetores u_i e v_i são ortogonais e os autovalores λ_i são valores reais. Considerando U e V, as matrizes formadas pelos autovetores normalizados u_i e v_i, respectivamente, e Σ a matriz diagonal formada pelos autovalores associados, de acordo com a equação 3.7, podemos escrever:

$$AV = U\Sigma. \tag{3.11}$$

No entanto, A é uma matriz $M \times N$, V é $N \times N$, U é $M \times M$ e Σ, segundo a equação 3.6, possui dimensão $M + N$. No entanto, para que a equação 3.11 esteja corretamente balanceada, alguns dos $M + N$ autovalores da matriz Σ deverão ser nulos. No caso em que $M > N$ temos no máximo M autovalores, esse fato nos permite realizar o redimensionamento das matrizes da equação 3.11, como mostrado na Figura 3.1 (Hatton, 1986).

Finalmente, ao multiplicar os dois lados da equação 3.11 por V^T, obtemos:

$$A = U\Sigma V^T. \tag{3.12}$$

A equação acima é conhecida como decomposição em valores singulares de A. Para uma matriz $A_{M\times N}$ retangular, de posto k, definimos formalmente os elementos da decomposição em valores singulares de modo que:
$U_{M\times M}$ é a matriz formada pelos autovetores ortonormalizados da matriz AA^T;

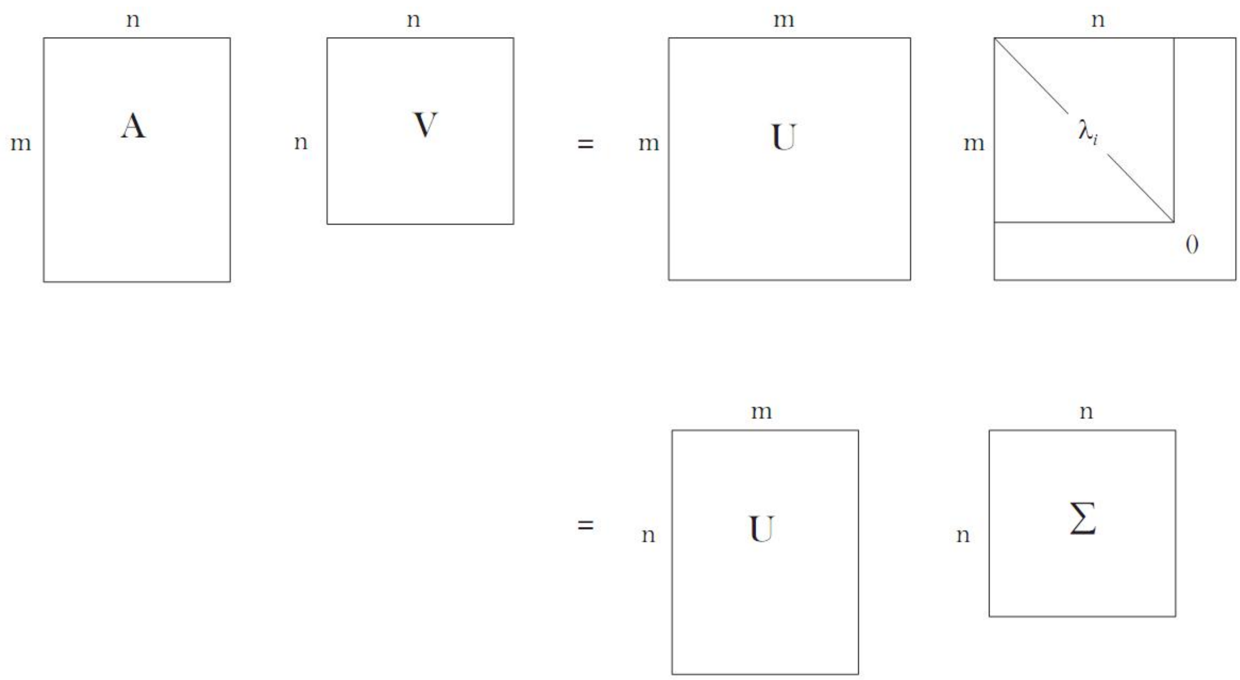

Figura 3.1: Redimencionamento das matrizes envolvidas na equação 3.11.

$\Sigma_{M \times N}$ a matriz diagonal que contém os valores sigulares, a raiz quadrada dos autovalores, da matriz $A^T A$;
$V_{N \times N}$ a matriz formada pelos autovetores ortonormalizados da matriz $A^T A$.

Um dos aspectos mais relevantes associados à teoria de decomposição em valores singulares é a obtenção da matriz pseudo-inversa ou matriz de Moore-Penrose (Penrose, 1955). A matriz de Moore-Penrose denotada por A^+, trata-se de uma generalização da matriz inversa A^{-1} no caso em que A é não quadrada ou de posto incompleto. A matriz inversa generalizada pode ser encontrada mediante a seguinte formulação:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T, \tag{3.13}$$

se U e V são matrizes quadradas e ortogonais, então:

$$A^+ A = V \Sigma^+ U^T U \Sigma V^T = I \tag{3.14}$$

A matriz $A^+_{N \times M}$ é a matriz de Moore-Penrose e $\Sigma^+_{N \times M}$ a matriz que contém o inverso dos valores singulares da matriz $A^T A$, da seguinte forma:

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

sendo $E_{k \times k}$ uma matriz diagonal quadrada com dimensão igual ao posto da matriz A, e que tem como elementos e_{ii}, o recíproco dos valores singulares de A na diagonal principal, isto é:

$$e_{ii} = \sigma_i^{-1}. \tag{3.16}$$

de modo que E, para $1 \leq i \leq k$, fica definida como:

$$E = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \sigma_k^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

A decomposição em valores singulares se mostra uma técnica que utiliza um conceito de decomposição bastante generalizado, podendo ser feita em função de bases ou espaços vetoriais convenientes. O produto principal da SVD, a matriz pseudo-inversa, apesar de mostrar-se única não implica em bases vetoriais únicas, ou seja, $U_{M\times M}$ ou matriz *input* e $V_{N\times N}$ ou matriz *output* não são necessariamente únicas, podendo ser escolhidas convenientemente. Algumas das condições que garantem a uncidade da matriz inversa genaralizada serão abordadas na próxima seção.

3.4 Condições de Penrose

O estudo das condições de Penrose nos permite caracterizar de modo único (garantir a unicidade) a matriz inversa generalizada de uma matriz $A_{M\times N}$ qualquer. Seja A e A^+, definidas como nas equações 3.12 e 3.13, uma matriz $X_{N\times M}$ é a matriz inversa generalizada A^+ de A se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} AXA &= A \\ XAX &= X \\ (AX)^T &= AX \\ (XA)^T &= XA \end{aligned} \tag{3.18}$$

É importante resaltar que a matriz X que obdece as quatro condições de Penrose, fica definida como única em relação a matriz A, mesmo que U e V não sejam únicas de um modo geral.

3.5 Mínimos quadrados e a inversa generelizada

Essa etapa do trabalho tem por objetivo demonstrar a possibilidade de integração entre a SVD e o método dos mínimos quadrados, bem como suas implicações. A solução dos MMQ via a SVD possui norma mínima, cuja função objetivo é dada por:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathbf{m}^T\mathbf{m} + \mathbf{t}^T(\mathbf{d} - G\mathbf{m}), \tag{3.19}$$

onde $\mathbf{t}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. Maiores detalhes a cerca da utilização dos multiplicadores de Lagrange serão apresentados no capítulo 4. Aplicando o mesmo processo de minimização ao qual é submetido o MMQ convencional:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 2\mathbf{m} - G^T\mathbf{t} = 0, \tag{3.20}$$

logo:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} G^T \mathbf{t}. \tag{3.21}$$

Substituindo a equação 3.21 na equação 1.26, obtemos:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} G G^T t, \tag{3.22}$$

ou ainda

$$\mathbf{t} = 2(GG^T)^{-1}\mathbf{d}, \tag{3.23}$$

substitindo a equação acima na equação 3.21:

$$\mathbf{m} = G^T(GG^T)^{-1}\mathbf{d}, \tag{3.24}$$

ou

$$\mathbf{m} = G^T(GG^T)^{+}\mathbf{d}, \tag{3.25}$$

utilizando o conceito da matriz inversa generalizada, e as equações 3.12 e 3.13:

$$\mathbf{m} = V\Sigma^T U^T (U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T)^{+}\mathbf{d}, \tag{3.26}$$

ao levarmos em consideração as propriedades de ortonormalidade de U, $U^TU = I$, de V, $V^TV = I$, alem do fato de $V = (V^T)^+$, chegamos a solução MMQ (Hanson e Lawson, 1974):

$$\mathbf{m} = V\Sigma^{+}U^T\mathbf{d}, \tag{3.27}$$

onde finalmente obtemos a solução dos mínimos quadrados escrita em função dos termos da SVD de G. Uma das implicações da integração da SVD aos mínimos quadrados é a possibilidade de incorporação de informação prévia ou a priori ao processo de inversão. Para o caso em que se deseja incluir informação a priori ao processo a função objetivo fica definida como:

$$\Phi(\mathbf{m}) = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_o)^2 + 2\mathbf{t}^T(\mathbf{d} - G\mathbf{m}), \tag{3.28}$$

onde $\mathbf{m}_o$ é a informação prévia do modelo e $\mathbf{t}$ o vetor dos multiplicadores de Lagrange. Minimizando a função, obtemos:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 2(\mathbf{m} - \mathbf{m}_o) + 2G^T\mathbf{t} = 0, \tag{3.29}$$

logo:

$$\mathbf{m} = G^T\mathbf{t} + \mathbf{m}_o. \tag{3.30}$$

Se substituirmos a equação 3.30 na equação 1.26, temos que:

$$\mathbf{d} = G(G^T\mathbf{t} + \mathbf{m}_o), \tag{3.31}$$

ou

$$\mathbf{d} - G\mathbf{m}_o = GG^T\mathbf{t}. \tag{3.32}$$

Da equação acima, é possível isolar os multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{t} = (GG^T)^{-1}(\mathbf{d} - G\mathbf{m}_o), \tag{3.33}$$

ao substituir o valor isolado do vetor dos multiplicadores de Lagrange na equação 3.30 obtemos:

$$\mathbf{m} = G^T(GG^T)^{-1}(\mathbf{d} - G\mathbf{m}_o) + \mathbf{m}_o, \tag{3.34}$$

a expressão que nos permite a incorporação de informação prévia ao processo de inversão do operador que faz o relacionamento entre os dados e os parâmetros do modelo utilizando a SVD. Observa-se que a informação a priori $\mathbf{m}_o$ é incorporada duas vezes ao resultado final do parâmetro invertido, primeiro sendo multiplicada pelo operador do sistema e subtraida dos dados observados, e posteriormente adicionada, individualmente, aos parâmetros após a inversão do operador.

CAPÍTULO 4

Entropia Relativa Mínima

4.1 Introdução

Entropia é um conceito muito amplo e que envolve diferentes áreas do conhecimento. Sob um ponto de vista geral, a entropia está relacionada ao grau de organização, nitidez e a probabilidade dos sistemas. A entropia nos sistemas tende a aumentar, o que resulta em uma tendência natural a perda de nitidez, a passagem a estágios de maior probabilidade, enfim, os sistemas tendem naturalmente a se deteriorar. Segundo Jaynes (1957), a entropia é um conceito primitivo, mais fundamental até mesmo que o conceito de energia. O conceito mais conhecido de entropia esta relacionado a física, o conceito de entropia segundo Clausius e Boltzmann na Termodinâmica. O conceito de entropia usado nesse trabalho difere do conceito Termodinâmico. A entropia na Teoria da Informação foi um conceito aplicado por Shannon (1949), com a finalidade de medir a quantidade de informação em um sistema, assim como a sua desorganização. A apresentação do conceito de entropia segundo a Teoria da Informação, da base matemática nescessária ao seu entendimento, e das implicações da técnica serão os pricipais objetivos desse capítulo.

4.2 O conceito de entropia na Teoria da Informação

O conceito de entropia aplicado a Teoria da Informação proposto por Shannom (1949), caracteriza a entropia como a medida de informação de um determinado sistema. Essa medida está relacionada com a quantidade de informação produzida em um sistema, assim como sua a taxa de produção. Para uma fonte m emitindo $m_1, m_2, \ldots, m_N$ mensagens, as probabilidades associadas são $p_1, p_2, \ldots, p_N$, onde $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$. Antes do experimento existe uma incerteza inerente ao não conhecimentos dos resultados, essa incerteza desaparece após o experimento sendo transformada em informação ganha (Rietsch, 1988). O experimento em que as mensagens são equiprováveis, garante a maior possibilidade de eventos, a máxima incerteza e, por consequência, a máxima entropia. Por esse motivo:

$$p_i = \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Teremos uma grandeza H responsável pela medida da incerteza do sistema, de modo que:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = A(n), \tag{4.2}$$

sendo que $A(n)$ trata-se de uma variável intermediária. Segundo a idéia de maximização da incerteza, podemos decompor t^n escolhas em n escolhas equiprováveis de t:

$$A(t^n) = nA(t). \tag{4.3}$$

Segundo Shannon (1949), nossa variável $A(t)$ pode ser definida como:

$$A(t) = -Klog(t), \tag{4.4}$$

onde onde K é um número positivo. Passamos a considerar a escolha de n possibilidades com probabilidades mensuráveis $p_i = n_i / \sum_1^n n_i$, sendo n_i, valores inteiros. Associando a medida de incerteza a todo conjunto de probabilidades, ou seja, $t = \sum n_i$, e lembrando que a probabilidade total de um sistema pode ser escrita como o somatório das probabilidades individuais envolvidas, temos:

$$Klog \sum_1^n n_i = H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + K \sum_1^n p_i log\ n_i, \tag{4.5}$$

$$H = K(\sum_1^n p_i log \sum_1^n n_i - \sum_1^n p_i log\ n_i) = -K \sum_1^n p_i log \frac{n_i}{\sum_1^n n_i}, \tag{4.6}$$

logo:

$$H(m) = -K \sum_1^n p_i log\ p_i. \tag{4.7}$$

Desta forma, definimos a entropia associada a fonte do sistema. É possivel observar que a entropia é função da probabilidade da mensagem, ou:

$$H(m) = K \sum_1^n \frac{1}{n} log(n), \tag{4.8}$$

$$H(m) = log(n), \tag{4.9}$$

onde definimos a entropia em função do número de escolhas. Um conceito importante associado ao conceito de entropia é o de negentropia. A negentropia é a simples negativa da entropia, ou seja, é a medida de ordem de um sistema. Os conceitos são a contraposição um do outro, a entropia do sistema sempre aumenta, assim como seu grau de desordem. A negentropia representa a quantidade de energia dos sistemas, que sempre diminui, assim como seu grau de organização. A negentropia é definida como:

$$\mathcal{N}(m) = -H(m). \tag{4.10}$$

De um modo geral, os sitemas tendem a um estado de equilíbrio, o estado mais provável ou de menor energia, ou seja, de máxima entropia. Essa tendência a máxima entropia e a máxima degradação da energia mostra-se como uma tendência natural dos sitemas, uma lei universal da natureza.

4.3 Entropia relativa mínima (ERM)

O pricípio da entropia relativa mínima (PERM), do inglês *Minimum Relative Entropy* (MRE), é um conceito generalizado a partir do princípio da máxima entropia (ME) proposto por Jaynes (1957), conceito de fundamental importância na Teoria da Informação. A principal diferença entre a ME e o PERM é o conhecimento e incorporação da função densidade de probabilidade prévia ou a priori, associada a entropia relativa mínima. Segundo Shore e Johnson (1980), a minimização da entropia relativa equivale a maximização da entropia quando a função densidade de probabilidade é uniforme. A informação I, contida em cada mensagem m_i, é definida para entropia relativa mínima como:

$$I = \log[\frac{q(x)}{p(x)}], \tag{4.11}$$

onde $q(x)$ é a função densidade de probabilidade posterior e $p(x)$ a função densidade de probabilidade prévia. Nessa equação é possivel observar que a quantidade de informação contida em uma mensagem cresce com a probabilidade dita posterior. Para o caso contínuo, a entropia relativa fica definida como, Wiener (1948):

$$H(q,p) = \int q(x)\log[\frac{q(x)}{p(x)}]dx. \tag{4.12}$$

O objetivo na entropia relativa mínima é encontrar uma estimativa final q, de modo que:

$$H(q,p) = min\ H(q',p). \tag{4.13}$$

sendo q' a função densidade de probabilidade verdadeira. A função densidade de probabilidade (FDP) q que procuramos, minimiza a entropia relativa entre q' e p. Maiores detalhes acerca da aplicação do PERM aos problemas de inversão serão abordados no próximo tópico.

4.4 Aplicação da ERM em problemas de inversão

Uma vez apresentados os aspectos relevantes sobre o conceito geral de entropia e entropia relativa mínima, nosso objetivo passa a ser apresentar o princípio de entropia relativa mínima aplicada aos problemas de inversão, um dos focos principais deste trabalho. O ponto de partida para aplicação do PERM nos problemas inversos é a integral de Fredholm para o caso contínuo, anteriormante apresentada. A intergral de Fredholm representa o tipo de problema inverso que iremos abordar (Ulrych et al, 1990):

$$d_j = \int_a^b G_j(u)m(u)du, \tag{4.14}$$

onde nosso objetivo é obter uma estimativa $\tilde{m}(u)$ de $m(u)$ que satisfaz a equação acima. Discretizando a equação acima, e substituindo $m(u)$ por sua estimativa final $\tilde{m}(u)$, temos:

$$d_j = \sum_{n=0}^{N} G_j(u_n)\tilde{m}(u_n)\Delta u, \tag{4.15}$$

nosso u_n fica definido como:

$$u_n = (b-a)(\frac{n}{N}) + a, \tag{4.16}$$

e

$$\Delta u = u_{n+1} - u_n = \frac{b-a}{N}. \tag{4.17}$$

A equação discreta de Fredholm pode ser reescrita como:

$$\frac{d_j}{\Delta u} = \sum_{n=0}^{N} G_j(n)\tilde{m}(n), \tag{4.18}$$

sendo u função de n. Nosso vetor $\tilde{m}(n)$ é um vetor que armazena valores de $m(n)$, de modo que:

$$\tilde{m}(n) = \int_0^\infty m(n)q(\mathbf{m})d\mathbf{m}, \tag{4.19}$$

assim sendo,

$$\frac{d_j}{\Delta u} = \int_0^\infty q(\mathbf{m})[\sum_{n=0}^{N} G_j(n)m(n)]d\mathbf{m}, \tag{4.20}$$

$q(\mathbf{m})$ é a função densidade de probabilidade associada a $\mathbf{m}$. A partir deste momento, denotamos $s(u)$ como uma estimativa inicial do modelo $m(u)$ no processo de inversão, nosso a priori. Agora é necessário desenvolvermos uma relação entre nossa estimativa inicial do modelo, o modelo $m(n)$ e $q(\mathbf{m})$ que estamos procurando. O que fazemos é escolher uma função densidade de probabilidade inicial $p(\mathbf{m})$ que possua entropia relativa mínima em relação a outra FDP uniforme, condição que garante a equivalência entre a minização da entropia relativa e a máximização da entropia. A FDP inicial sujeita a restrições apresenta valores esperados do modelo, $s(n)$. A FDP inicial proposta por Shore (1981) para esses casos é:

$$p(\mathbf{m}) = \prod_{n=0}^{N} \frac{1}{s(n)} e^{-\frac{m(n)}{s(n)}}. \tag{4.21}$$

Nosso objetivo agora é realizar a minimização da entropia de $q(\mathbf{m})$ relativa a $p(\mathbf{m})$. Essa minização tem de estar sujeita a restrições, como a restrição de normalização aplicada a $q(m)$:

$$\int_0^\infty q(\mathbf{m})d\mathbf{m} = 1. \tag{4.22}$$

Associado ao problema de minização com restrições em relação a $q(\mathbf{m})$, é necessário a utilização dos multiplicadores de Lagrange. O próximo passo é a contrução da função objetivo, que será dada por:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{m}) = &\int_0^\infty q(\mathbf{m})\log[\frac{q(\mathbf{m})}{p(\mathbf{m})}]d\mathbf{m} + \mu[\int_0^\infty q(\mathbf{m})d\mathbf{m} - 1] \\ &+ \sum_{j=1}^{M} \lambda_j[\int_0^\infty q(\mathbf{m})\sum_{n=0}^{N} G_j(n)m(n)d\mathbf{m} - \frac{d_j}{\Delta u}].\end{aligned} \tag{4.23}$$

O primeiro termo da nossa função objetivo é a integral da entropia relativa. O segundo termo, a menos do multiplicador de Lagrange μ, é a própria condição de restrição da equação 4.22. Parte significativa do terceiro termo advém diretamente da integral de Fredholm reescrita na equação 4.20. Minimizando a função objetivo temos:

$$0 = \int_0^\infty \{\log[\frac{q(\mathbf{m})}{p(\mathbf{m})}] + 1 + \mu + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \sum_{n=0}^{N} G_j(n) m(n)\} d\mathbf{m}, \tag{4.24}$$

logo nosso integrando é nulo, assim:

$$\log[\frac{q(\mathbf{m})}{p(\mathbf{m})}] + 1 + \mu + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \sum_{n=0}^{N} G_j(n) m(n) = 0, \tag{4.25}$$

da definição de logaritmo, obtemos:

$$q(\mathbf{m}) = p(\mathbf{m}) e^{-1-\mu-\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \sum_{n=0}^{N} G_j(m) m(n)} , \tag{4.26}$$

reescrevendo a equação acima, invertendo os somatórios e fazendo uma mudança de variável de modo que $c = e^{-1-\mu}$,

$$q(\mathbf{m}) = cp(\mathbf{m}) e^{-\sum_{n=0}^{N} m(n) \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)} . \tag{4.27}$$

Escrevendo a equação acima em termos de produtório temos:

$$q(\mathbf{m}) = cp(\mathbf{m}) \prod_{n=0}^{N} e^{-m(n) \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)}, \tag{4.28}$$

substituindo a estimativa da FDP inicial para o problema de minimização com restrições (equação 4.21) na equação acima obtemos:

$$q(\mathbf{m}) = c \prod_{n=0}^{N} \frac{1}{s(n)} e^{-m(n)[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)]} , \tag{4.29}$$

aplicando a restrição de normalização da equação 4.22 a equação 4.29, e posteriormante resolvendo a integral, Shore e Johnson (1983):

$$c \prod_{n=0}^{N} \frac{1}{s(n)} \int_0^\infty e^{-m(n)[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)]} d\mathbf{m} = 1, \tag{4.30}$$

$$-c \prod_{n=0}^{N} \frac{1}{s(n)} \Big[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)\Big]^{-1} e^{-m(n)[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)]} \Big|_0^\infty = 1, \tag{4.31}$$

chegamos a uma expressão para c,

$$c = \prod_{n=0}^{N} \Big[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)\Big], \tag{4.32}$$

subtituindo a expressão acima na equação 4.28,

$$q(\mathbf{m}) = \prod_{n=0}^{N} \Big[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)\Big] e^{-m(n)[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)]} \; . \tag{4.33}$$

Desta forma, o que obtemos é a tão procurada estimativa da FDP posterior. O próximo passo é subtituir a expressão da FDP $q(\mathbf{m})$ na expressão do valor esperado do modelo. Substituindo 4.33 em 4.19:

$$\tilde{m}(n) = \int_0^\infty m(n) \prod_{n=0}^{N} \Big[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)\Big] e^{-m(n)[\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)]} d\mathbf{m}, \tag{4.34}$$

para facilitar a solução da intergral faremos uma mudança de variável, renomeando os termos não dependentes de $\mathbf{m}$ do integrando, de modo que:

$$\alpha = \frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n), \tag{4.35}$$

logo:

$$\tilde{m}(n) = \int_0^\infty m(n) \prod_{n=0}^{N} \alpha e^{-m(n)\alpha} d\mathbf{m}, \tag{4.36}$$

a solução desta integral é feitas usando integração por partes,

$$\int_0^\infty u dv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du,$$

com:

$$u = m(n),\ du = dm(n),\ dv = e^{-m(n)\alpha} dm(n) \text{ e } v = -\frac{1}{\alpha} e^{-m(n)\alpha},$$

Deste modo:

$$\tilde{m}(n) = -\frac{1}{\alpha} m(n) e^{-m(n)\alpha}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-m(n)\alpha}, \tag{4.37}$$

$$\tilde{m}(n) = \Big[-\frac{1}{\alpha} m(n) e^{-m(n)\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\alpha} e^{-m(n)\alpha}\Big]\Big|_0^\infty, \tag{4.38}$$

assim

$$\tilde{m}(n) = \alpha^{-1}, \tag{4.39}$$

$$\tilde{m}(n) = \frac{1}{1/s(n) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)},\ n = 1, \ldots, N \tag{4.40}$$

sendo:
$\tilde{m}(n)$ a estimativa final dos parâmetros do modelo via ERM;
$s(n)$ uma estimativa inicial, o a priori dos parâmetros do modelo;
$G_j(n)$ a matriz kernel do problema direto;
λ_j os multiplicador de Lagrange, definidos a partir do problema de minimização com restrições.

Finalmente, chegamos a expressão que nos permite obter a estimativa final dos parâmetros do modelo através do PERM. A partir da integral discreta de Fredholm que descreve o problema direto abordado:

$$d_j = \sum_{n=0}^{N} G_j(n)\tilde{m}(n),\ j = 1\ldots, M. \tag{4.41}$$

chegamos a formulação do problema direto segundo a ERM.

$$d_j = \sum_{n=0}^{N} G_j(n)\frac{1}{1/s(n) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_j(n)},\ j = 1, \ldots, M \tag{4.42}$$

Podemos observar que no processo de obtenção da estimativa final do modelo, a partir da ERM, além dos dados de entrada, uma estimativa inicial é incorporada, alimentando a inversão em cada passo do processo. A estimativa final obtida é tão próxima quanto possível da estimativa inicial, levando em consideração os critérios de convergência usados pelo algorítmo da ERM discutidos anteriormente.

4.5 Implementação da ERM

De acordo com a abordagem do problema inverso segundo a ERM, passamos de um problema linear, como descrito no primeiro capítulo, para um problema não linear, como é descrito pelo sistema de equações 4.42. Em nosso novo problema, o objetivo é encontrar os multiplicadores de Lagrange λ_j associados a minização com retições aplicadas a $q(\mathbf{m})$ na função objetivo do problema. Os multiplicadores de Lagrange são encontrados através do método de Newton-Rapshon para um sistema de equações não lineares. O método de Newton-Rapshon é um método interativo que tem como objetivo encontrar as raizes de uma equação ou sistema de equações. Nosso próximo passo é apresentar alguns aspectos importântes acerca desse método. Primeiro será necessário reescrever os dados do problema como uma função Φ_j função de λ_j, de modo que:

$$\Phi_j(\lambda_j) = d_j,\ j = 1, \ldots, M. \tag{4.43}$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor truncada da equação 4.43, chegamos a equação recursiva do método de Newton-Rapshon, em nosso caso aplicado a um sistema de equações não lineares (Press at al ,1992):

$$\Phi_j(\lambda_j^{(k)}) = \Phi_j(\lambda_j^{(k-1)}) + \sum_{s=1}^{M} \frac{\partial \Phi_j(\lambda_j^{(k-1)})}{\partial \lambda_s^{(k-1)}} \Delta\lambda_s^{(k)}, \tag{4.44}$$

onde os índice superiores em λ_j representam as interações. Os multiplicadores de Lagrange são atualizados da seguinte forma:

$$\lambda_j^{(k)} = \lambda_j^{(k-1)} + \Delta\lambda_j^{(k)}. \tag{4.45}$$

Utilizando a definição feita da função Φ_j na equação 4.43, a partir da equação 4.44, podemos escrever:

$$d_j = d_{j-1} + \sum_{s=1}^{M} \frac{\partial \Phi_j(\lambda_j^{(k-1)})}{\partial \lambda_s^{(k-1)}} \Delta\lambda_s^{(k)}, \tag{4.46}$$

se $\Delta d_j = d_j - d_{j-1}$, então:

$$\Delta d_j = \sum_{j=1}^{M} H_{js} \Delta\lambda_s^{(k)},\ j = 1, \ldots, M. \tag{4.47}$$

de modo que cada elemento H_{js}, pertencente a matriz sensibilidade H, é definido como:

$$H_{js} = \frac{\partial \Phi_j(\lambda_j^{(k-1)})}{\partial \lambda_s^{(k-1)}}, \tag{4.48}$$

a matriz sensibilidade é calculada numéricamente. Segundo a equação 4.47, facilmente obtemos:

$$\Delta\lambda_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{M} H_{js}^{-1} \Delta d_j,\ j = 1, \ldots, M. \tag{4.49}$$

o fator de incremento para atualização dos multiplicadores de Lagrange. Uma vez apresentada as equações do método, apresentaremos os passos do algorítmo e seu funcionamento.

Passo 1: `Forneça ao algoritmo o vetor de dados observados` d_o; `a estimativa inicial do modelo` m_p `e a matriz` G.

Passo 2: `Atribua os valores iniciais as variáveis` $\lambda_j = 0$ `e` $\tilde{m} = m_p$.

Nesse passo, fixamos o vetor dos parâmetros estimados como sendo igual ao vetor de estimativa inicial para começo do processo interativo. Nosso vetor m_p possui mesmo significado do vetor $s(n)$ apresentado anteriormente, a nossa estimativa inicial ou a priori do modelo.

Passo 3: `Armazene o valor do modelo para comparação posterior`, $\tilde{m} = \tilde{m}^(0)$.

Passo 4: `Calcule a matriz` H `e o vetor` Δd.

O vetor Δd_j, é o vetor diferença entre os dados observados e os dados calculados para o modelo inicial m_p e a matriz G.

Passo 5: `Inverta a matriz` H.

Passo 6: `Calcule` $\Delta\lambda_s^{(k)}$

A equação 4.49 nos permite realizar o cálculo do incremento $\Delta\lambda_s^{(k)}$ a partir de H_{js}^{-1} e Δd.

Passo 7: `Faça a atualização dos multilplicadores de Lagrange`.

A etapa de atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita usando a equação recursiva 4.45.

Passo 8: `Calcule o novo vetor de dados calculados`.

Após o cálculo do novo vetor de dados calculados é preciso fixar um critério de parada para o processo. Fixamos que caso a condição:

$$\sum_{j=1}^{M}(d_j - d_o) \leq \epsilon, \tag{4.50}$$

seja satisfeisfeita, o processo interativo para, caso contrário, o processo volta ao passo 3 onde que atualizamos o modelo estimado, e todo o processo é repetido até que a critério de parada seja satisfeito. O erro ϵ é definido de acordo com a precisão desejada. Uma vez satisfeito o critério de parada, obtemos os valores de λ_j que finalmente são substituidos na equação 4.40 para obtenção dos parâmetros estimados do modelo, objetivo pricipal desse método.

No entanto, é necessário fazer uma observação em relação aos passos 5 e 6 do algoritmo. O algoritmo apresentado é baseado no código descrito por Johnson (1983), utilizando a inversão da matriz Hessiana H para obtenção do incremento $\Delta\lambda_s^{(k)}$. A implementação feita nesse trabalho utilizou uma alternativa mais barata computacionalmente, através da solução do sistema linear da equação 4.47, calculando a estimativa do incremento $\Delta\lambda_s^{(K)}$ que satisfaz a equação através da decomposição LR.

CAPÍTULO 5

Metodologia e aplicação em dados sintéticos

5.1 Introdução

Este capítulo está relacionado a aplicação dos conceitos da decomposição em valores singulares, e entropia relativa mínima ao problema de inversão de velocidades intervalares aplicado a dados sísmicos de reflexão. Além do que foi anteriormente apresentado, mais alguns aspectos teóricos serão discutidos, assim como possíveis detalhes a respeito da etapa de aplicação e implementação da decomposição em valores singulares e entropia relativa mínima. Aspectos referentes a metodologia utilizada, assim como alguns dos resultados obtidos, aplicados a modelos sintéticos unidimensionais e bidimensionais, serão apresentados e comparados com os resultados obtidos pela utilização direta da fórmula de Dix.

5.2 Dados sintéticos unidimensionais

A primeira situação em que realizamos a aplição das metodologias propóstas, foi para o estudo do modelo de camadas planas com incidência vertical. O modelo sitético estudado inicialmente é consideravelmente simples e unidimensional. Esse estudo inicial teve apenas como propósito a caracterização do comportamento das diferentes técnicas e parâmetros aplicados ao problema. No entanto, é preciso definir alguns aspectos inerentes a aplicação das metodologias ao problema de obtenção do campo de velocidades intervalares. A primeira metodologia usada para todos os casos apresentados nesse trabalho, foi a aplicação direta da fórmula de Dix aos dados de velocidade RMS, a abordagem clássica. As velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix, foram posteriormente comparadas com os resultados obtidos pela inversão usando a decomposição em valores sigulares e entropia relativa mínima.

Na abordagem clássica, as velocidades intervalares são obtidas diretamente através dos pares tempo e velocidade RMS. Na formulação do problema inverso existe uma pequena diferença quanto ao formalismo usado, os dados de entrada possuem um caráter diferente. Lembrando a formulação vetorial clássica do problema direto abordado:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}, \tag{5.1}$$

definimos nosso vetor de dados **d** como (Bassrei, 1990):

$$d_i = T_i V_{RMS}^2(T_i),\ i = 1, \ldots, M. \tag{5.2}$$

ou seja, nosso dado de entrada é o produto dos quadrados das velocidades RMS pelos seus respectivos tempos. Além dos dados de entrada, é necessário definir o vetor **m**, o vetor dos parâmetros do modelo. O vetor **m** é definido como:

$$m_j = v_j^2,\ j = 1, \ldots, N. \tag{5.3}$$

onde v é a velocidade intervalar.

A primeira situação abordada, trata-se de um modelo sintético constituido de um CDP onde as velocidades intervalares e RMS crescem linearmente com o tempo.

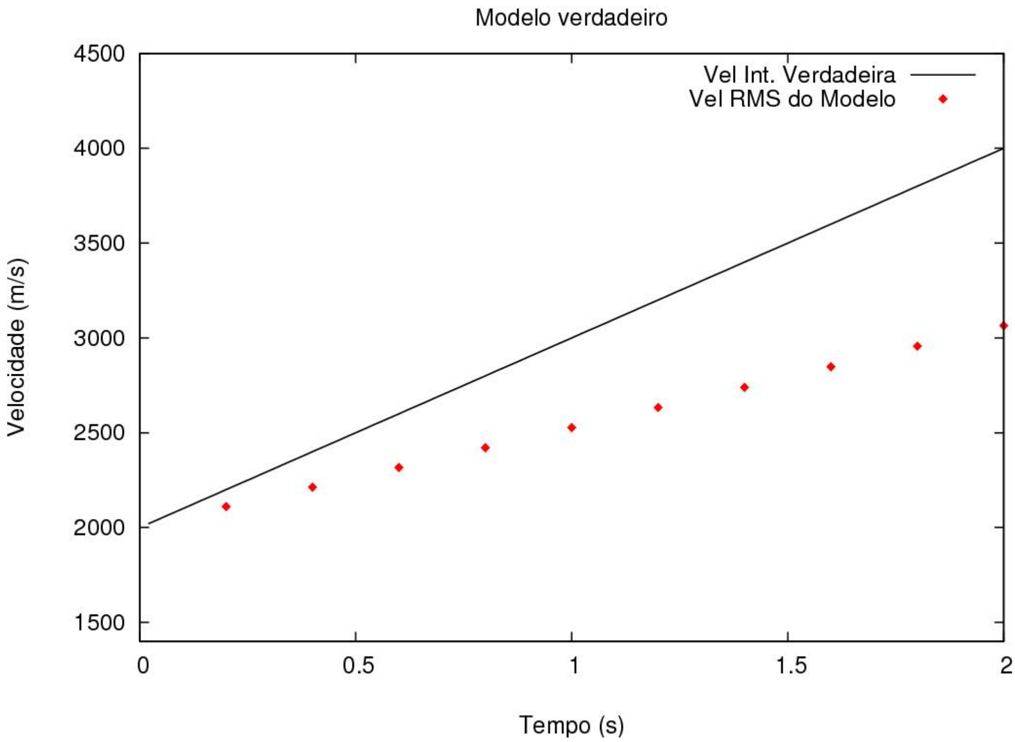

Figura 5.1: Primeiro modelo sintético unidimensional.

A Figura 5.1 mostra o modelo sintético estudado inicialmente. Posteriormente, foram realizados os cálculos para obtenção das estimativas das velocidades intevalares do modelo segundo a fórmula de Dix, e segundo aplição da SVD ao problema inverso com incorporação de informação a priori. No entanto, antes de discutir os resultados obtidos, é importante definir o critério de erro utilizado para avaliar o desempenho dos métodos, assim como dos resultados obtidos. O critério de erro utilizado é o erro RMS relativo. Para os dados do modelo fica definido como:

$$\varepsilon_{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(d_i^{obs} - d_i^{cal})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(d^{obs})^2}}, \tag{5.4}$$

onde d^{obs} é o vetor de dados observados do modelo e d^{calc} o vetor de dados calculados.

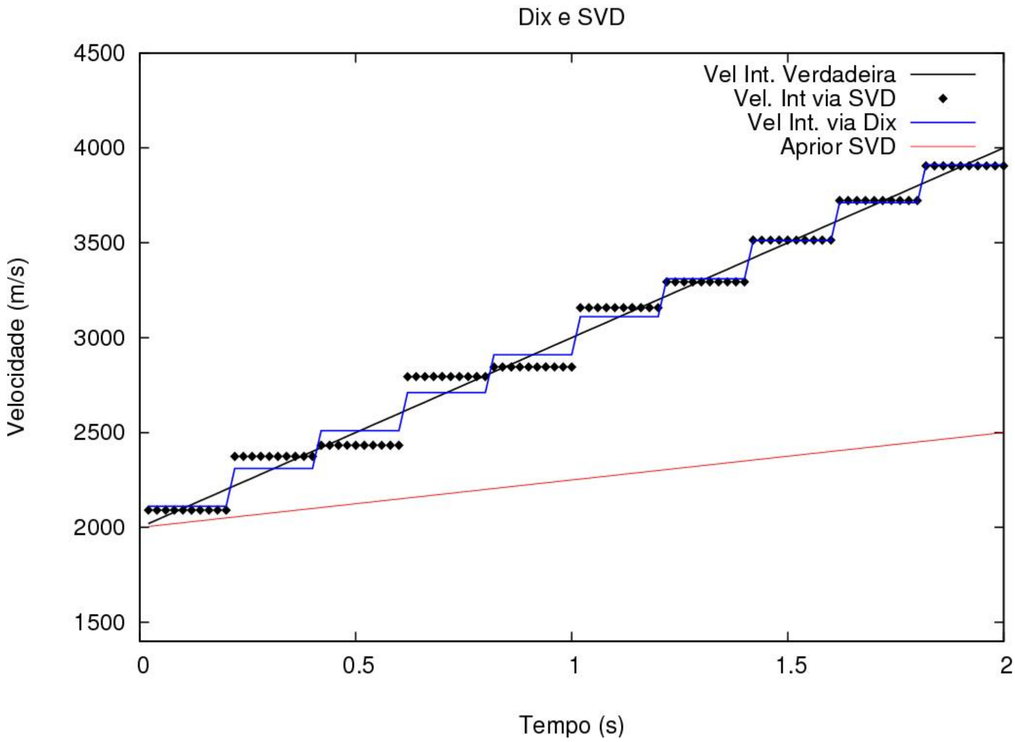

Figura 5.2: Velocidades intervalares obtidos pela fórmula de Dix e pela SVD.

A Figura 5.2 mostra as velocidades intervalares obtidas através da aplicação direta da fórmula de Dix, e os resultados obtidos pela inversão usando a SVD. O erro RMS entre as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e as velocidades verdadeiras do modelo foi de $1,87\%$. Os resultados envolvendo a SVD apresentaram erro de $2,47\%$ utilizando um a priori com erro de $28,46\%$ em relação ao modelo verdadeiro. Um resultado razoável, levando em consideração o a priori utilizado. A etapa posterior foi a aplicação do pricípio da entropia relativa mínima ao problema, a primeira inversão feita usando a MRE utilizou a priori constante. A Figura 5.3 mostra os resultados obtidos pela inversão usando MRE com a priori constante.

Na Figura 5.3, o erro entre o a prior e as velocidades intervalares verdadeiras do modelo é de 37.95%. Um aspecto importante sobre o resultado apresentado nessa figura é que ambas metodologias (Dix e MRE) apresentaram mesmo erro em relação ao modelo verdadeiro, $1,87\%$. Os resultados são idênticos. Esse resultado é muito importante, mostra que para valores constantes do a priori na inversão usando o princípio da entropia relativa mínima, a

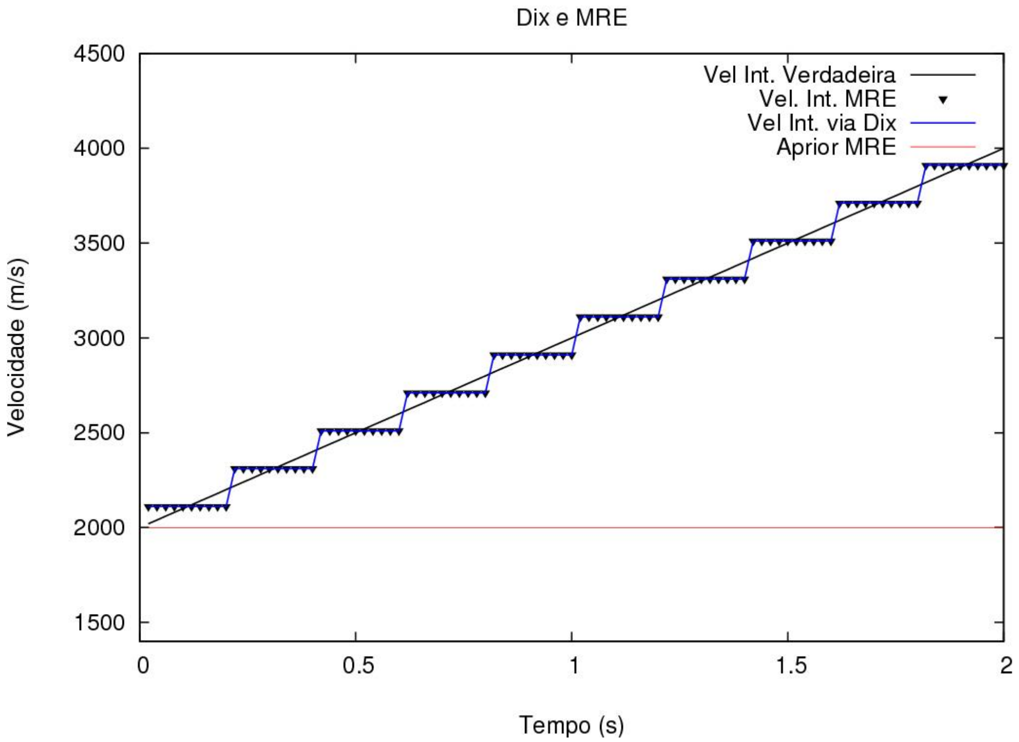

Figura 5.3: Velocidades intervalares obtidos pela fórmula de Dix e pela MRE (com a priori constante).

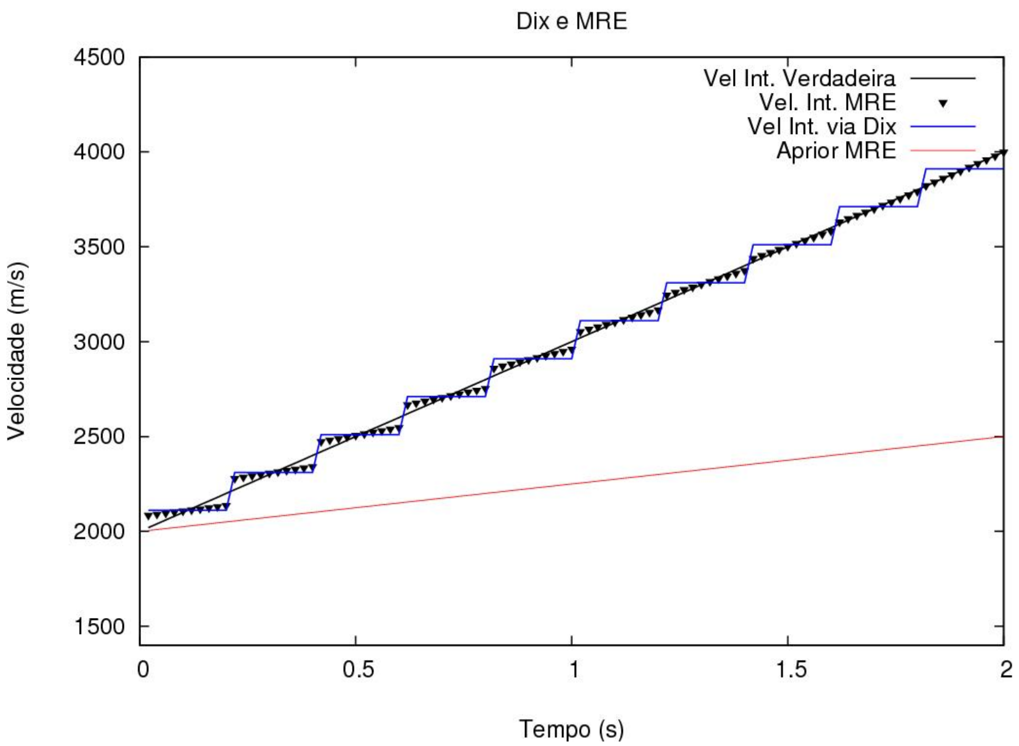

Figura 5.4: Velocidades intervalares obtidos pela fórmula de Dix e pela MRE.

mesma se restringe a fórmula de Dix. A fórmula de Dix pode ser considerada como um caso particular da aplicação da MRE ao problema de inversão de velocidades intervalares, vide apêndice.

A Figura 5.4 apresenta o resultado obtido para o mesmo modelo inicial, porém, com valores de a priori não constantes, iguais ao a priori usado na SVD, Figura 5.2. O erro entre o a priori usado e as velocidades verdadeiras do modelo é de $28,46\%$, o erro entre as velocidades intervalares obtidas pela inversão usando a MRE é de $0,84\%$, contra $1,87\%$ da fórmula de Dix. O resultado obtido pela abordagem MRE foi ótimo, pricipalmente ao levarmos em consideração o alto valor de erro inerente ao a priori utilizado.

O passo seguinte foi a determinação de um modelo unidimensional mais complexo. A curva de velocidades intervalares fixada no novo modelo unidimensional representa um meio geológico consideravelmente complexo, apresentando várias inversões de velocidade ao longo do tempo. O novo modelo unidimensional estudado pode ser observado na Figura 5.5.

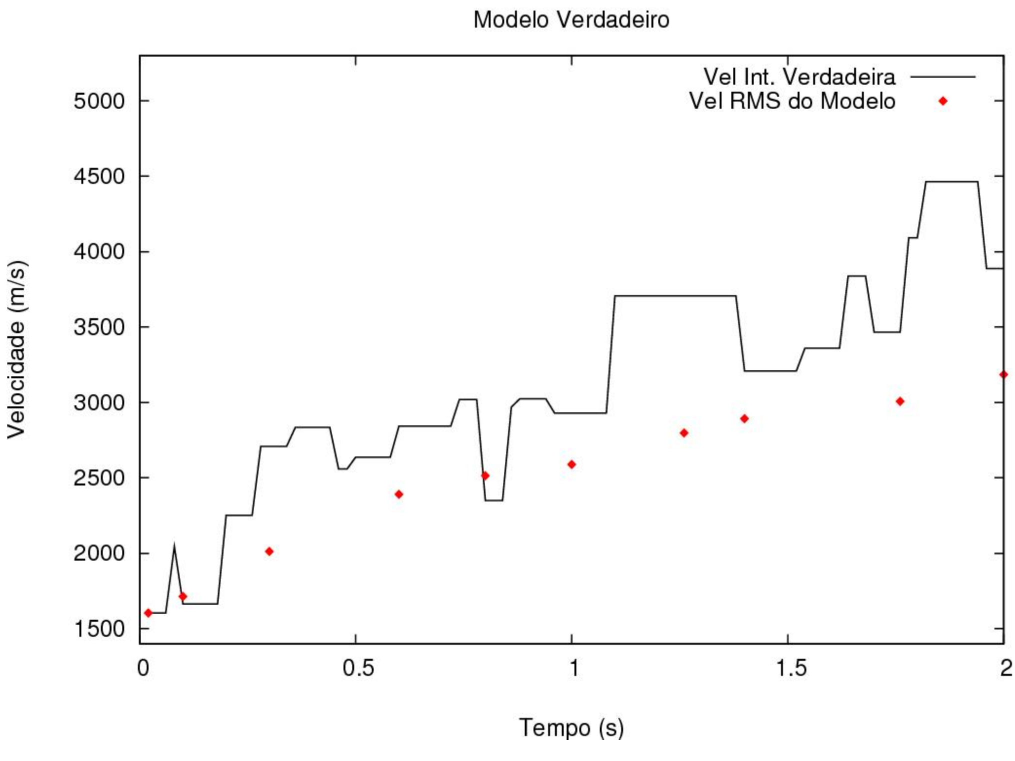

Figura 5.5: Segundo modelo sintético unidimencional.

Ao compararmos o modelo da Figura 5.5 com o modelo da Figura 5.1 é possível observar que nesse caso as velocidades RMS não foram tomadas de modo uniforme, como é possível observar na Figura 5.1. Esse fato é devido a maior complexidade do modelo, demandando uma melhor escolha das velocidades RMS, a exemplo da análise de velocidades realizada em dados sísmicos bidimensionais.

A Figura 5.6 mostra os resultados obtidos mediante a utilização da SVD aplicada ao

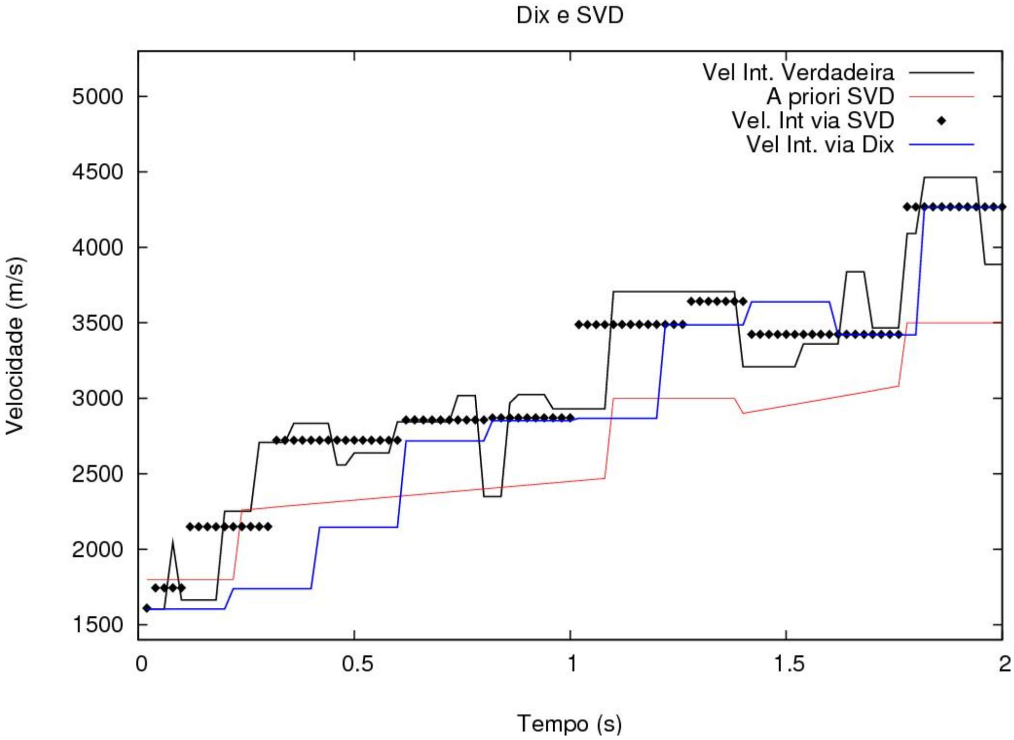

Figura 5.6: Velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela SVD.

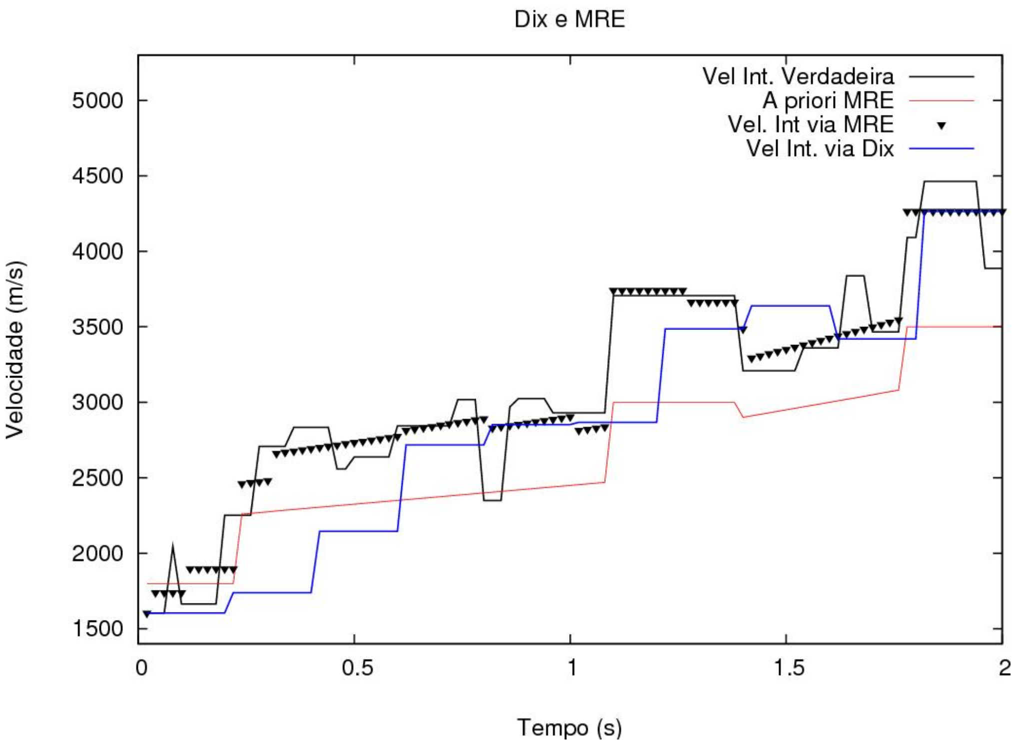

Figura 5.7: Velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela MRE.

kernel do novo modelo. Nesse caso, o erro entre o a priori usado e as velocidades intervalares verdadeiras do modelo é de $16,86\%$, as velocidades obtidas pela fórmula de Dix apresentaram erro de $14,46\%$, enquanto que as velocidades intervalares obtidas pela SVD apresentaram erro de $7,92\%$.

Na Figura 5.7 é apresentado o resultado obtido pela MRE. O a priori usado foi o mesmo usado na SVD, com erro de $16,86\%$. O erro entre as velocidades intervalares obtidas pela MRE e as velocidades intervalares verdadeiras do modelo foi de $5,79\%$, contra $14,46\%$ da fórmula de Dix.

O próximo passo é verificar a robustes dos métodos. A avaliação da robustes das diferentes abordagens usadas nesse trabalho pode ser feita mediante a adição de ruído aos dados observados. Um método dito robusto, não apresenta grandes variações na precisão da solução obtida (erro da solução) na presença de níveis aceitáveis de ruído nos dados observados. Os dados observados do modelo foram contaminados com $1,4\%$ de ruído, um valor razoável se tratando de erro RMS. O modelo, assim como os dados contaminados por ruído podem ser observados na Figura 5.8.

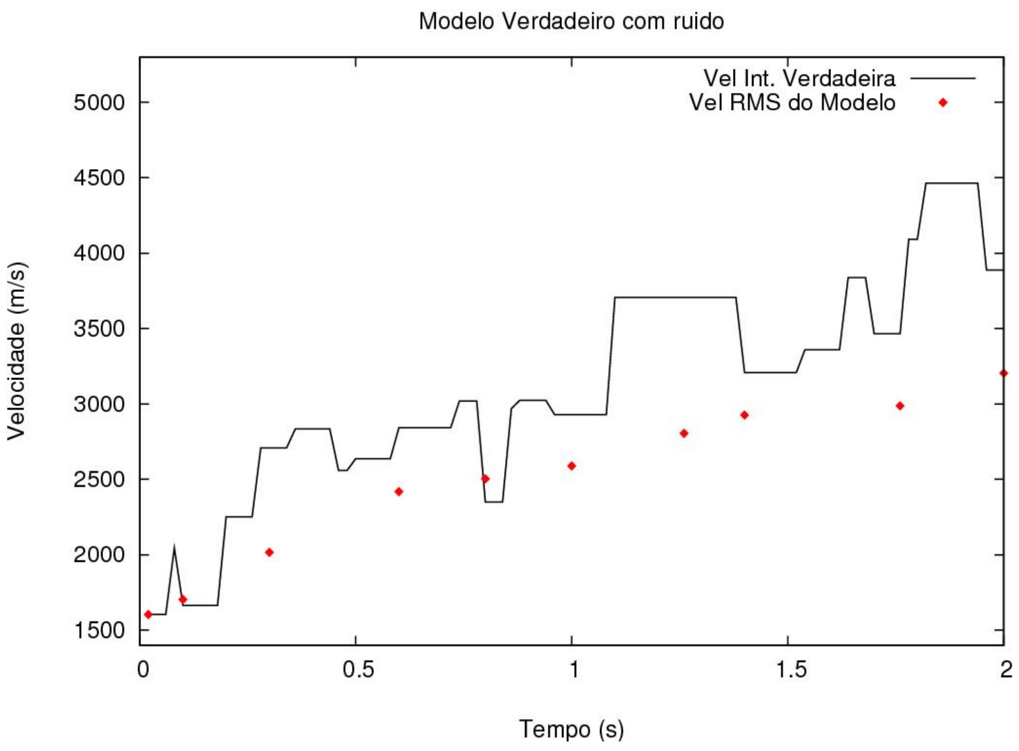

Figura 5.8: Modelo sintético unidimensional contaminado com ruído.

O ruído adicionado aos dados observados tem caráter Gaussiano. O ruído Gaussiano apresenta uma distribuição de valores aleatórios que responde a uma função de densidade de probabilidade dita normal ou Gaussiana.

A adição de ruídos aos dados observados é feita da seguinte forma:

$$d_i^n = d_i^{obs} + \gamma n_i d_i^{obs}, \tag{5.5}$$

ou

$$d_i^n = d_i^{obs}(1 + \gamma n_i), \ i = 1, \ldots, M. \tag{5.6}$$

onde:
d_i^n é o dado contaminado com ruído;
d_i^{obs} o dado observado;
γ o fator de ruído, fator que controla o nível de ruído adicionado;
n_i uma sequência aleatória com valores que variam de $-0,5$ a $0,5$.

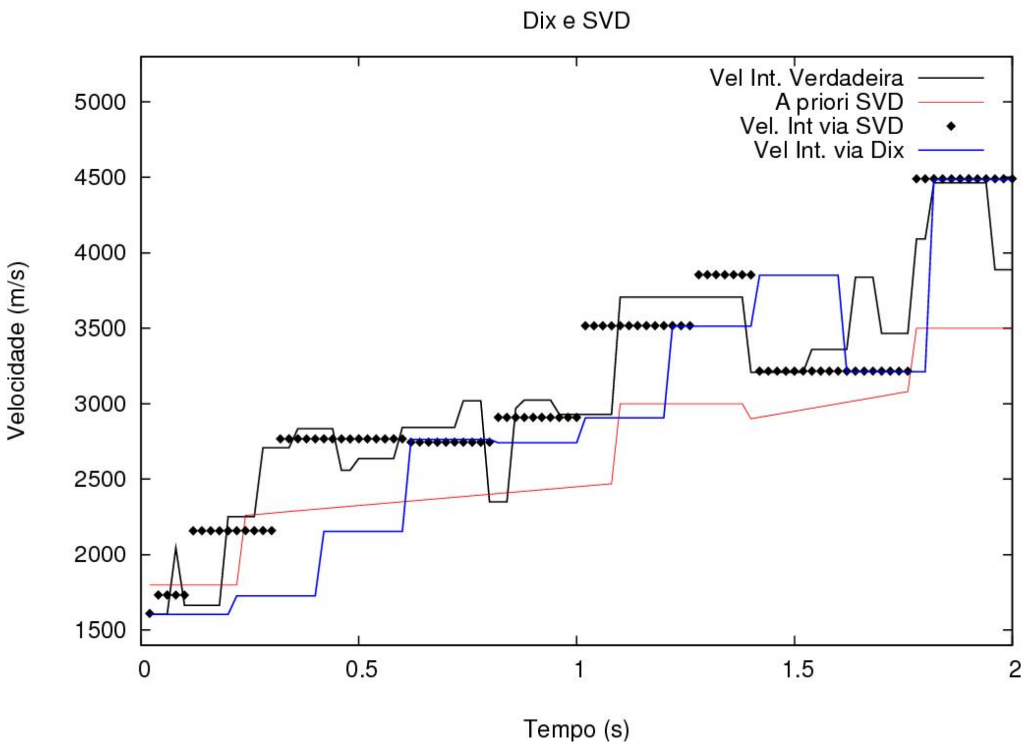

Figura 5.9: Velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela SVD (com ruído).

A Figura 5.9 mostra a resposta da SVD e da fórmula de Dix a adição de ruído aos dados observados do modelo. Os resultados obtidos através da fórmula de Dix apresentaram erro de $15,65\%$, enquanto que os resultados provenientes da aplicação da SVD apresentam erro de $9,01\%$ em relação as velocidades verdadeiras do modelo.

Na Figura 5.10 observamos os resultados obtidos pela aplicação da MRE aos dados contaminados com ruído. Os resultados obtidos pela aplicação do princípio da entropia relativa mínima aos dados contaminados apresentou erro de $7,22\%$, contra $15,65\%$ apresentado pela utilização da fórmula de Dix. Simulações feitas com o aumento linear do nível de ruído adicionado aos dados observados do modelo mostraram que o erro entre os resultados obtidos pela SVD e MRE em relação ao modelo verdadeiro também cresce de modo linear. Esse fato constata a robustez dos métodos SVD e MRE quanto a adição de ruído aos dados do modelo.

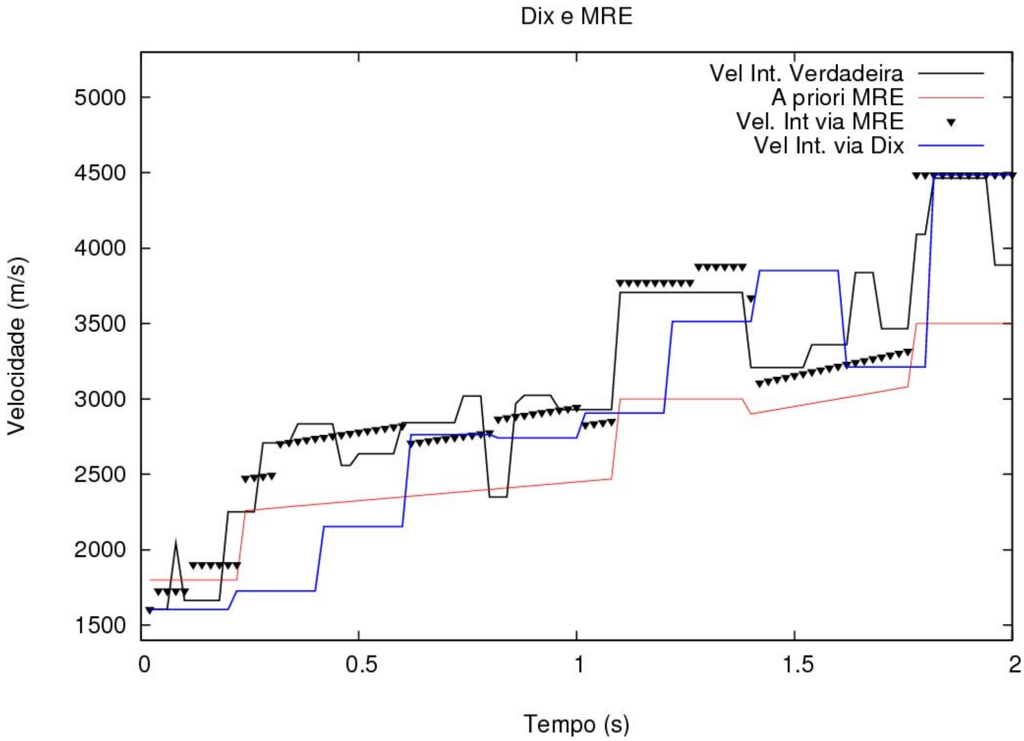

Figura 5.10: Velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela MRE (com ruído).

5.3 Dado sintético bidimensional

A etapa de aplicação das metodologias a dados bidimensionais foi iniciada com a modelagem direta utilizando o programa CSHOT pertencente ao pacote Seismic Unix. O modelo proposto simula uma situação típica *offshore*, Figura 5.11, apresentando uma lâmina d'água de 500 m com velocidade de 1500 m/s. O primeiro refletor do modelo é plano, representando o fundo do mar e o topo da primeira camada com velocidade de 2200 m/s. O segundo refletor é mergulhante, representado o topo da camada posterior com velocidade de 2900 m/s. O terceiro e quarto refletores do modelo são curvos, representadondo os limites das camadas adjacentes que possuem velocidade de 3500 m/s e 4000 m/s, respectivamente. A modelagem direta realizada, feita utilizando a técnica do traçado de raios, nos permitiu obter um sismograma sintético que posteriormente foi submetido a todas as etapas do processamento sísmico convencional, a exemplo da montagem da geometria, análise de velocidade, correção NMO e empilhamento. Todo o processamento convencional aplicado ao dado sintético foi feito utilizando o pacote Seismic Unix.

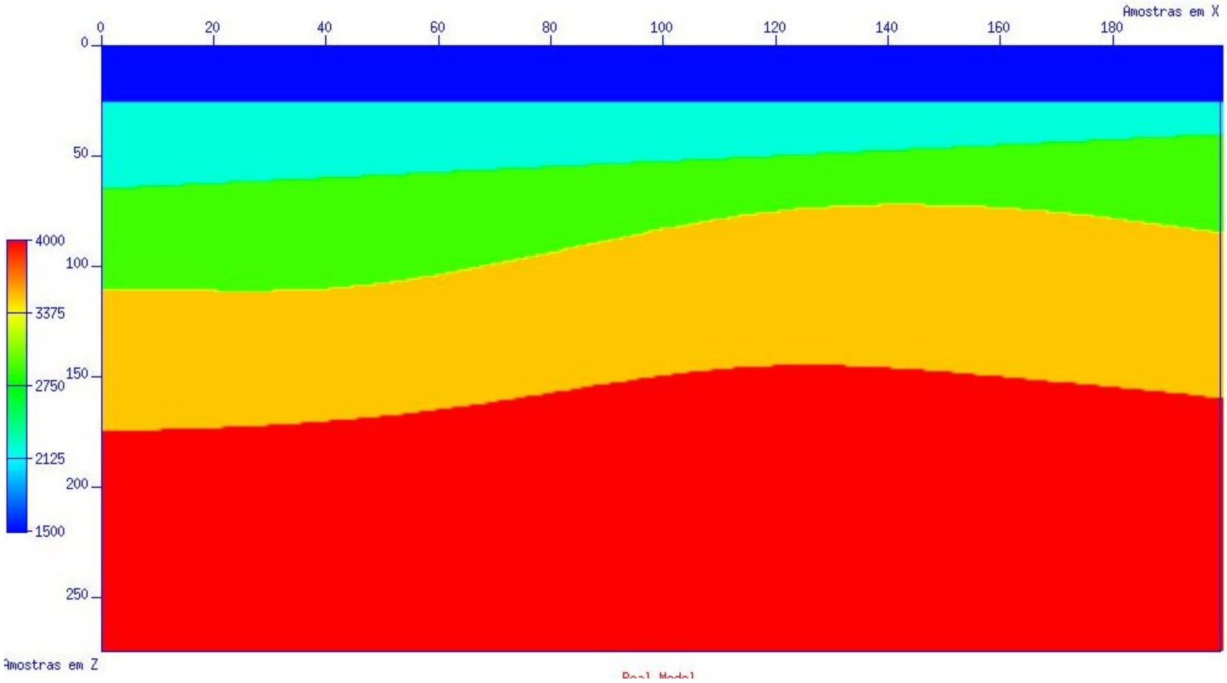

Figura 5.11: Modelo verdadeiro bidimensional.

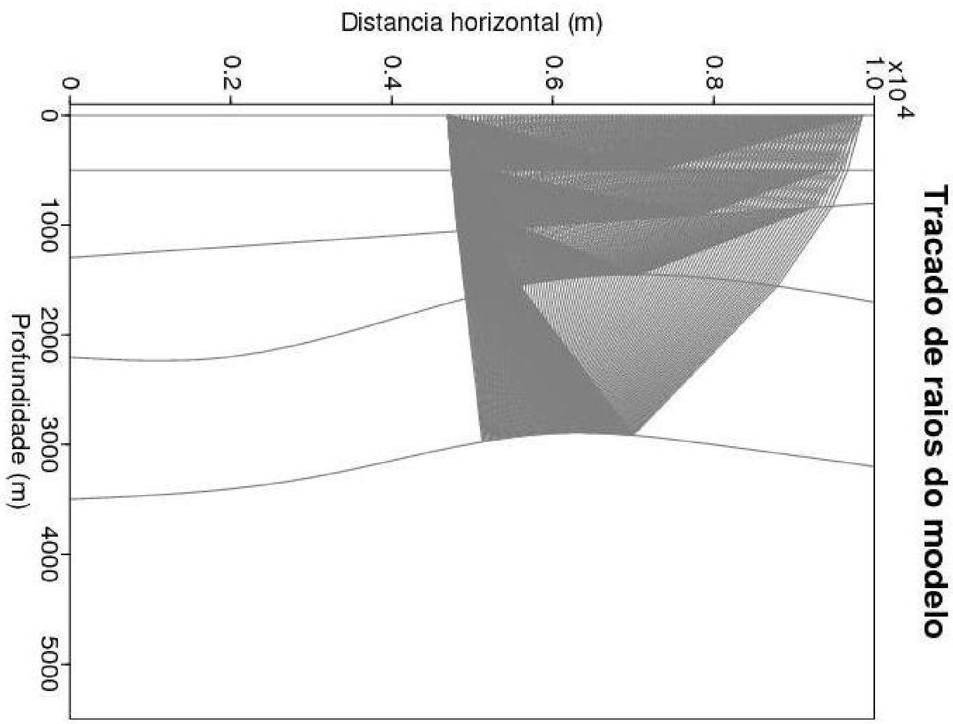

Figura 5.12: Traçado de raios do primeiro tiro do modelo.

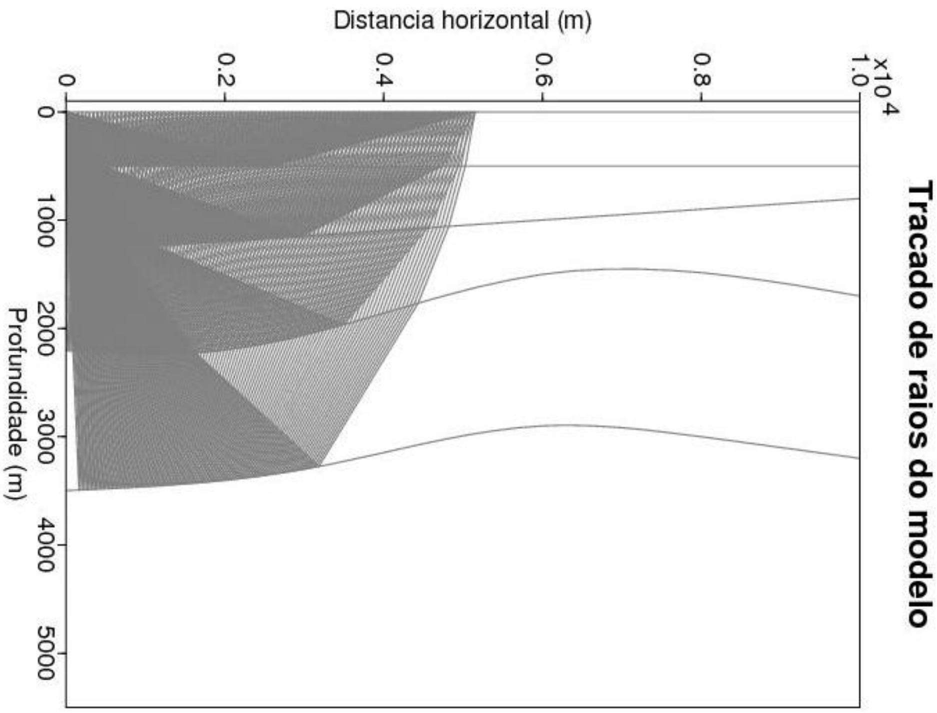

Figura 5.13: Traçado de raios do último tiro do modelo.

Número de tiros:	95
Distância entre tiros:	50 m
Distância entre geofones:	50 m
Número de geofones:	100
Afastamento mínimo:	150 m
Afastamento máximo:	5100 m
Intervalo de amostragem:	$0,004$ s
Tempo de registro:	4 s
Arranjo (geometria):	end-on

Tabela 5.1: Parâmetros do modelo sintético bidimensional.

As Figuras 5.12 e 5.13 mostram os traçados de raios realizados no modelo para o primeiro e ultimo tiro respectivamente. Após esse etapa, foi possível obter o sismograma sintético constituido de 95 *shot-gathers*, ou famílias de tiro comum.

A Tabela 5.1 mostra alguns dos parâmetros definidos para o traçado de raios do modelo sintético bidimensional construido.

A Figura 5.14 apresenta a última família de tiro comum gerada para o modelo, onde podemos observar facilmente os quatro eventos anteriormente caracterizados.

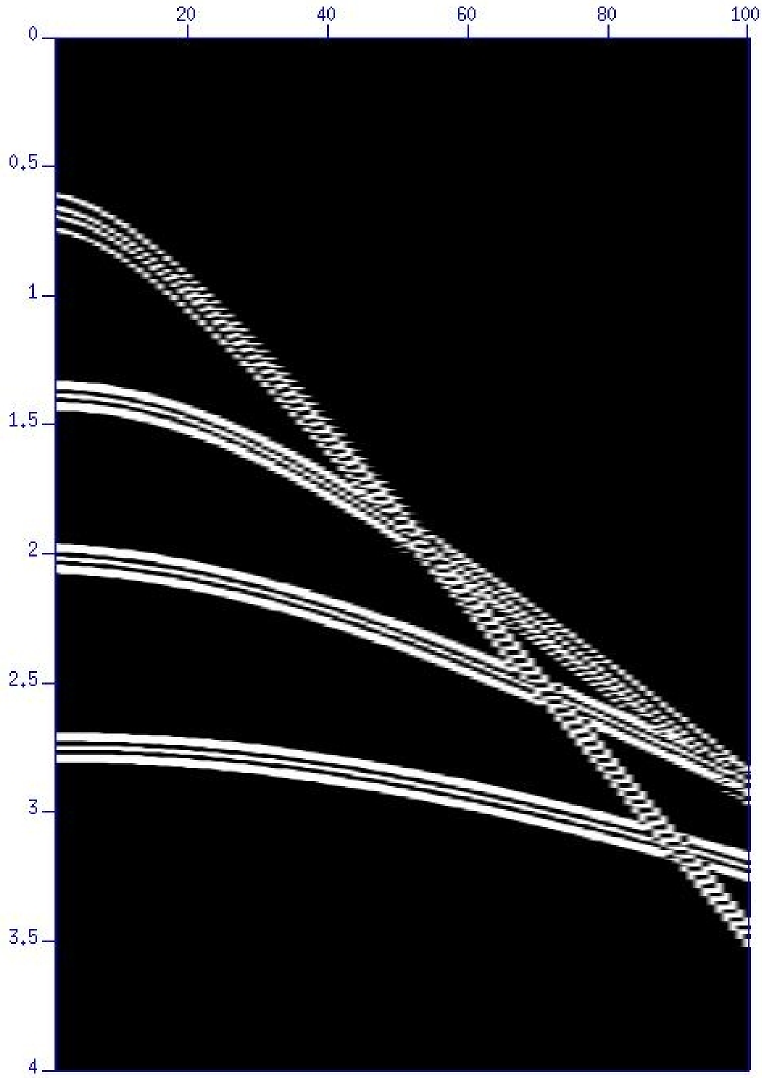

Figura 5.14: Família de tiro comum do modelo sintético bidimensional

A Figura 5.15 apresenta as 95 famílias de tiro comum geradas para o modelo pelo programa CSHOT. O arquivo contendo o campo de velocidades RMS, obtido através dos *picks* na análise de velocidades, foi utilizado como *input* para a aplicação das metodologias propostas nesse trabalho. A análise de velocidades foi feita em 48 CDPs pertencentes ao

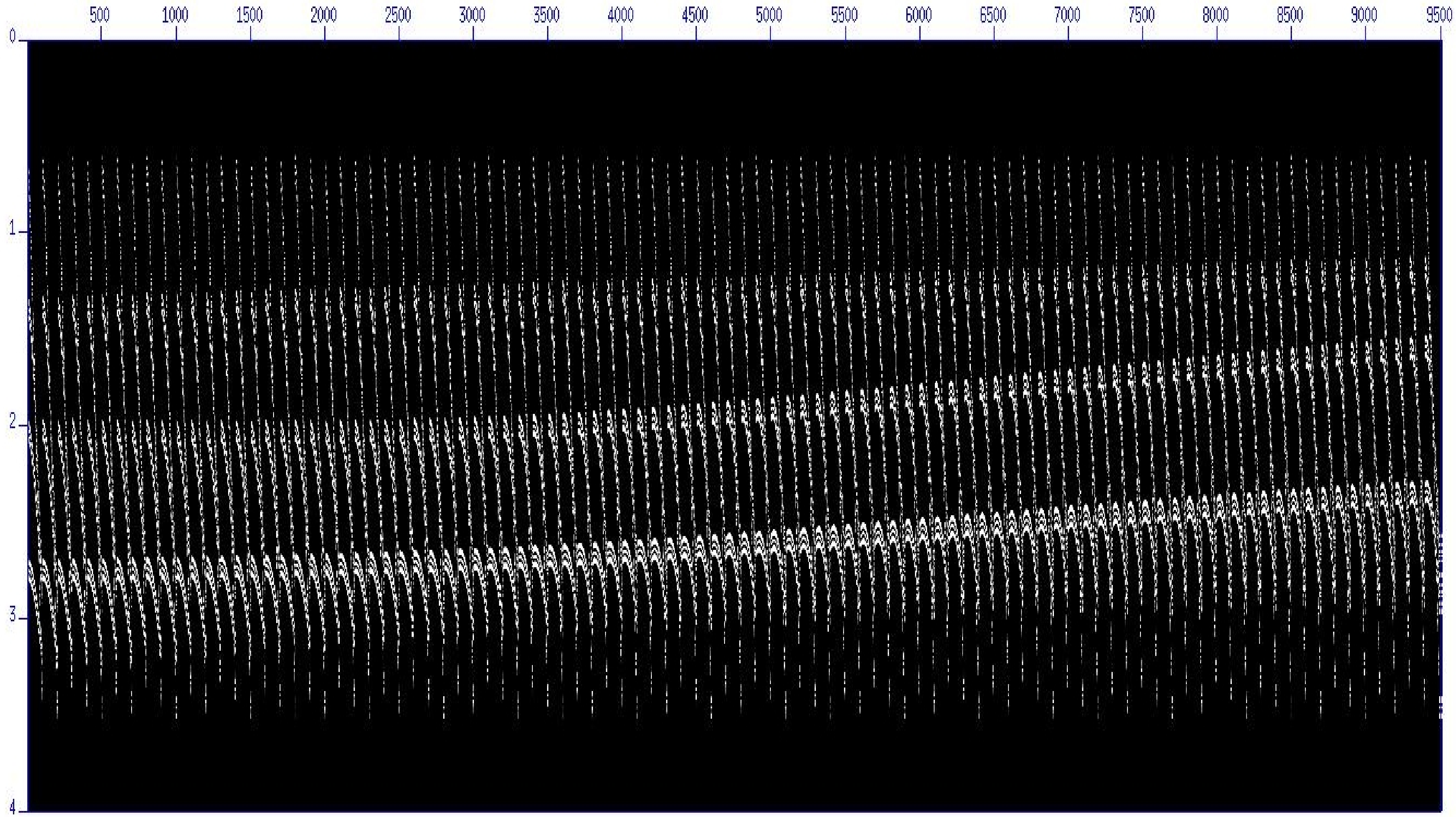

Figura 5.15: 95 Famílias de tiro comum, pertencentes ao dado sintético bidimensional, geradas a partir de modelagem com traçado de raios utilizando o programa CSHOT (SU).

dado tomados a distância constante. Alguns CDPs pertencentes ao dados foram estudados de modo isolado para fins de comparação das respostas obtidas pelas diferentes metodologias. Os dados de velocidade RMS obtidos pela análise de velocidade para o quarto e quadragésimo quinto CDPs analisados foram invertidos usando a SVD e MRE. Posteriormente os resultados obtidos foram comparados com as velocidades intervalares fornecidas pela aplicação direta da fórmula de Dix. O a priori utilizado nas inversões envolvendo SVD e MRE, para todos os CDPs pertencentes ao dado, foi o mesmo, podendo ser visto nas próximas figuras.

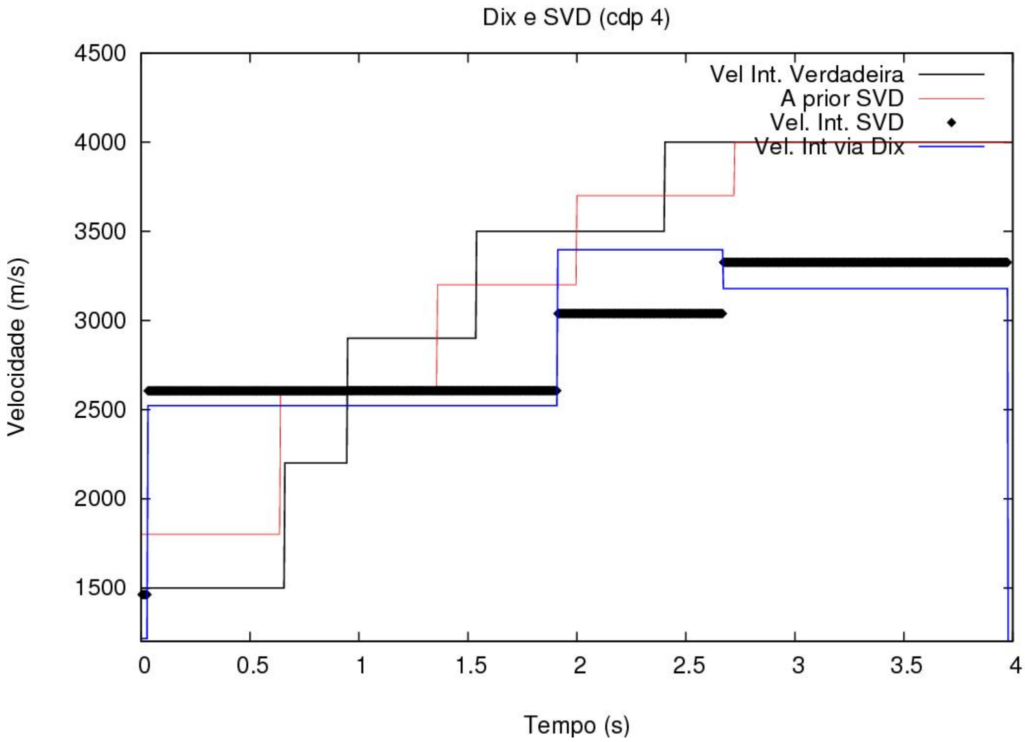

Figura 5.16: Resultado da inversão para o CDP 525 envovendo Dix e SVD (dado sintético).

A Figura 5.16 mostra os resultados da inversão, utilizando a SVD, para o quarto CDP (525) analisado no VELAN. A SVD apresentou 23, 40% de erro, contra 23, 93% apresentado pela velocidades intervalares obtidas pela aplicação direta da fórmula de Dix. A Figura 5.17 apresenta os resultados obtidos pela MRE aplicada aos dados de velocidade RMS para o mesmo CDP. A MRE apresentou erro de 16, 58% em relação as velocidades intervalares verdadeiras do modelo contra 23, 93% de erro apresentado pela aplicação da fórmula de Dix.

A Figura 5.18 mostra os resultados obtidos pela SVD para o quadragésimo quinto CDP (6825) analisado no VELAN. A SVD apresentou erro de 22, 05%, enquanto que o fórmula de Dix apresentou erro de 22, 48% em relação as velocidades intervalares verdadeiras do modelo. A Figura 5.19 apresenta os resultados obtidos pela MRE para o mesmo CDP. A MRE apresentou erro de 14, 04% em relação as velocidades verdadeiras, contra 22, 48% de erro apresentado pelas velocidades obtidas através da fórmula de Dix.

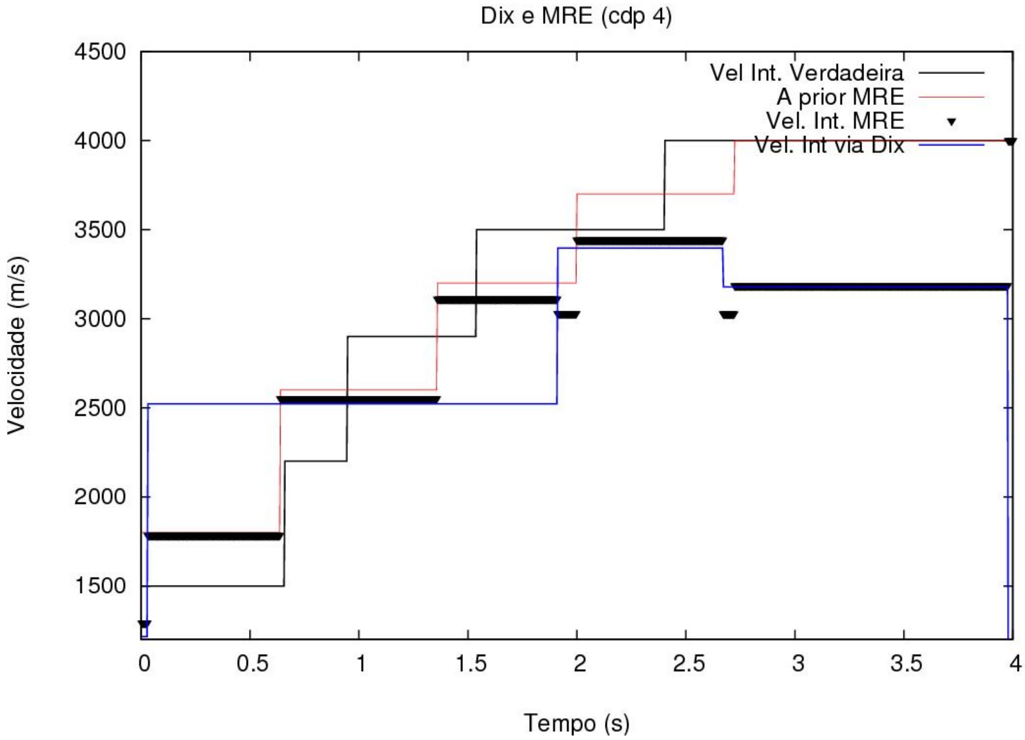

Figura 5.17: Resultado da inversão para o CDP 525 envolvendo Dix e MRE (dado sintético).

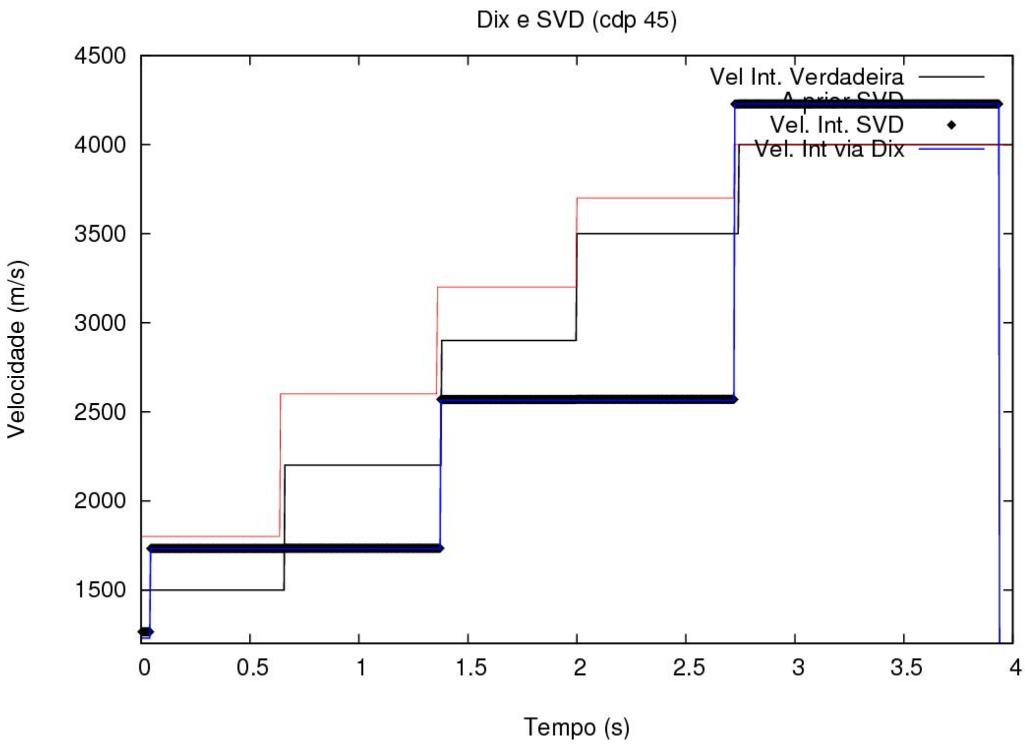

Figura 5.18: Resultado da inversão para o CDP 6825 envolvendo Dix e SVD (dado sintético).

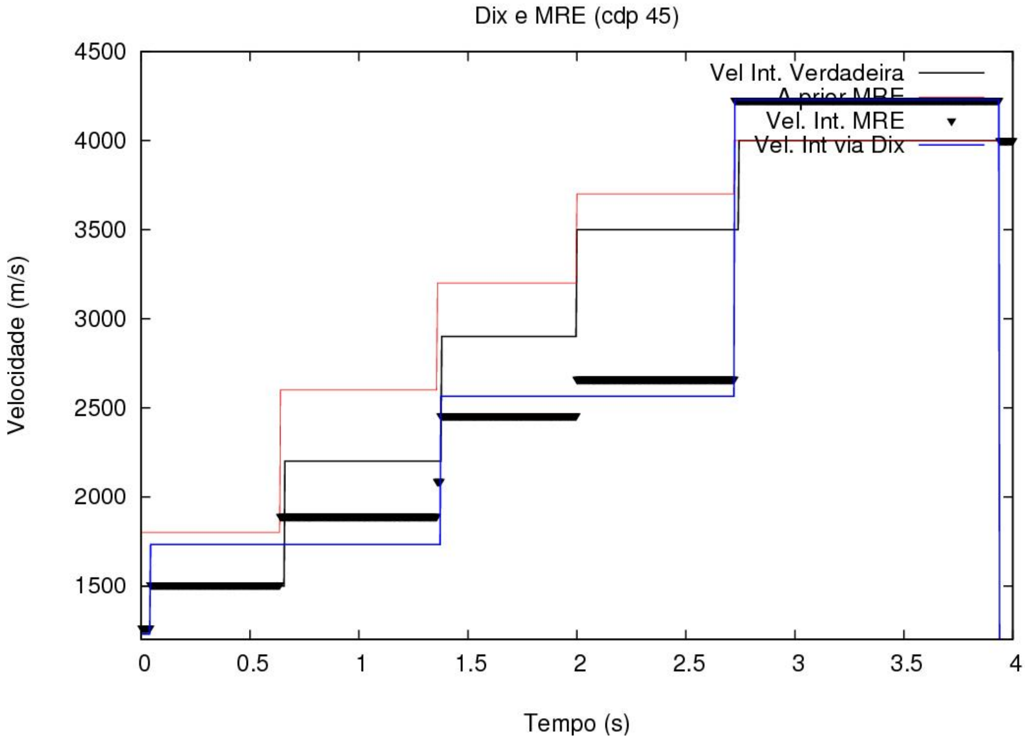

Figura 5.19: Resultado da inversão para o CDP 6825 envolvendo Dix e MRE (dado sintético).

A inversão do modelo bidimensional propriamente dita será apresentada a partir desse momento. A primeira figura pertencente a essa etapa do trabalho é o campo de velocidades RMS obtido na análise de velocidade, ao qual o dado sintético proviniente da modelagem direta foi submetido, após a devida montagem da geometria e reorganização em famílias CDPs. A Figura 5.20 mostra o campo de velocidades RMS, obtido após a análise de velocidade realizada em 48 CDPs pertencentes ao dado. A análise de velocidade realizada teve como único critério de restrição, o número de *picks* tomados por CDP. O número de *picks* foi mantido constante e igual a quatro, com o propósito de facilitar a implementação computacional dos códigos e algorítmos envolvidos no processo de inversão.

A Figura 5.21 mostra as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix, para o primeiro CDP do dado, interpoladas verticalmente de modo linear. Essa figura nos mostra os intervalos de velocidade obtidos pela fórmula de Dix. O resultado obtido mostra baixa definição das velocidades das camadas do modelo. Um exemplo da falta de definição das velocidades obtidas é facil de observar analisando as velocidades para a primeira camada do modelo. Na figura acima, as velocidades de 2000 a 2200 m/s, intervalo de velocidades que abrange a primeira camada do modelo, encontram-se entre os tempos de $1,5$ a $2,0$ s, valores completamente incoerentes, levando-se em consideração que a lâmina d'água do modelo apresenta 500 m e possui velocidade de 1500 m/s, o que nos permite estimar o tempo duplo aproximado para o topo da primeira camada de $0,6$ s.

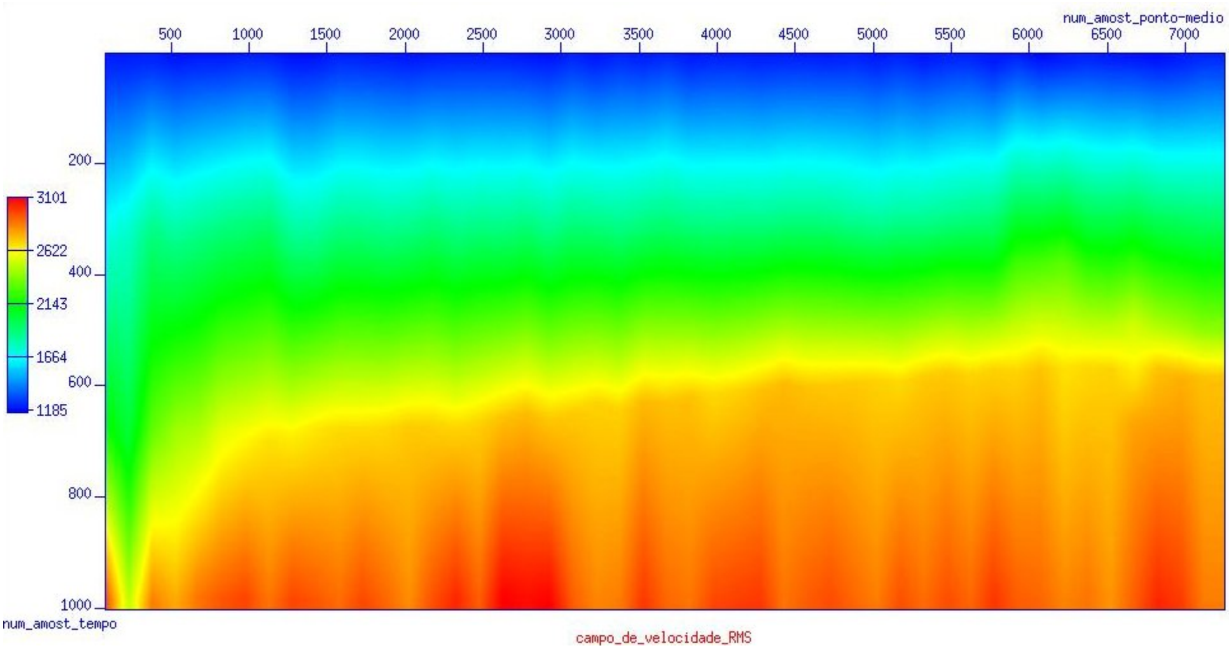

Figura 5.20: Campo de velocidades RMS do dado sintético bidimensional.

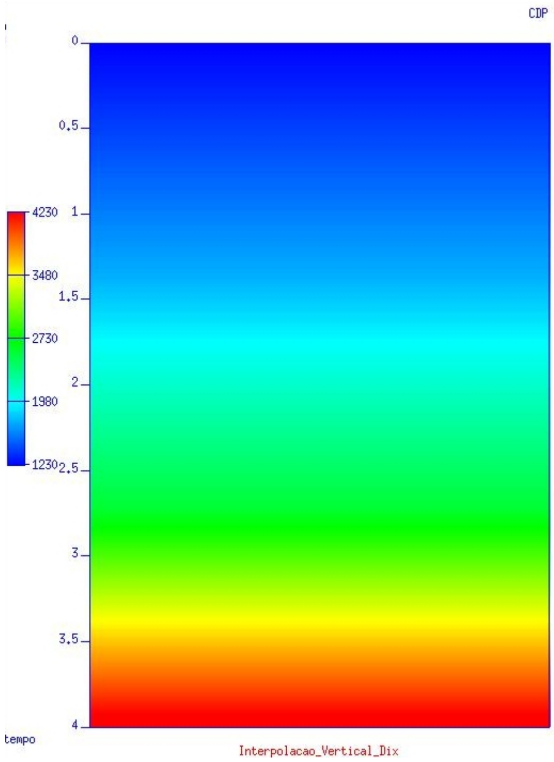

Figura 5.21: Velocidades intervalares interpoladas verticalmente obtidas pela fórmula de Dix.

A Figura 5.22 mostra o campo de velocidades intervalares obtidas pela aplicação direta da fórmula de Dix. O campo de velocidades intervalares obtido para o dado, através da fórmula de Dix, mostra-se consideravelmente inconsistente. O campo apresenta alguns erros decorrentes da aplicação da fórmula a um modelo mais complexo que o proposto inicialmente por Dix. A ultima camada, com velocidade de 4000 m/s, não aparece de modo contínuo no campo, além dos erros mostrados no resultado anterior, que ocasionaram uma má qualidade na estimativa das velocidades intervalares para a primeira camada do modelo estudado, sengudo à aplicação direta da fórmula de Dix.

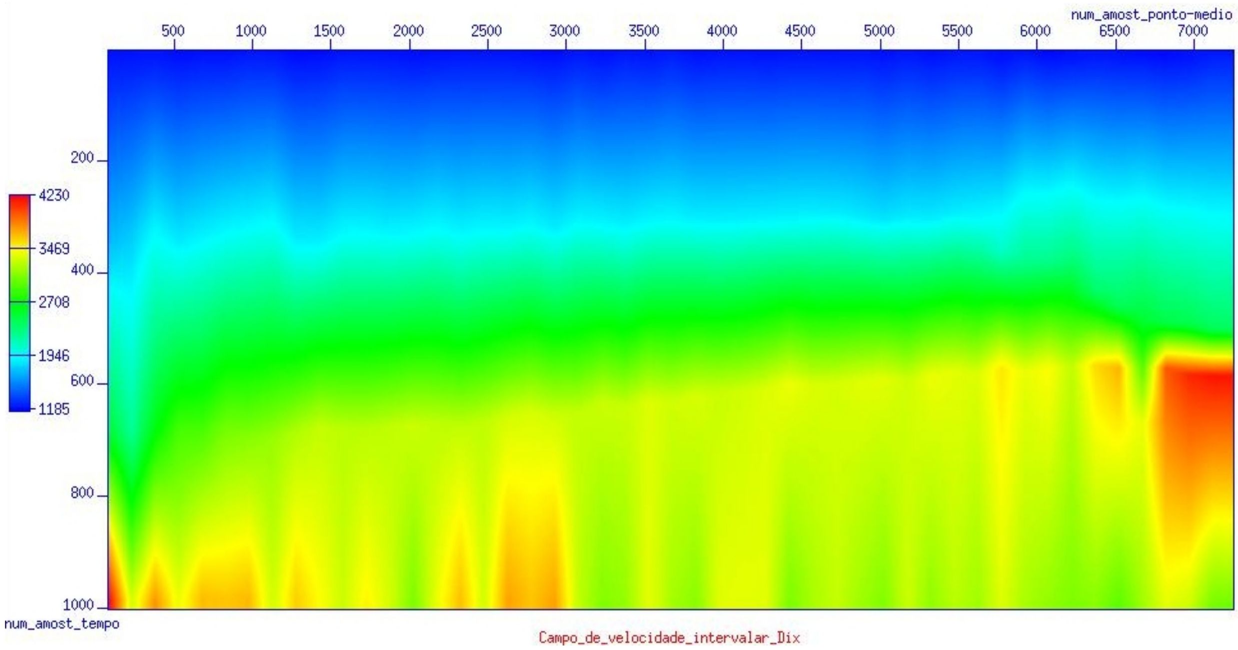

Figura 5.22: Campo de Velocidades intervalares obtido pela fórmula de Dix.

Os próximos resultados a serem apresentados envolvem a aplicação da SVD a obtenção do campo de velocidades intervalares a partir dos dados de velocidade RMS do modelo sintético bidimensional. Antes, é preciso explicar como as inversões usando a SVD e MRE foram feitas para o caso bidimensional. Segundo a formulação do problema direto clássico, nosso vetor de dados **d** fica definido, para cada CDP, como um vetor de dimensão igual a 4 de acordo com os quatro pares tempo velocidade RMS, obtidos na análise de velocidade. A definição da dimensão do vetor dos parâmetros do modelo, **m**, foi feita de modo conveniente. A dimensão escolhida para o vetor de parâmetros foi agual a 1000, de modo que para o problema direto envolvendo o modelo bidimensioanal, para cada CDP analizado, temos:

$$\mathbf{d}_{4\times1} = G_{4\times1000}\mathbf{m}_{1000\times1}, \tag{5.7}$$

onde a escolha da dimensão do vetor dos parâmetros é função da definição do elemento de amostragem para a inversão. Utilizamos a mesma amostragem usada na modelagem do dado, igual a 0.004 s, que multiplicado pelo dimensão do vetor de parâmetros totaliza 4 s, o tempo de registero do dado. O kernel do problema, a matriz G, é formada basicamente pelos elementos de amostragem.

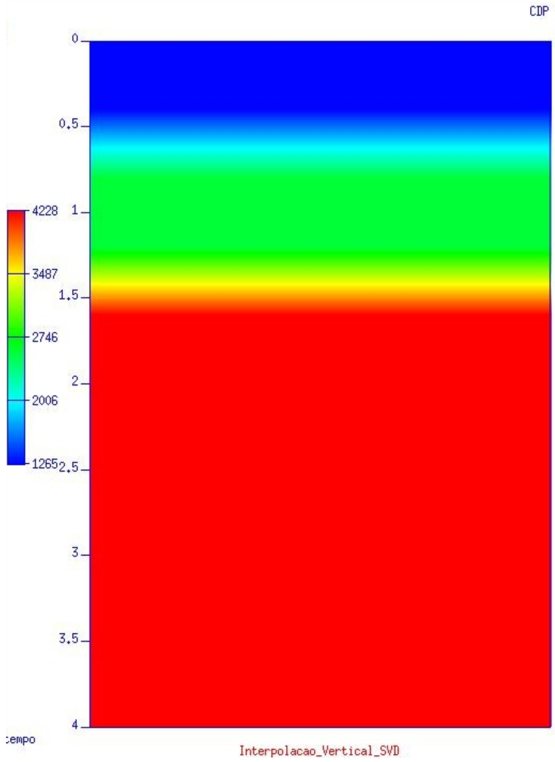

Figura 5.23: Velocidades intervalares interpoladas verticalmente obtidas pela SVD.

A Figura 5.23 mostra a interpolação vertical linear das velocidades intervalares, para o primeiro CDP do dado, obtidas através da aplicação da SVD. A interpolação das velocidades intervalares, obtidas pela aplicação da SVD, mostra resultados diferentes dos obtidos pela fórmula de Dix. A primeira camada do modelo aparece com velocidade mais alta que a velocidade verdadeira do modelo.

A Figura 5.24 mostra o campo de velocidades obtido pela aplicação da abordagem SVD ao problema. O campo de velocidades obtido através da SVD apresenta falta de continuidade lateral para a última camada do modelo, além de falta de definição em toda sua extensão. O resultado obtido pela aplicação da SVD ao problema, envolvendo dado sintético bidimensional, foi possivelmente afetado por instabilidade numérica. O a priori utilizado na SVD foi o mesmo utilizado nas inversões dos CDPs de modo isolados, apresentados anteriormente. As velocidades intervalares usadas como a priori no processo de inversão usando a SVD pode ser visto na Figura 5.16.

Os resultados provenientes da aplicação da abordagem MRE ao problema serão apresentados nas próximas figuras. A aplicação da MRE aos dados de velocidade RMS obtiveram resultados muito bons na aplicação da metodologia ao estudos dos CDPs de modo isolado. Os resultados obtidos foram melhores, tanto do ponto de vista da precisão da estimativa,

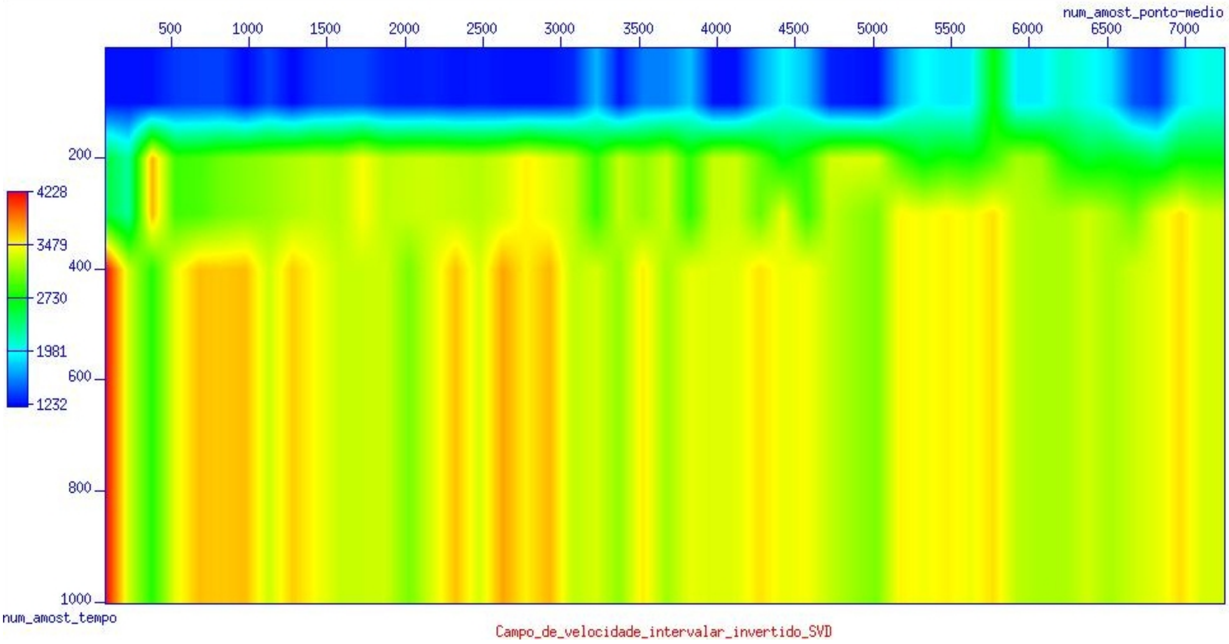

Figura 5.24: Campo de Velocidades intervalares obtido pela SVD.

quanto na natureza dos dados de velocidades intervalares obtidos. Esses aspectos serão discutidos na etapa de descrição do resultado do campo de velocidades intervalares obtido através da abordagem MRE aplicada ao problema.

A Figura 5.25 apresenta o resultado da interpolação linear vertical, para o primeiro CDP, com as velocidades intervalares obtidas através da MRE. É possivel observar uma melhor definição dos intervalos de velocidades das camadas do modelo. O intervalo de velocidades da primeira camada do modelo está corretamente posicionado, claramente definido, ao contrário do resultado envolvendo a fórmula de Dix. Outro aspecto importante é que a última camada do modelo, com velocidade de $4000m/s$, está melhor amostrada, se apresentado de modo mais próximo do modelo real, e de modo mais contínuo que o resultado apresentado na Figura 5.21 envolvendo a fórmula de Dix. O resultado obtido pela MRE apresenta maior definição dos intervalos de velocidade do modelo, além de manter uma melhor proporção de dimensão para as camadas e os tempos em relação ao modelo de velocidades intervalares verdadeiro.

O próximo resultado a ser apresentado, será o campo de velocidades intervalares obtido pela aplicação da abordagem MRE aos dados de velocidade RMS do modelo sintético bidimensional estudado. A aplicação de abordagem MRE envolveu a escolha de um a priori que foi mantido o mesmo para todos os CDPs invertidos, a exemplo do que foi feito na abordagem usando a SVD. O a priori usado foi o mesmo usado nas inversões feitas nas Figuras 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18.

A Figura 5.26 apresenta o campo velocidades obtidos pela aplicação da abordagem MRE

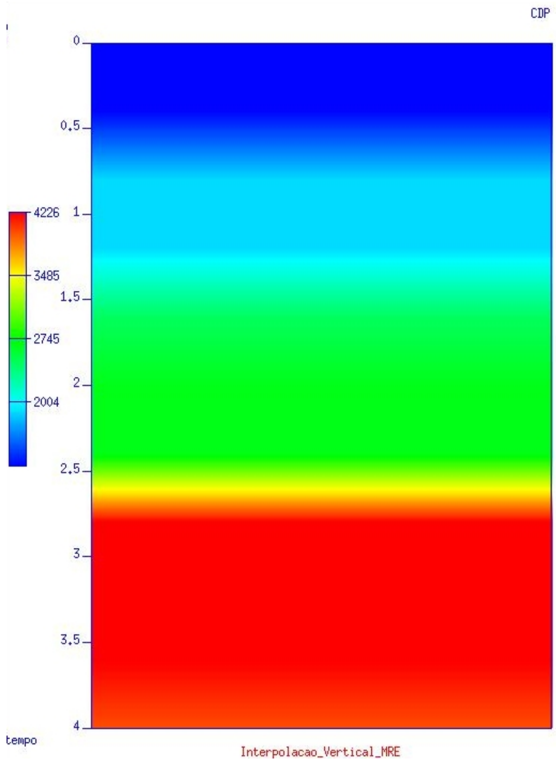

Figura 5.25: Velocidades intervalares interpoladas verticalmente obtidas pela MRE.

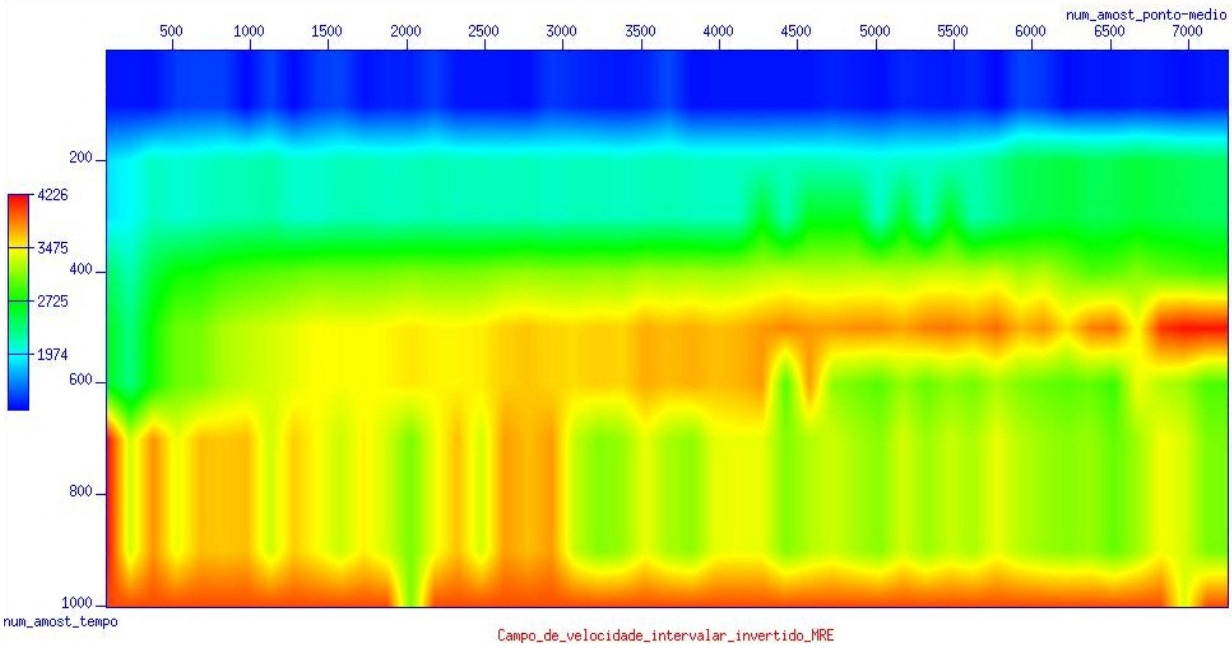

Figura 5.26: Campo de Velocidades intervalares obtido pela MRE.

ao problema. O campo de velocidades obtido segundo a MRE apresenta maior proximidade em relação ao modelo verdadeiro. As velocidades intervalares para a lâmina d'água, assim como para a primeira camada do modelo, estão melhor definidas e com maior precisão que o resultado obtido pela aplicação da fórmula de Dix na Figura 5.21. Algumas feições relacionadas ao refletor curvo do modelo podem ser observadas, além do fato de que a ultima camada do modelo aparece de modo mais contínuo no campo obtido pela aplicação da MRE. Um aspecto importante a se observar, no resultado obtido pela aplicação da MRE, é a melhoria da estimativa das velocidades obtidas nas regiões de baixa corbetura CDP do dado. As estimativas obtidas pela MRE se apresentaram mais precisas e consistentes nas extremidades do modelo, onde a corbetura CDP cai consideravelmente. Esse fato não é observado nos resultados envolvendo as outras metodologias aplicadas nesse trabalho. Isso pode ser explicado pela maior sensibilidade apresentada pela abordagem MRE em relação a adição de estimativas a priori ao prolema de inversão, o que tende a melhorar a solução obtida mesmo em regiões onde a qualidade dos dados observados do modelo não é tão boa.

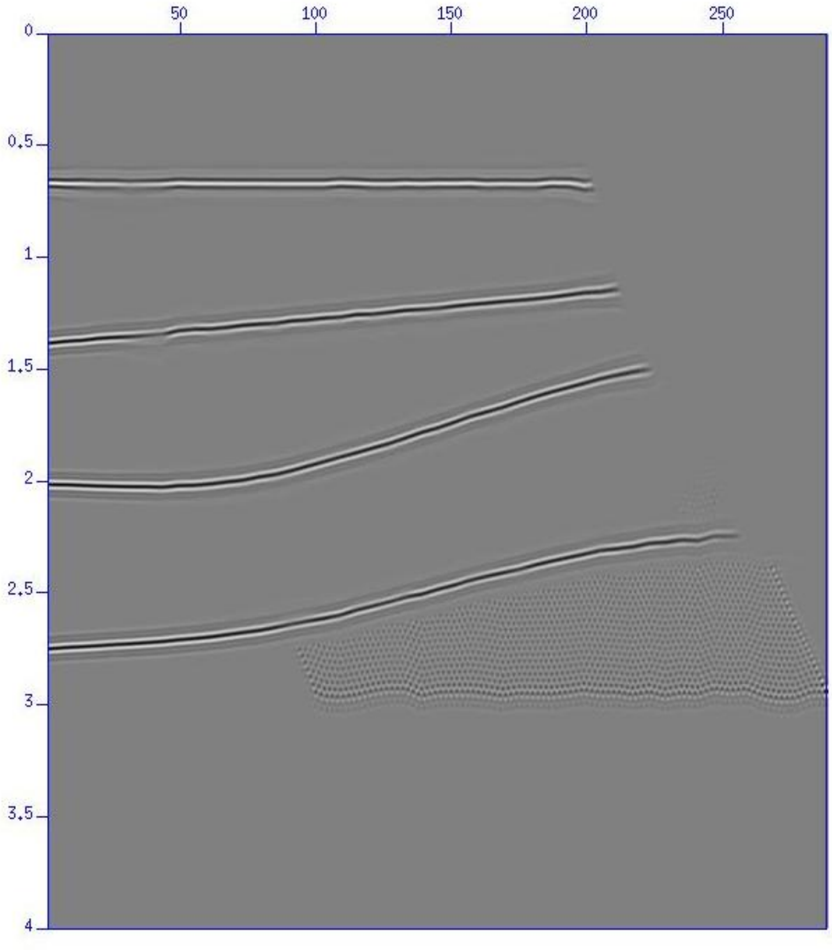

Figura 5.27: Seção sísmica empilhada, resultado do processamento convencional do dado sísmico sintético utilizando SU.

A Figura 5.27 encerra o processamento convencinal aplicado ao dado sintético gerado. A seção sísmica empilhada obtida é resultado de todo processamento realizado no SU. O pacote Seismic Unix foi utilizado na modelagem do dado por traçamento de raios, montagem da geometria, reorganização em famílias CDPs, análise de velocidade, correção de NMO e por fim empilhamento, resultando na seção sísmica obtida na figura acima.

CAPÍTULO 6

Aplicação em dados reais

6.1 Introdução

O último capítulo tem por objetivo tratar da aplicação das metodologias a dados sísmicos reais. O estudos dos parâmetros envolvidos no problema de inversão, assim como a resposta dos diferentes métodos de solução do problema inverso, aplicado a dados reais, mostra-se nescessário para crítica e validação das abordagens utilizadas. Nesse capítulo são apresentados resultados, e discursões realizadas a partir da aplicação da SVD e da ERM a dados reais para diferentes tipos de informação a priori.

6.2 Dados reais

A última etapa de estudo das diferentes metodologias, aplicadas ao problema de inversão de velocidades intervalares, envolve sua aplicação a dados sísmicos reais. Os dados sísmicos reais apresentam um grau de complexidade inerente aos sistemas naturais, mostrando-se assim como ultimo teste ao qual as metodologias usadas foram submetidas com propósito de validação.

O dado sísmico usado é pertencente a um levantamento *offshore* realizado na bacia do Jequitinhonha, sul da bahia. O dado é pertence ao acervo do CPGG-UFBA, e encontra-se no formato SEG-Y.

A linha sísmica usada no trabalho foi cortada em 4 s por não haver nescessidade de se trabalhar com todo intervalo de registro, levando-se em consideração a natureza desse trabalho. A linha foi submetida ao processamento convencional, utilizando o software FOCUS, desenvolvido pela PARADIGM *Geotechnology*, e posteriormente a aplicação das metodologias sugeridas no trabalho. A aplicação das metodologias propostas utilizou os programas pertecentes ao pacote Seismic Unix, desenvolvidos pela CWP *(Center for Wave Phenomena)* da *Colorado School of Mines*, assim como na aplicação aos dados sintéticos apresentados anteriormente. A Tabela 6.1 apresenta os parâmetros de aquisição da linha sísmica utilizada, a linha RL-214-0266.

Lanço:	0-150-3125
Número de tiros:	1577
Distância entre tiros:	25 m
Distância entre geofones:	25 m
Número de geofones:	120
Afastamento mínimo:	150 m
Afastamento máximo:	3125 m
Intervalo de amostragem:	0.004 s
Tempo de registro:	7 s
Número de amostras:	1751
Arranjo (geometria):	end-on

Tabela 6.1: Parâmetros de aquisição da linha sísmica RL-214-0266

Assim como foi feito com o dado sintético bidimensional, alguns CDPs pertencentes ao dado real foram analizados de modo isolado para verificação das respostas obtidas pelas diferentes abordagens de obtenção de campos de velocidade intervalar. Foram escolhidos dois CDPs para essa análise, os CDPs 627 e 3027, respectivamente no início e fim da linha sísmica RL-014-0266.

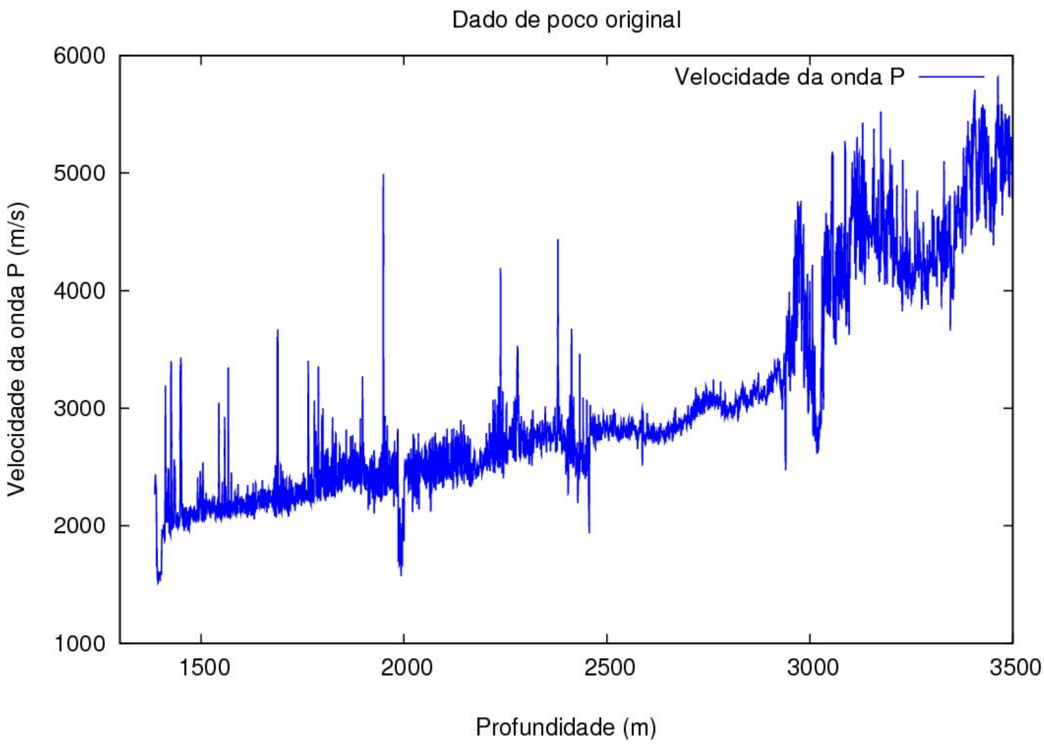

Figura 6.1: Velocidades intervalares obtidas a partir do poço 1BAS-0080-BA.

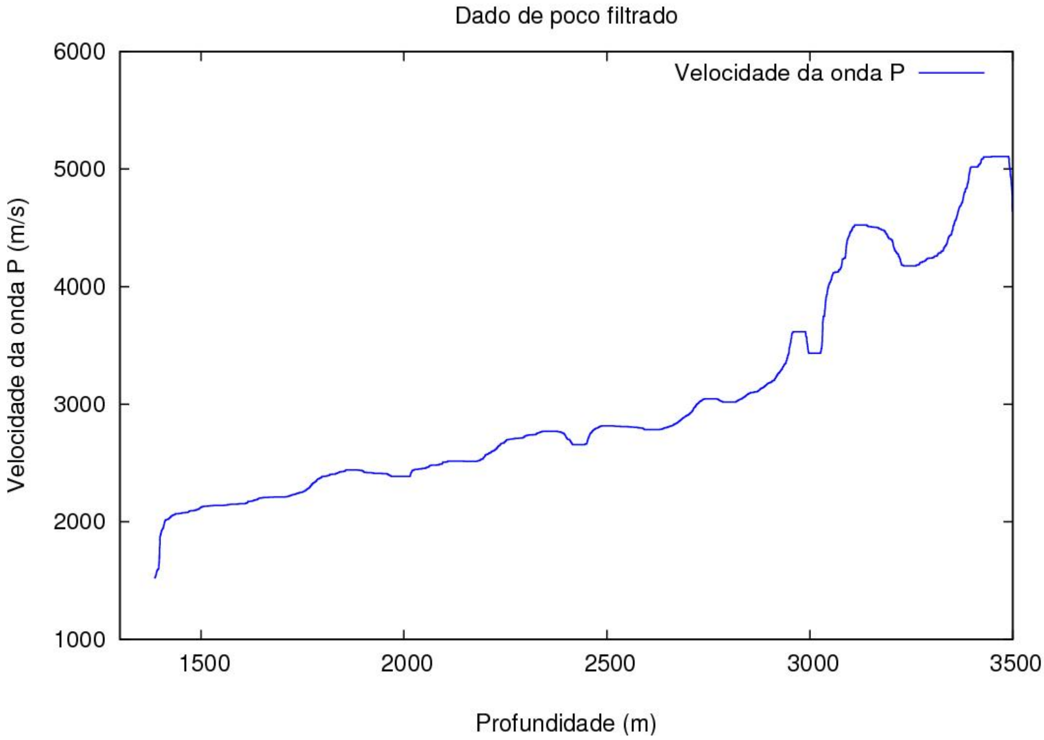

Figura 6.2: Velocidades intervalares obtidas a partir do poço 1BAS-0080-BA após a filtragem.

Os resultados obtidos foram inicialmente comparados com as velocidades intervalares extraídas a partir dos dados de um poço da região. Do poço 1BAS-0080-BA, a partir do perfil sônico, foram retiradas velocidades intervalares que serviram como referencial para comparação entre as velocidades obtidas pelas diferentes abordagens.

A Figura 6.1 mostra as velocidades intervalares retiradas diretamente do perfíl sônico de poço, sem nenhum tipo de tratamento. Esses dados extraídos precisam ser filtrados para obtenção de uma curva de velocidades mais suave, compatível com a resposta obtida pela sísmica. A Figura 6.2 mostra os dados de velocidade intervalar extraídos do poço e filtrados usando um filtro mediano de 145 pontos.

A Figura 6.3 mostra a comparação entre as velocidades intervalares obtidas pela aplicação da SVD, utilizando a priori linearmente crescente, com as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e as velocidades provenientes do dado de poço. Os resultados apresentados pela SVD foram os mesmos obtidos pela fórmula de Dix.

A Figura 6.4 apresenta o mesmo quadro comparativo, porém, envolvendo os resultados obtidos pela aplicação da MRE ao problema. As velocidades intervalares obtidas pela MRE apresentaram comportamento mais próximo das velocidade do dado de poço que as velocidades obtidas pela fórmula de Dix. A MRE apresentou as melhores estimativas de velocidade intervalares entre as três abordagens.

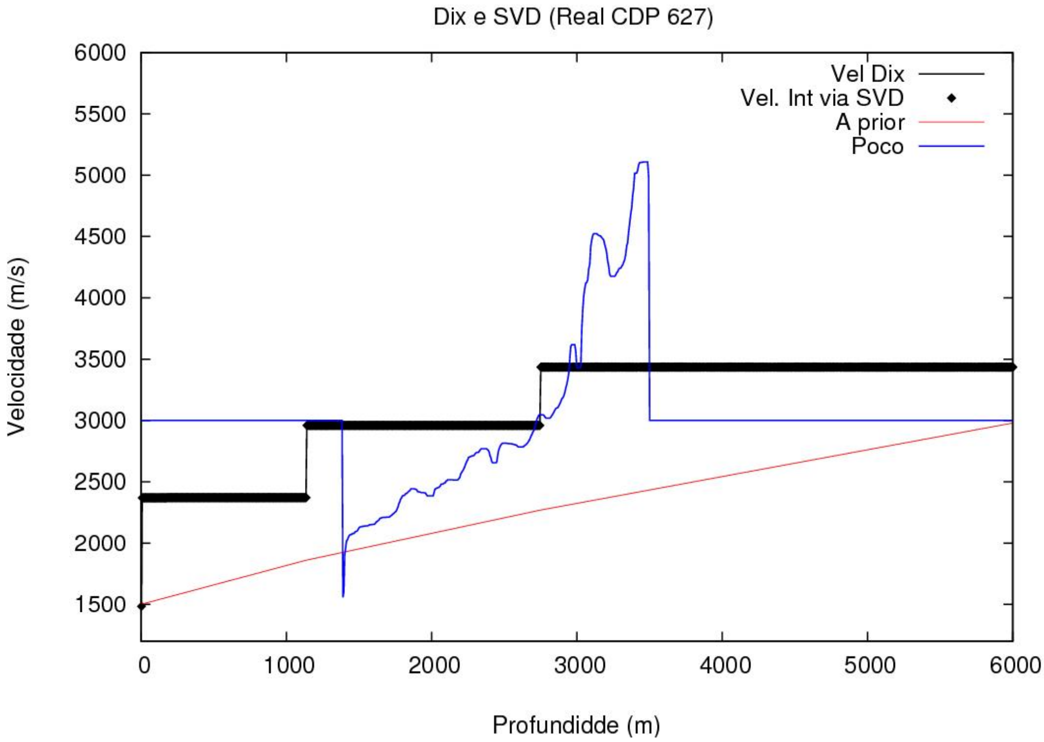

Figura 6.3: Resultados da inversão para o CDP 627 envolvendo Dix e SVD com a priori linearmente crescente (dado real).

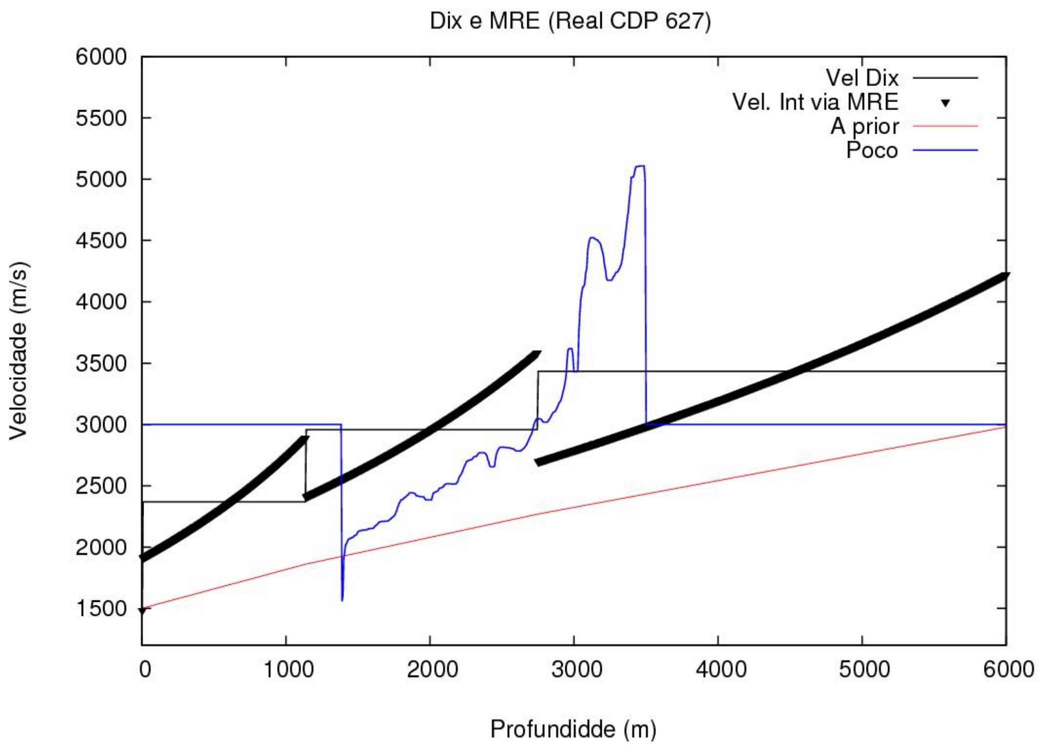

Figura 6.4: Resultados da inversão para o CDP 627 envolvendo Dix e MRE com a priori linearmente crescente (dado real).

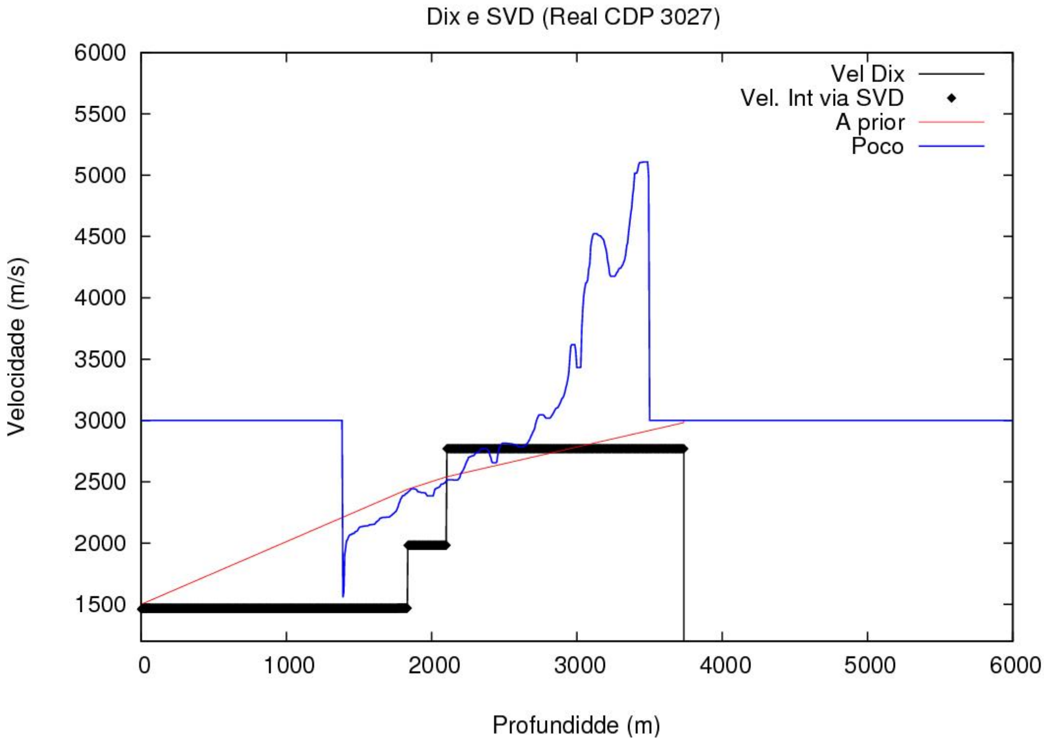

Figura 6.5: Resultados da inversão para o CDP 3027 envolvendo Dix e SVD com a priori linearmente crescente (dado real).

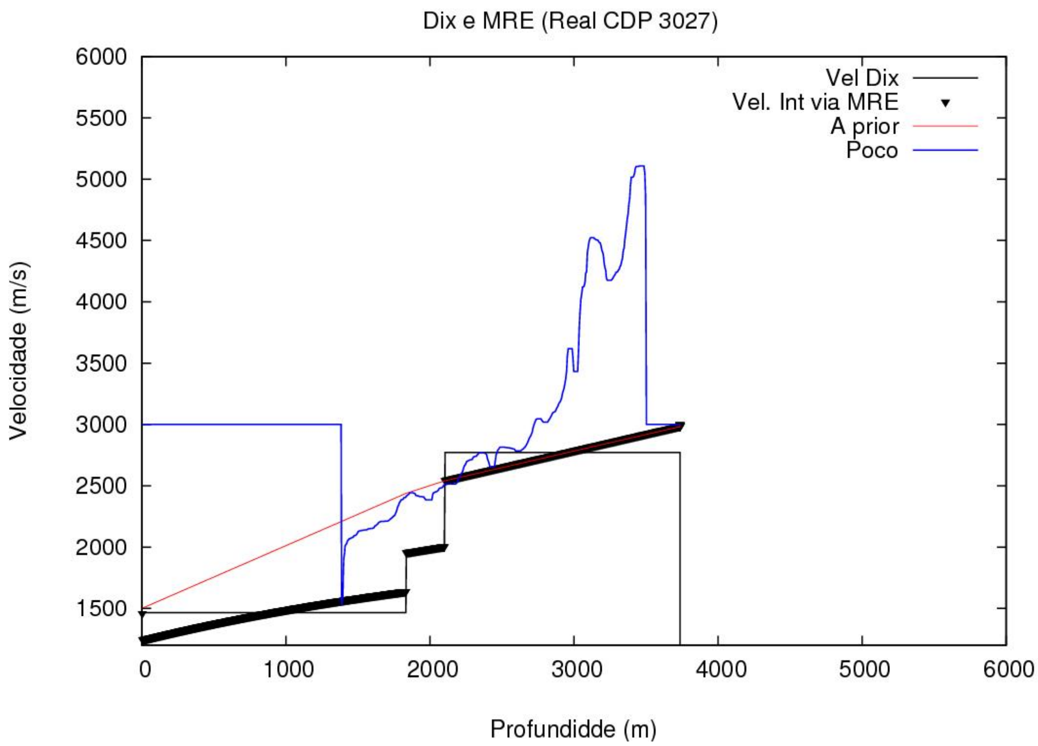

Figura 6.6: Resultados da inversão para o CDP 3027 envolvendo Dix e MRE com a priori linearmente crescente (dado real).

A Figura 6.5 mostra o quadro comparativo das velocidades intervalares obtidas para o CDP 3027. Os resultados obtidas pela SVD foram, mais uma vez, as mesmos obtidos pela fórmula de Dix para um a priori linearmente crescente.

A Figura 6.6 apresenta os resultados obtidos pela aplicação da MRE ao mesmo CDP. Os resultados obtidos pela MRE foram melhores que os resultados apresentados pela fórmula de Dix, acompanhando melhor a tendência das velocidades intervalares do dado de poço.

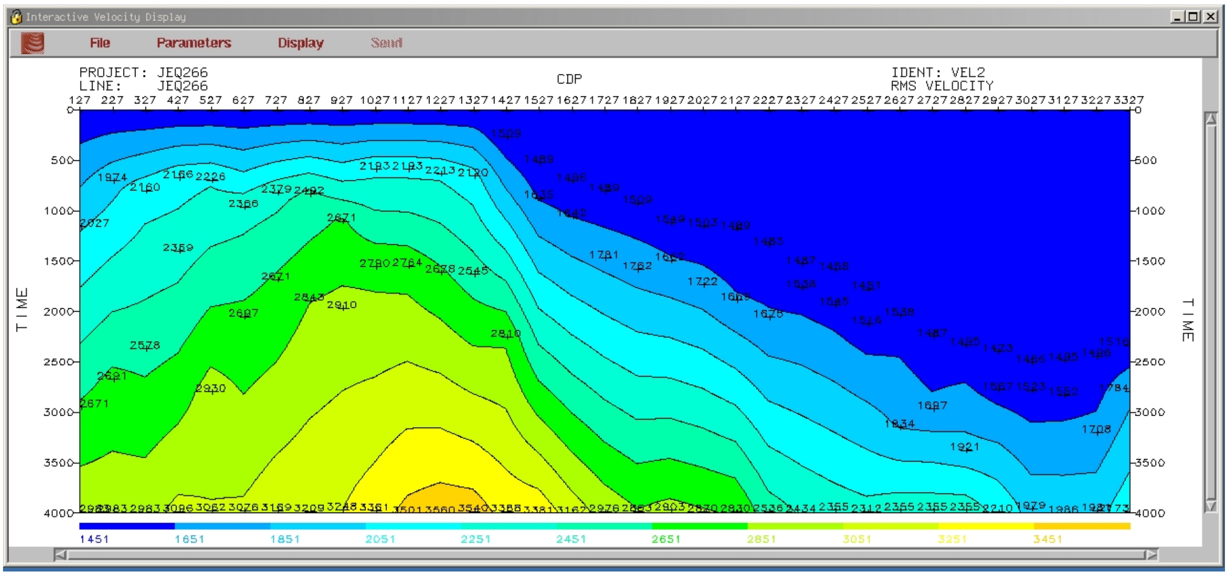

Figura 6.7: Campo de velocidades RMS do dado real (FOCUS).

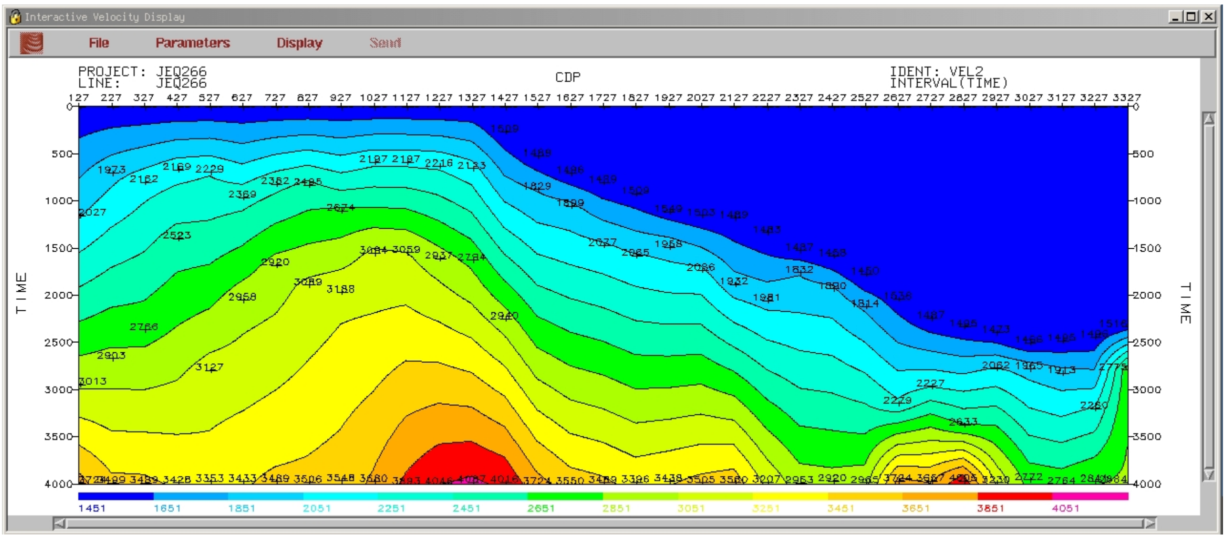

Figura 6.8: Campo de velocidades intervalares do dado real (FOCUS).

Os próximos resultados mostram os campos bidimensionais obtidos para o dado real. Os primeiros campos apresentados são os campos de velocidade RMS e intervalar obtidos pelo processamento convencional com o software FOCUS. As Figuras 6.7 e 6.8 mostram os campos de velocidade RMS e intervalar, respectivamente, provenientes do processamento utilizando o FOCUS.

Os dados de velocidade RMS provenientes do FOCUS foram usados como *input* para as inversões envolvendo a SVD e a MRE. As inversões foram feitas mediante construção de programas na linguagem FORTRAN 90 e *Shell Script*. Os próximos resultados envolvendo SVD e MRE utilizaram o mesmo a priori linearmente crescente dos casos anteriores.

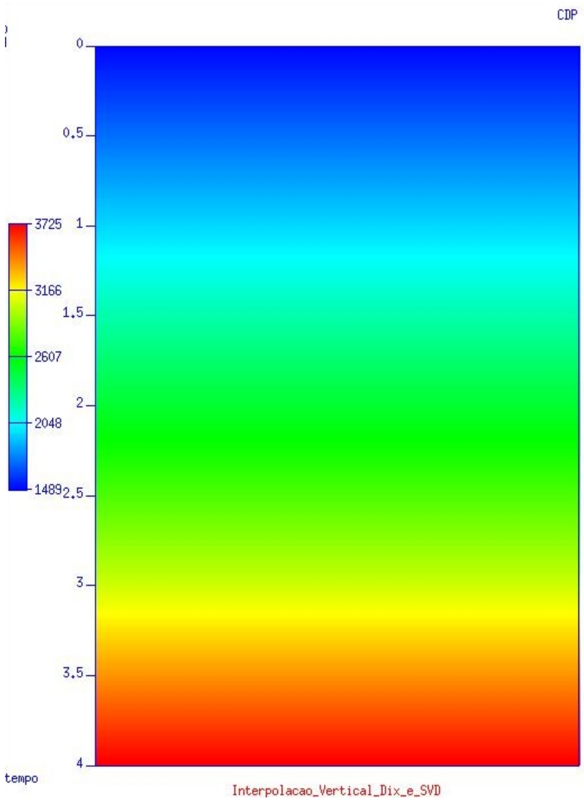

Figura 6.9: Velocidades intervalares do dado real interpoladas verticalmente obtidas pela fórmula de Dix, o mesmo resulatado foi obtido pela SVD.

A Figura 6.9 mostra a interpolação vertical das velocidades intervalares, para o primeiro CDP, obtidas pela aplicação direta da fórmula de Dix e pela SVD. As duas abordagens, Dix e SVD, obtiveram os mesmos resultados.

A Figura 6.10 mostra o campo de velocidades intervalares obtido fora do pacote de processamento FOCUS. Esse campo mostra o resultado obtido pela aplicação da fórmula de Dix e aplicação SVD, usando a priori linearmente crescente, aos dados de velocidade RMS do dado sísmico. O campo de velocidades intervalares obtido pela aplicação da SVD, e pela fórmula Dix, foi o mesmo.

A Figura 6.11 mostra as velocidades intervalares obtidas, para o primeiro CDP do dado real, através da MRE, interpoladas verticalmente. Existe uma grande diferença entre o resultado obtido pela aplicação da MRE e os resultados obtidos pela aplicação da SVD, e

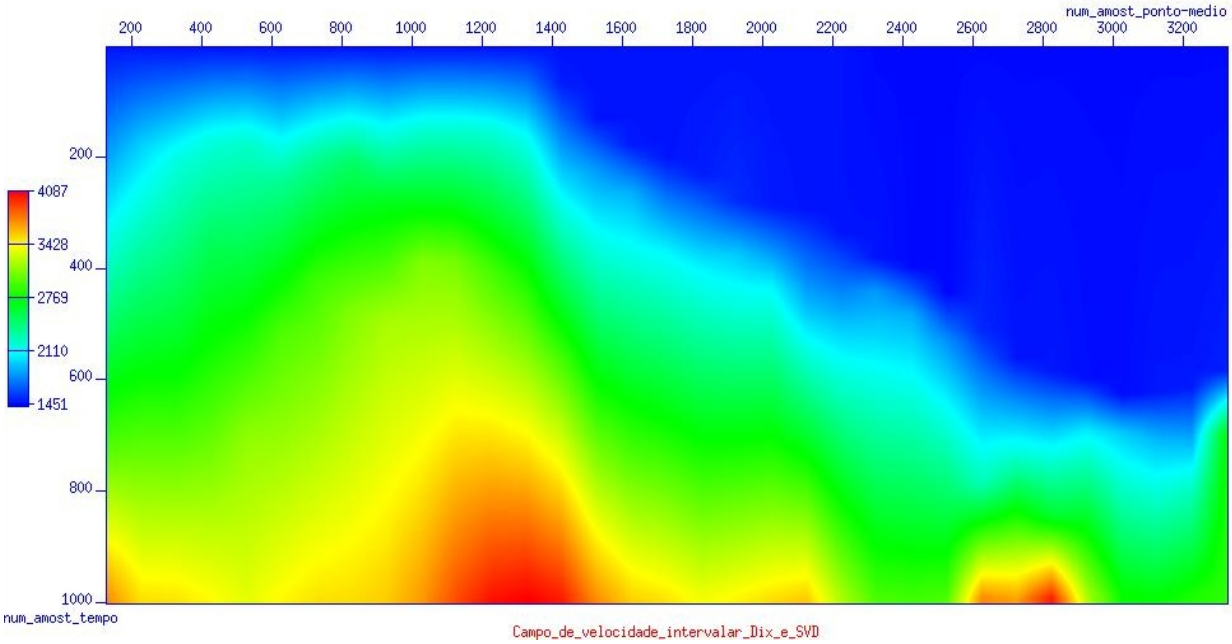

Figura 6.10: Campo de velocidades intervalares do dado real obtido pela fórmula de Dix, o mesmo resultado foi obtido pela SVD.

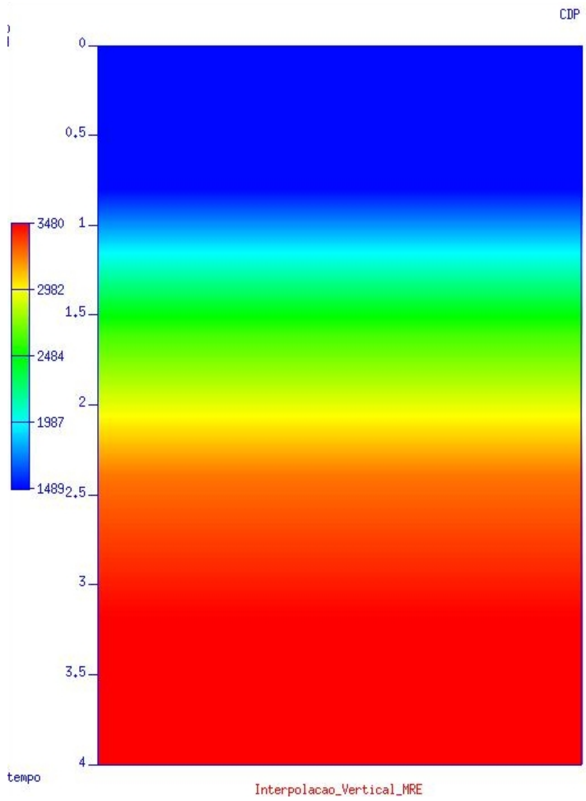

Figura 6.11: Velocidades intervalares do dado real interpoladas verticalmente obtidas pela MRE.

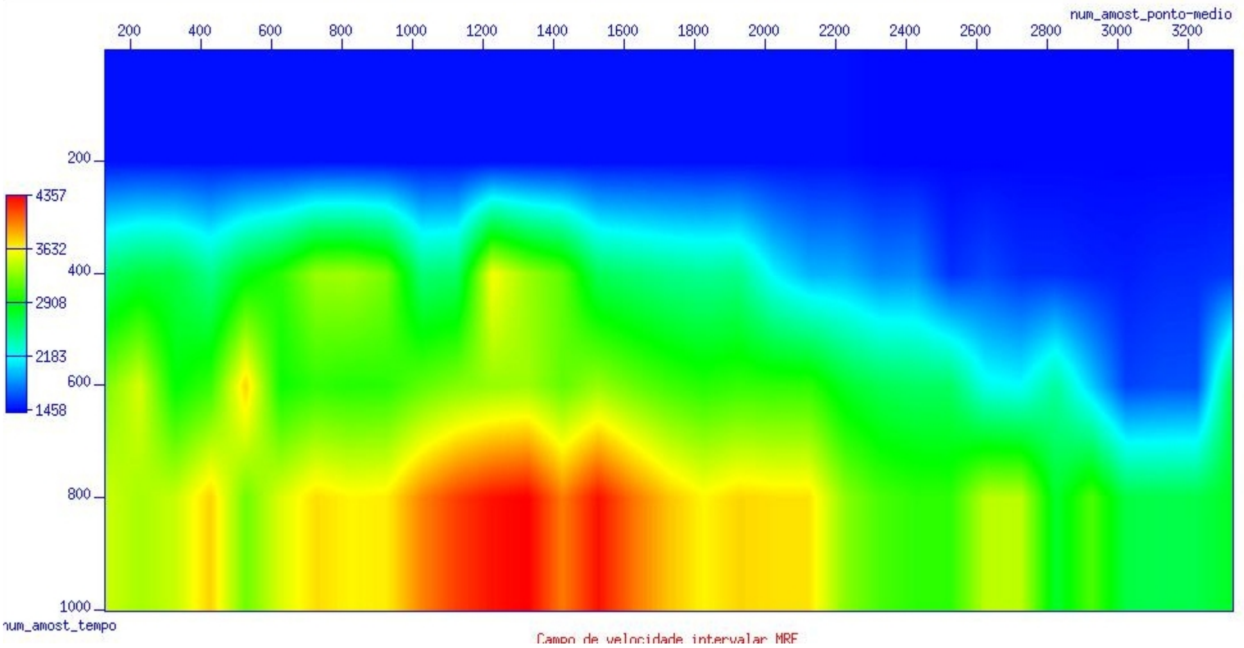

Figura 6.12: Campo de velocidades intervalares do dado real obtido pela MRE.

pela fórmula de Dix. O resultado obtido pela MRE foi diretamente afetado pela introdução da informação a priori linearmente crescente no processo de inversão.

A Figura 6.12 mostra o campo de velocidades intervalares obtido pela aplicação da MRE ao problema, utilizando a priori linearmente crescente. O resultado obtido pela aplicação da MRE ao problema foi consideravelmente diferente dos resultado envolvendo a aplicação da SVD e fórmula de Dix. O campo de velocidades obtido pela MRE posicionou de modo mais contínuo a camada de alta velocidade do dado. Esse fato possui fundamentação nas estimativas de velocidades intervalares oriundas do dado de poço analisado.

Outro tipo de informação a priori foi utilizada, a informação advinda do próprio poço. O uso desse tipo de informação é justificado pelo fato de que existe uma distância considerável entre a linha sísmica e o poço utilizado. Além de que para os CDPs mais distântes do poço, o CDP 627 por exemplo, as informações do dado de poço não representam uma estimativa próxima das velocidades reais de subsuperfície, devido a distância e complexidade da geologia típica da região de quebra do talude.

A Figura 6.13 apresenta o resultado obtido pela aplicação da SVD aos dados de velocidade RMS obtidos para o CDP 627 do dado. É possivel observar o a priori das velocidades intervalares extraído do perfil sônico. O resultado obtido pela aplicação da SVD ao problema obteve resultados próximos ao obtido pela aplicação da fórmula de Dix.

A Figura 6.14 mostra a resposta apresentada pela aplicação da SVD aos dados do CDP 3027. A figura mostra que a SVD não se mostrou afetada de modo significativo pela inserção da estimativa a priori ao processo de inversão.

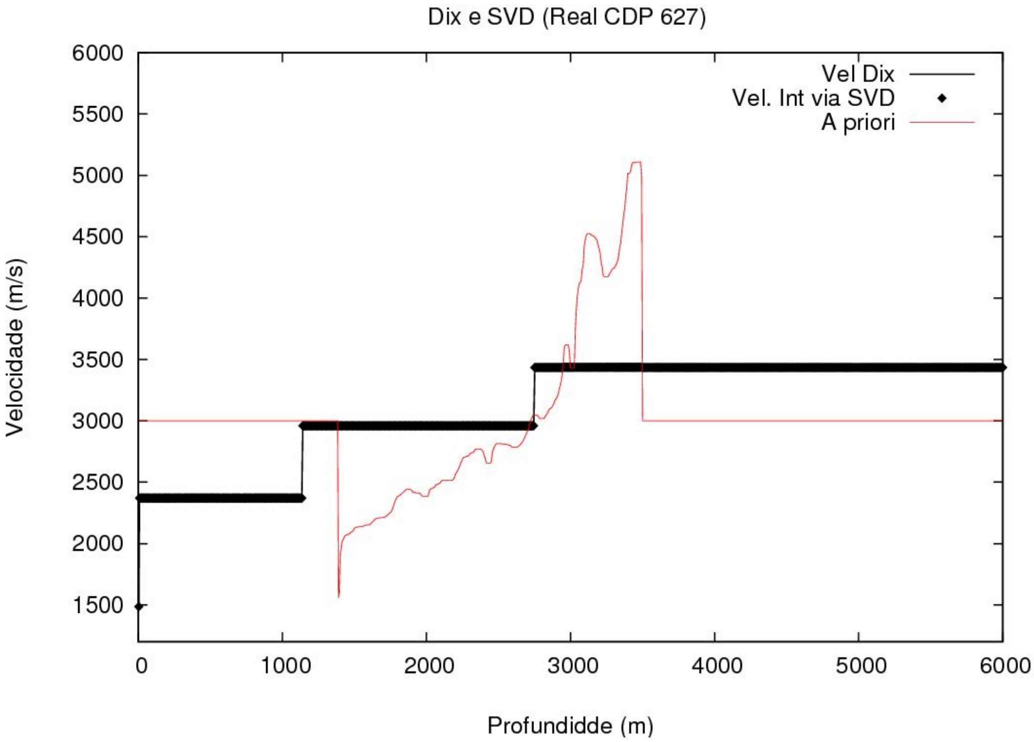

Figura 6.13: Resultado da inversão para o CDP 627 envolvendo Dix e SVD com a priori de poço (dado real).

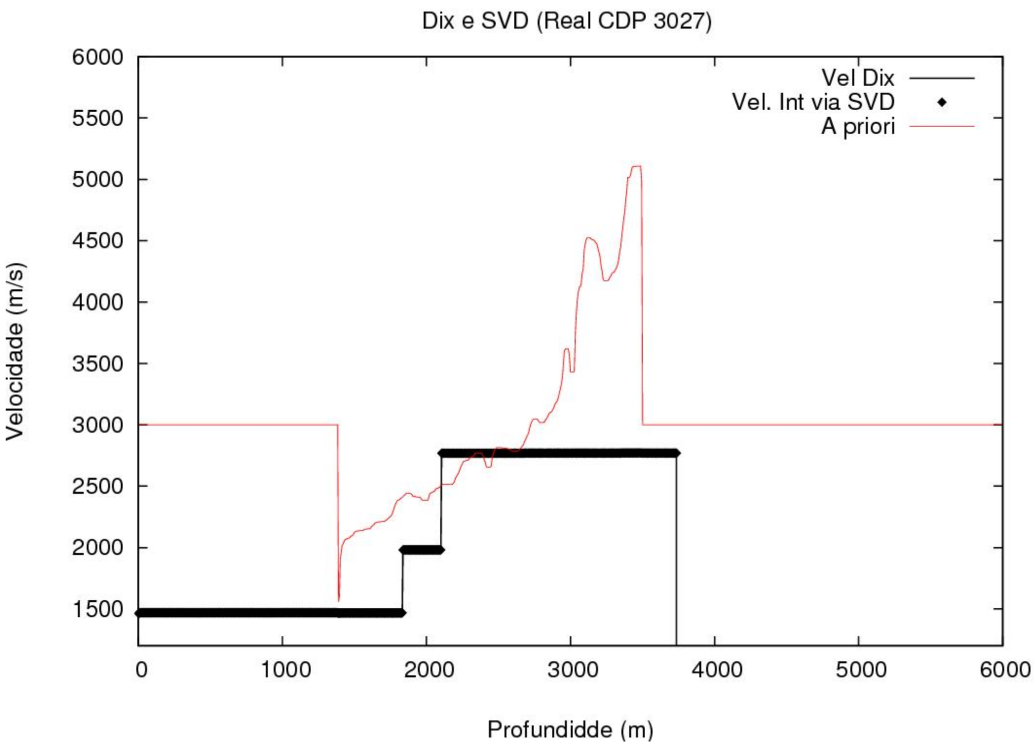

Figura 6.14: Resultado da inversão para o CDP 3027 envovendo Dix e SVD com a priori de poço (dado real).

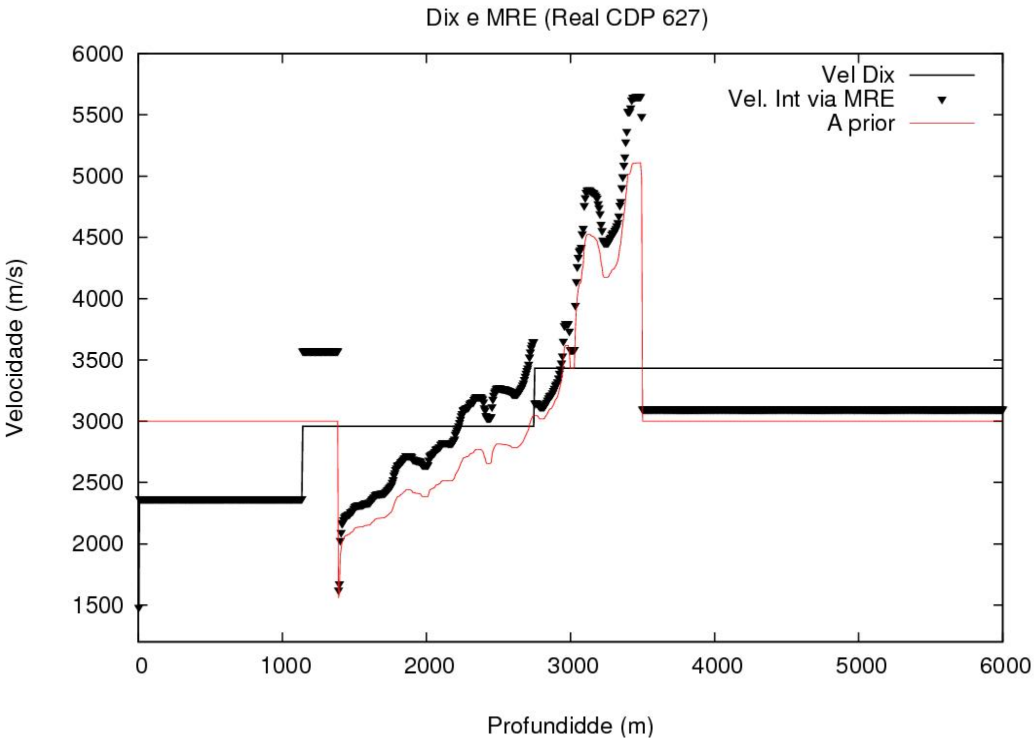

Figura 6.15: Resultado da inversão para o CDP 627 envovendo Dix e MRE com a priori de poço (dado real).

Na Figura 6.15 é possivel observar o resultado obtido pela aplicação da MRE aos dados de velocidade RMS do CDP 627, utilizando a priori de poço. As velocidades intervalares obtidas tendem a apresentar um comportamento em profundidade próximo ao do a priori adicionado. A aplicação da abordagem MRE mostra-se muito sensível a adição de estimativas a priori ao problema de inversão.

A Figura 6.16 mostra o mesmo resultado obtido anteriormente, porém, com maior foco na região onde há estimativa fornecida pelo perfil sônico, as profundidades entre 1490 e 3500 m. Observamos uma grande diferença entre o resultado apresentado pela fórmula de Dix e as velocidades obtidas pela aplicação da MRE utilizando a priori de poço.

A Figura 6.17 apresenta o resultado obtido pela MRE para o CDP 3027, utilizado o mesmo a priori usado nas figuras anteriores. O CDP 3027 está mais próximo do poço. A estimativa das velocidades intervalares obtidas se aproxima da estimativa a priori, além de adequar-se perfeitamente aos dados observados. Estipulamos a priori constante onde não há informação de poço, ou seja, fora do intervalo de profundidades entre 1490 e 3500 m. Nessa região, os resultados apresentados pela MRE são os mesmos apresentados pela fórmula de Dix.

A Figura 6.18 mostra o resultado anterior, porém, com maior detalhe nas profundidades onde há informação proviniente do perfil sônico, a exemplo da Figura 6.16.

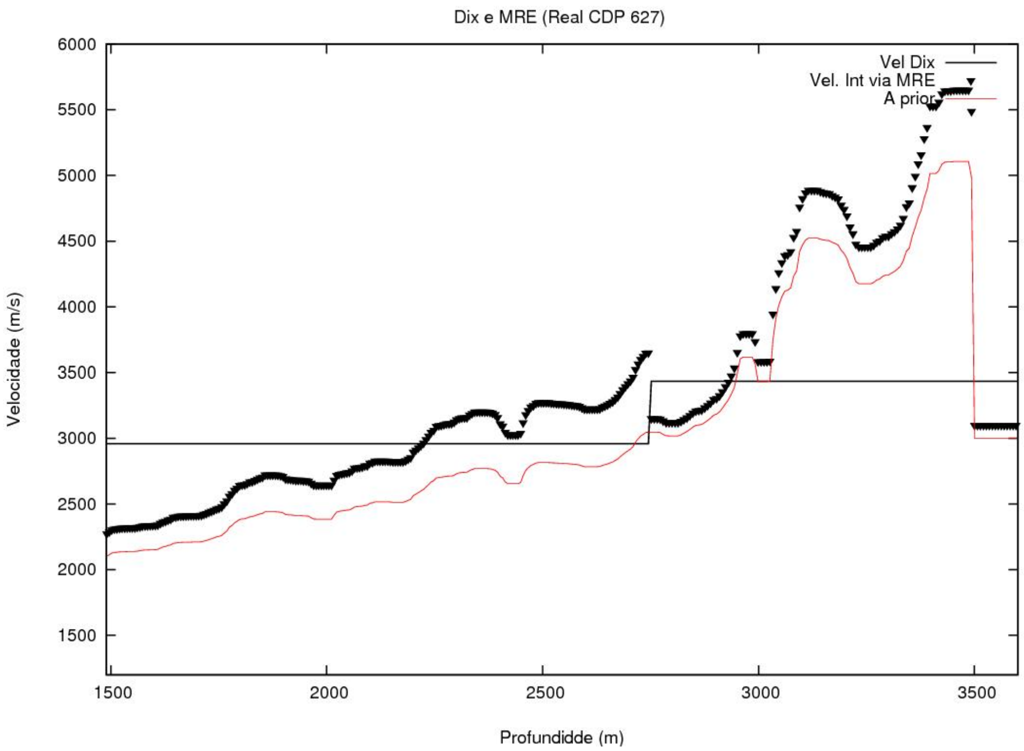

Figura 6.16: Zoom no resultado da inversão para o CDP 627 envolvendo Dix e MRE (dado real).

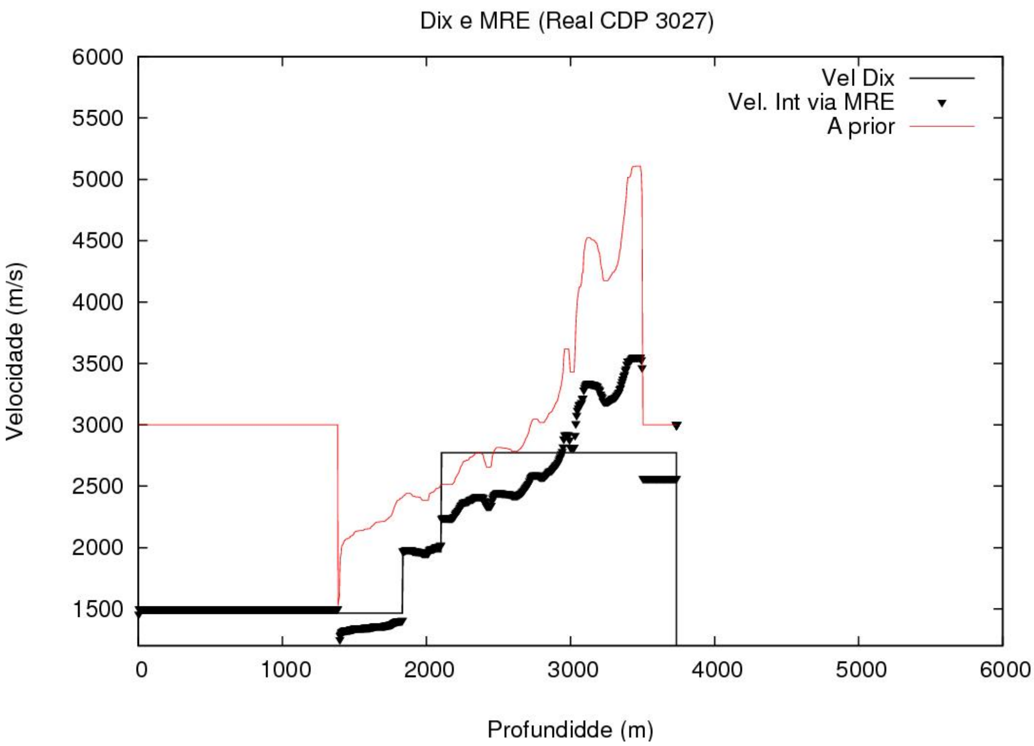

Figura 6.17: Resultado da inversão para o CDP 3027 envovendo Dix e MRE com a priori de poço (dado real).

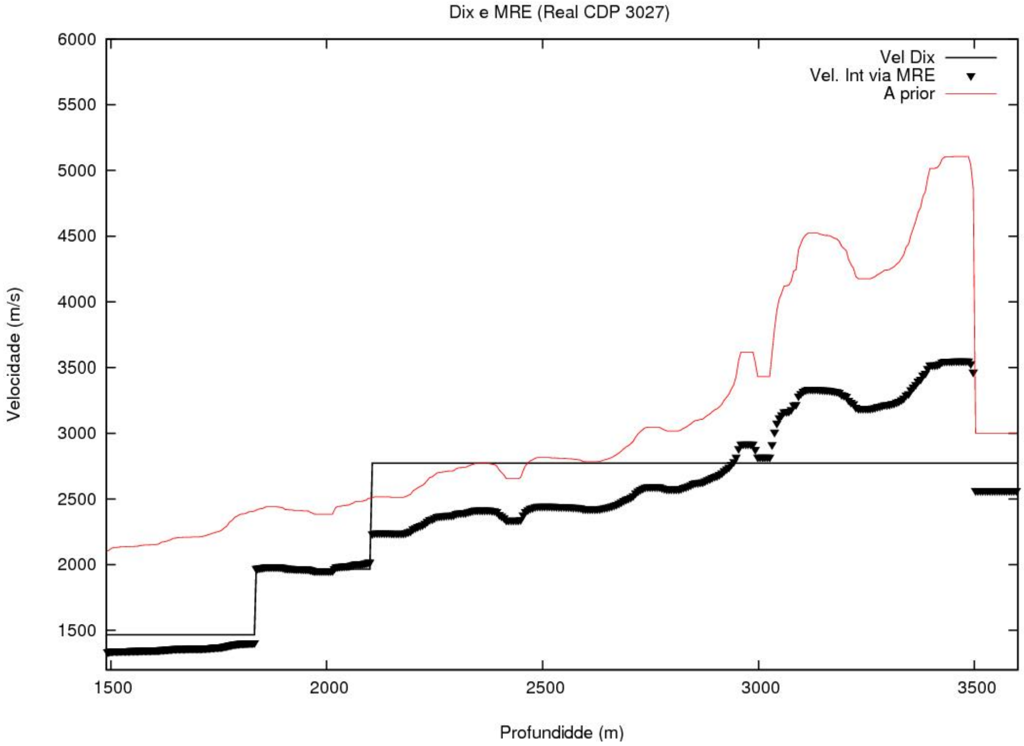

Figura 6.18: Zoom no resultado da inversão para o CDP 3027 envolvendo Dix e MRE (dado real).

As velocidades intervalares obtidas, como nos resultados anteriores, apresentam um comportamento próximo ao do a priori adicionado. Nesse caso, é possivel observar um maior deslocamento entre a curva de velocidades intervalares obtidas pela MRE e a curva do a priori utilizado. Esse fato é devido a necessidade da inversão satisfazer, também, os dados observados do modelo. A região do CDP 3027 apresenta redução na cobertura CDP, o que acaba por prejudicar a qualidade dos dados observados, uma vez que análise de velocidade fica comprometida nessas regiões.

A Figura 6.19 apresenta o resultado final do processamento realizado na linha RL-214-0266. A seção sísmica empilhada foi obtida pelo processamento convencional iniciado no FOCUS com o importe do dado, montagem de geometria, edição, mute, filtragem e análise de velocidade. O processamento foi concluido utilizando o pacote Seismic Unix com as etapas de correção NMO e empilhamento, que por fim nos permitiu obter a seção sísmica apresentada na figura.

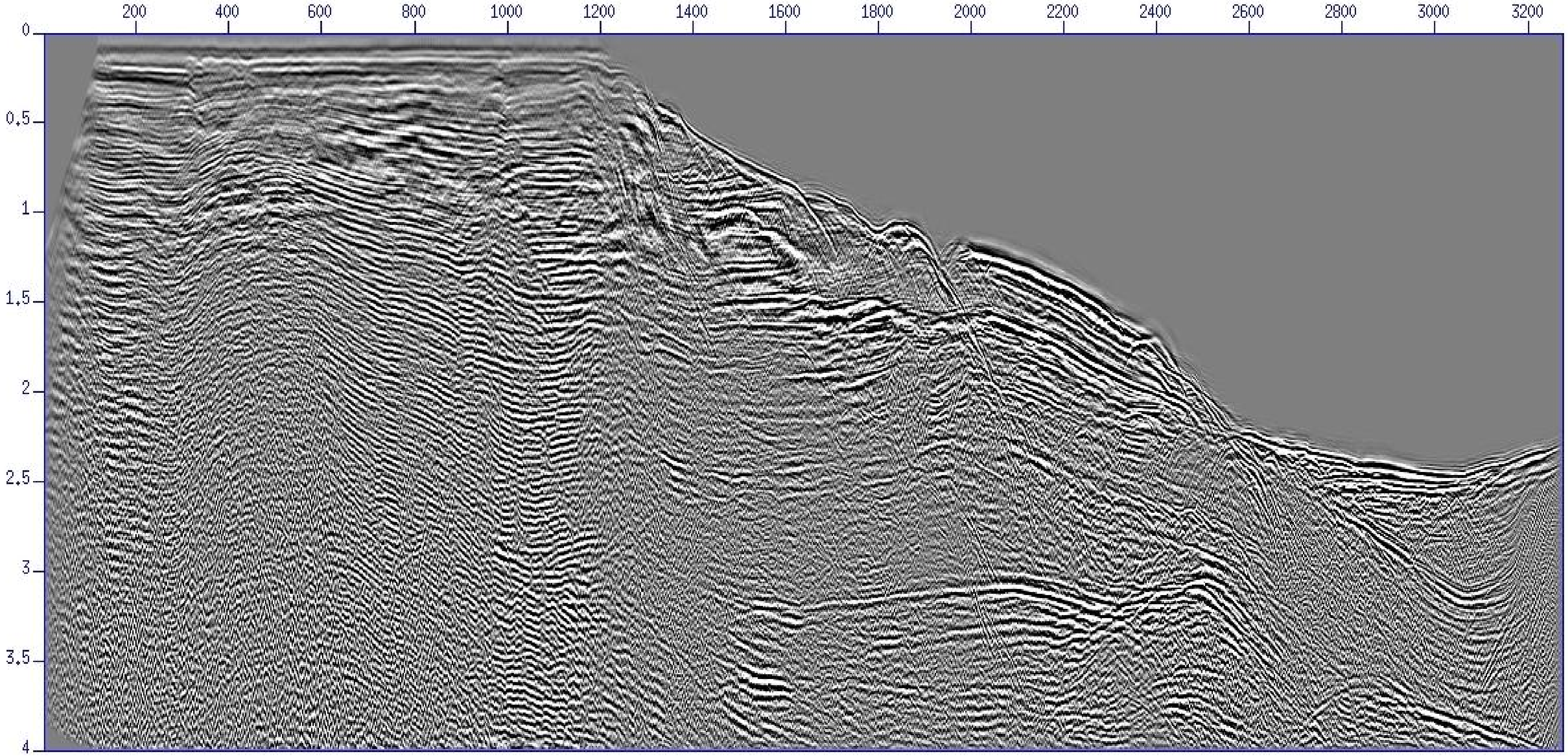

Figura 6.19: Seção sísmica empilhada, resultado do processamento convencional utilizando FOCUS e SU, linha sísmica RL-214-0266, dado da bacia do Jequitinhonha.

CAPÍTULO 7

Conclusões

A utilização da fórmula de Dix para obtenção de estimativas de campos de velocidades intervalares mostra-se uma abordagem limitada a modelos geológicos simples. A aplicação direta da fórmula de Dix, a modelos geológicos que apresentam consideravel complexidade, têm como consequência a obtenção de estimativas de campos de velocidades intervalares que apresentam consideravel inconsistência, e erros que muitas vezes se mostram inaceitáveis quando comparados as velocidades verdadeiras dos modelos ou dos meios geológicos.

A conversão tempo-profundidade, proposta por Dix, também se mostra uma aproximação que deve ter sua utilização condicionada a casos específicos. Esses casos se restringem a pequenos afastamentos, onde a incidência dos raio de propagação do pulso sísmico se aproxima do caso ideal de incidência normal à superfície de reflexão. Para médios e grandes afastamentos, a utilização dessa forma de conversão pode ocasionar erros na determinação dos intervalos de profundidades das camadas do modelo.

A inversão de velocidades intervalares mostra-se uma alternativa válida para minimização dos erros na obtenção de estimativas de campo de velocidades intervalares em modelos que apresentam maior complexidade. Apesar de oferecer maior custo computacional que a abordagem convencional, a inversão mostra-se eficiente e robusta na determinação de melhores estimativas para campos de velocidade intervalares.

A aplicação da SVD ao problema de inversão de velocidades intervalares, apesar de útil e robusta, na grande maioria dos casos, obteve igual eficiência em relação a abordagem convencional utilizada pelos pacotes de processamento de dados sísmicos.

A utilização da MRE mostrou-se útil, e de grande eficiência na determinação de boas estimativas de velocidades intervalares, tanto para modelos sintéticos como para dados reais. Em todos os casos estudados nesse trabalho, a aplicação da MRE obteve resultados consideravelmente melhores que a abordagem convencional, mostrando-se eficiente, robusta, de maior precisão e viável, devido a seu custo computacional.

A MRE se mostrou uma boa alternativa para obtenção de estimativas confiáveis de velocidades intervalares em dados, ou regiões de dados, que apresentem baixa cobertura CDP. Nessas regiões, onde a informação é escassa, uma vez existindo estimativas a priori, a

MRE consegue recuparar de modo satisfatório boas estimativas das velocidades intervalares do meio. Esse fato é devido a grande sensibilidade da MRE a estimativa a priori incerida no processo de inversão.

Agradecimentos

A deus, na forma em que acredito.

A meus pais, Olter e Vanise, pelo amor, carinho, e apoio incondicional empenhados ao longo de toda minha vida.

A minha tia Vilane, uma pessoa imprescindível a essa conquista, pelo amor, apoio e pelas inúmeras lições de vida.

Ao meu orientador, Dr. Amin Bassrei, pelo conhecimento transmitido, e pela amizade.

A Naiana Guedes, pela compreensão, amizade e pelos momentos vividos ao longo de boa parte desses quatro anos e meio de curso.

A todos os parentes que estiveram presentes ao longo de minha trajetória.

Aos membros da banca, Dr. Jessé Costa e Dr. Milton Porsani.

A Jonatas e Hans Einsiedler, amigos de inúmeras discussões acadêmicas e noitadas de Jazz.

Aos meus irmãos de academia, Caio, Dian e Naiane, pelo convívio e amizade.

Agradeço à Rede de Geofísica de Exploração (Rede 01) Fase II pela bolsa de graduação com recursos PETROBRAS (julho 2007 - junho 2008). Agradeço também à Sociedade Brasileira de Geofísica pela bolsa de graduação (agosto 2008 - julho 2009).

Agradeço a todos que ao longo desses últimos anos estiveram envolvidos de alguma forma com essa conquista.

APÊNDICE A

Inversão de velocidades intervalares pelo PERM e a fórmula de Dix.

Neste apêndice, demostraremos o relacionamento existente entre a aplição da abordagem PERM ao problema de inversão de velocidades intervalares e a fórmula de Dix. Demostraremos que, para uma estimativa a priori constante, o processo de inversão pela abordagem PERM obtém o mesmo resultado apresentado pela fórmula de Dix (Ulrych et al, 1990).

Segundo a definição de velocidade RMS, temos:

$$V_{RMS}^2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t v^2(u)du, \tag{A.1}$$

onde $v^2(u)$ é o quadrado da velocidade intervalar.

As velocidades RMS são obtidas diretamente a partir dos dados sísmicos, através da análise de velocidade, que fornece os pares tempo-velocidade RMS. No entanto, não é possível obter a estimativa das velocidades intervalares da mesma forma. Nosso problema passa a ser estimar $v^2(u)$ a partir de:

$$d_j = \int_0^T G_j(u)v^2(u)du,\ j = 1,\dots,M, \tag{A.2}$$

com

$$\begin{aligned} G_j(u) &= 1,\ u \leq t_j, \\ G_j(u) &= 0,\ u > t_j, \end{aligned} \tag{A.3}$$

onde:

$$d_j = t_j V_{RMS}^2(t_j), \tag{A.4}$$

sendo T igual ao tempo máximo registrado no dado. Aplicando o formalismo PERM ao problema de inversão, obtemos a estimativa final do quadrado das velocidades intervalares:

$$v^2(u) = \frac{1}{1/s(u) + \sum_{j=1}^{M}\lambda_j G_j(u)}, \tag{A.5}$$

onde $s(u)$ é a estimativa inicial de $v^2(u)$. Ao conjugarmos as equações A.2 discretizada, A.4, e A.5, obtemos:

$$d_j = t_j V_{RMS}^2(t_j) = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_{ji}}{1/s_i + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j G_{ji}}, \; j = 1, \ldots, M. \tag{A.6}$$

A partir deste momento, denotamos nossa estimativa inicial $s(u)$, constante no intervalo $[0, T]$, de modo que $a = 1/s(u)$. Substituindo a equação A.5 na equação A.2, tem-se que:

$$d_j = \int_0^{t_j} \frac{du}{a + \sum_k = 1^M \lambda_k}, \; j = 1, \ldots, M. \tag{A.7}$$

A intergral apresentada em A.7 pode ser repartida em:

$$d_j = \int_0^{t_1} \frac{du}{a + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{du}{a + \sum_{k=2}^{M} \lambda_k} + \ldots + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{du}{a + \sum_{k=j}^{M} \lambda_k}, \tag{A.8}$$

ou

$$d_j = \frac{t_1}{a + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k} + \frac{t_2 - t_1}{a + \sum_{k=2}^{M} \lambda_k} + \ldots + \frac{t_j - t_{j-1}}{a + \sum_{k=j}^{M} \lambda_k}, \tag{A.9}$$

ou ainda,

$$d_j = d_{j-1} + \frac{t_j - t_{j-1}}{a + \sum_{k=j}^{M} \lambda_k}. \tag{A.10}$$

Das equações A.3 e A.5, no intervalo $t_{j-1} \leq u < t_j$:

$$v^2(u) = \frac{1}{\sum_{k=j}^{M} \lambda_k}, \tag{A.11}$$

onde a foi incluso em λ_M. Comparando A.11 e A.10, verificamos que em $t_{j-1} \leq u < t_j$, temos:

$$v^2(u) = \frac{d_j - d_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \tag{A.12}$$

usando a equação A.4, finalmente obtemos:

$$v^2(u) = \frac{t_j V_{RMS}^2(t_j) - t_{j-1} V_{RMS}^2(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \tag{A.13}$$

a fórmula de Dix. Desse modo, ao aplicarmos uma estimativa a priori constante no problema de inversão usando o PERM, aplicado a velocidades intervalares, recaímos na fórmula de Dix. Podemos considerar a fórmula de Dix como um caso particular da inversão de velocidades intervalares usando o PERM.

Referências Bibliográficas

Bassrei, A., (1990) Inversão de Dados Geofísicos Unidimensionais através da Entropia Relativa Mínima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

Dix, C. H. (1955) Seismic velocities from surface measurements, Geophysics, 20, 68-86.

Hansen, P. C. (1998) Rank-Deficient and Discrete III-Posed Problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Hanson, C. L., and Lawson, C. L., (1974) Solving Least Square Problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Hatton, L. Worthington, M. H., and Makin, J. (1986) Seismic Data Processing - Theory and Practice, Blackwell, Oxford.

Jaynes, E. T. (1957) Information theory and statistical mechanics, Physical Review, 106, 620-630.

Johnson, R. W. (1983) Algorithms for single-signal and multisignal minimum-cross-entropy spectral analysis, Naval Reseaech Laboratory Report No. 8667, Washington, DC.

Lanczos, C. (1961) Linear Differetial Operators. Van Nostrand, London.

Levenberg, K. (1944) A method for the solution of the certain non-linear problems in last squares, Quartely of Applied Mathematics, 2, 164-168.

Noble, B. e Daniel, J. W. (1986) Álgebra Linear Aplicada, Editora Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro.

Marquardt, D. W. (1963) An algorithm for least-squares of nonlinear parameters, Jornal of Society for Industrial and Applied Mathematics, 11, 431-441.

Menke, W. (1984) Gephysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, Academic Press, Orlando, FLorida, 260.

Penrose, R. (1955) A generalized inverse for matrices, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 51, 406-413.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., (1992) Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing, Second Edition, Cambridge University Press.

Rietsch, E. (1988) Extreme models from the maximum entropy formulation of inverse problems, Journal of Geophysics, 44, 273-275.

Shah, P. M. (1973) Use of wave front curvature to relate seismic data with subsurface parameters, Geophysics, 38, 812-825.

Shannon, C. E., and Weaver, W. (1949) The Mathematical Theory of Communition, The University of Illinois Press, Urbana.

Shore, J. E. (1981) Minimun cross-entropy spectral analysis, Institute of Eletrical and Eletronics Engineers Transaction on Acoustic and Speech Signal Processing, 29, 230-237.

Shore, J. E., and Johnson, R. W. (1980) Axiomatic devivation of the priciple of the minimum cross entropy, Institute of Eletrical and Eletronics Engineers Transaction on IT, 26, 26-37.

Shore, J. E., and Johnson, R. W. (1983) Minimun Cross- Entropy Spectral Analysis of Multiples Signals, Institute of Eletrical and Eletronics Engineers Transaction on Acoustic and Speech Signal Processing, 31,574-582.

Taner, M. T. and Koehler, F. (1969) Velocity spectra-digital computer derivation ans aplications of velocity functions; Geophysics, 34, 859-881.

Tarantola, A. (1987) Inverse Problem Theory - Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation, Elsevier, Amsterdam, 613.

Ulrych, T., Bassrei, A. and Lane, M., (1990) Minimum relative entropy inversion of 1D with apllication, Geophysical Prospecting, 38, 465-487.

Wiener N., (1948) Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine, The Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts.