Versão preliminar
10 de setembro de 2002

Notas de Aula de Física

10. COLISÕES ... 2
O QUE É UMA COLISÃO ... 2
FORÇA IMPULSIVA, IMPULSO E MOMENTO LINEAR ... 2
FORÇA IMPULSIVA MÉDIA ... 3
CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR DURANTE UMA COLISÃO ... 3
COLISÃO ELÁSTICA EM UMA DIMENSÃO ... 4
COLISÃO ELÁSTICA EM DUAS DIMENSÕES ... 6
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS ... 8
19 ... 8
20 ... 8
23 ... 9
29 ... 10
31 ... 11
35 ... 12
45 ... 13
54 ... 14
66 ... 15
69 ... 16
70 ... 16

10. Colisões

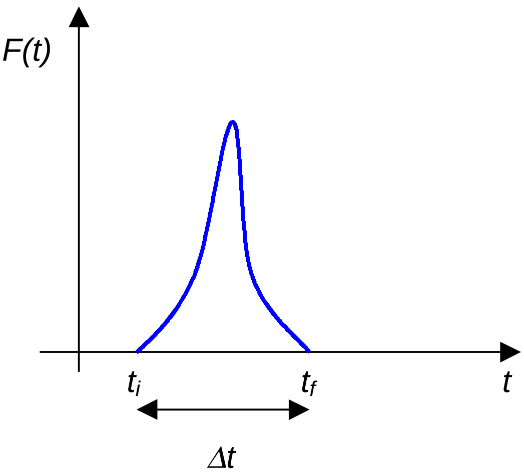
Em um choque, forças relativamente grandes, atuam em cada uma das partículas que colidem, durante um intervalo de tempo relativamente curto. Um exemplo corriqueiro seria um esbarrão entre duas pessoas distraídas. Não existe alguma interação significativa entre elas durante a aproximação e até que se choquem. Durante o choque existe uma forte interação que eventualmente pode causar danos físicos. Depois da colisão volta-se a situação inicial onde não existia interação significativa.

O que é uma colisão

Podemos analisar com mais detalhes esses eventos se considerarmos a colisão entre duas bolas de bilhar, onde uma bola rola em direção a uma segunda que está em repouso.

De maneira equivalente ao esbarrão, mencionado anteriormente, não existe interação significativa entre as duas bolas de bilhar enquanto elas se aproximam e quando elas se afastam depois da colisão. A força de interação que descreve a colisão tem grande intensidade e curta duração, como descrito no gráfico ao lado.

Forças como essa, que atuam durante um intervalo pequeno comparado com o tempo de observação do sistema, são chamadas de forças impulsivas.



Força impulsiva, impulso e momento linear

Vamos considerar uma partícula isolada, que se move com momento [illegible] . A partir de um certo tempo t_i até um instante posterior t_f , passa a atuar sobre ela uma força $\vec{F}_{12}$. O momento da partícula vai sofrer alteração [illegible] devido a existência da força atuante e essa variação é também chamada de impulso [illegible] . A segunda Lei de Newton, tem a forma:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

ou seja:

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{c} \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} \\ \\ \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt = \vec{J} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

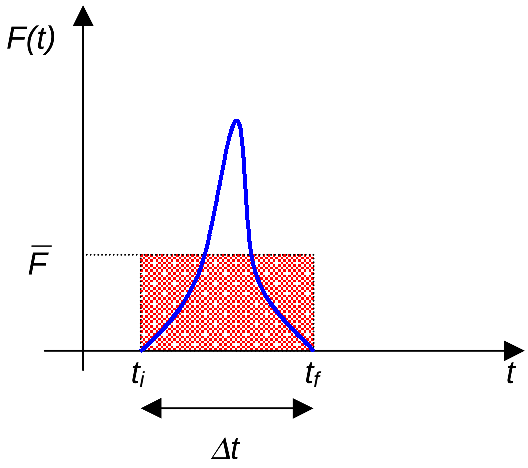
Força impulsiva média

Algumas vezes é mais interessante considerar o valor médio da força impulsiva que o seu valor a cada instante. Considerando a situação unidimensional podemos definir a força impulsiva média $\bar{F}$ que atua em uma partícula durante a colisão como

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F(t)dt = \bar{F}\Delta t$$

ou seja:

$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} F(t)dt$$

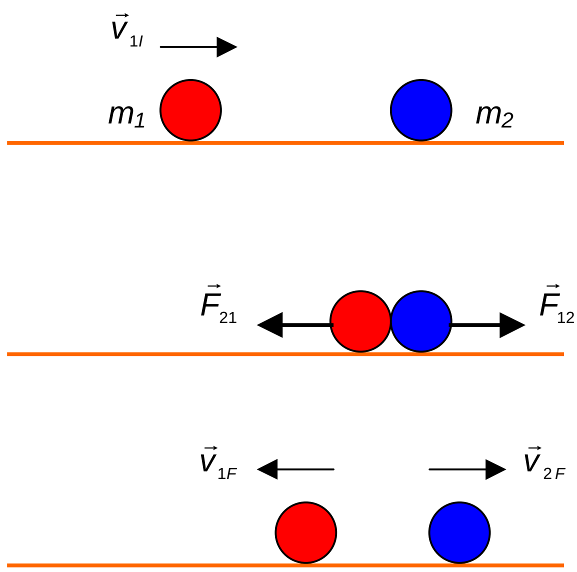


Estamos considerando que a área abaixo da curva *F(t)* é a mesma área abaixo da curva $\bar{F}$, daí as integrais terem os mesmos valores

Conservação do momento linear durante uma colisão

Vamos considerar duas bolas de bilhar com mesma forma e pesos diferentes.

Uma das bolas se movimenta em direção à segunda que está em repouso. Depois da colisão as duas bolas se movimentam em sentidos contrários.



Durante a colisão, entram em ação as forças impulsivas descritas anteriormente. A bola *1* exerce uma força $\vec{F}_{12}$ na bola *2* e de maneira equivalente a bola *2* exerce uma força $\vec{F}_{21}$ na bola *1* .

Usando a terceira Lei de Newton, é fácil perceber que $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ são forças de ação e reação, logo:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Logo

$$\begin{cases} \Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}(t)dt = \bar{\vec{F}}_{21}\,\Delta t \\ \\ \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}(t)dt = \bar{\vec{F}}_{12}\,\Delta t \end{cases}$$

Mas

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Rightarrow \quad \bar{\vec{F}}_{12} = -\bar{\vec{F}}_{21} \quad \therefore \quad \Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$$

ou seja:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Encontramos que o momento linear total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ de um sistema isolado composto de duas bolas, se conserva durante uma colisão. Esse resultado é facilmente extensível para colisões múltiplas.

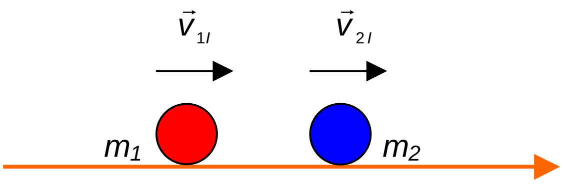
Colisão elástica em uma dimensão

As colisões podem ser divididas em dois tipos, aquelas que conservam a energia cinéticas - ditas elásticas, e aquelas que não conservam a energia cinética - ditas inelásticas.

Vamos considerar a colisão de duas bolas de massas m_1 e m_2 descrita a seguir:

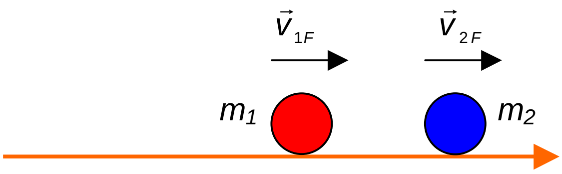
Antes da colisão

Temos que $v_{1I} > v_{2I}$, pois em caso contrário não existiria a colisão.



Depois da colisão

Temos que $v_{1F} < v_{2F}$, pois em caso contrário existiriam outras colisões depois da primeira.



Usando a conservação do momento linear total, temos que:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

ou seja:

$$(\vec{p}_{1F} - \vec{p}_{1I}) + (\vec{p}_{2F} - \vec{p}_{2I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{1I} + \vec{p}_{2I} = \vec{p}_{1F} + \vec{p}_{2F}$$

Considerando apenas a situação unidimensional, temos:

$$m_1 v_{1I} + m_2 v_{2I} = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F}$$

ou seja:

$$m_1 (v_{1I} - v_{1F}) = m_2 (v_{2F} - v_{2I}) \qquad (1)$$

Quando a colisão for elástica, existe a conservação da energia cinética total, logo:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1I}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2I}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1F}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2F}^2$$

ou seja:

$$m_1\left(v_{1I}^2 - v_{1F}^2\right) = m_2\left(v_{2F}^2 - v_{2I}^2\right)$$

ou ainda:

$$m_1\left(v_{1I} + v_{1F}\right)\left(v_{1I} - v_{1F}\right) = m_2\left(v_{2I} + v_{2F}\right)\left(v_{2I} - v_{2F}\right) \qquad (2)$$

Dividindo a equação (2) pela equação (1) , encontramos:

$$v_{1I} + v_{1F} = v_{2I} + v_{2F} \qquad (3)$$

ou seja:

$$v_{1I} - v_{1I} = v_{2F} - v_{1F} \quad \Rightarrow \quad \left(V_{\mathrm{Re}\,lativa}\right)_I = \left(V_{\mathrm{Re}\,lativa}\right)_F$$

onde a validade da última equação se restringe ao caso de colisões elásticas.

Da equação (3) temos que:

$$v_{2F} = v_{1I} + v_{1F} - v_{2I} \qquad (4)$$

e usando esse resultado na equação (1) , temos:

$$m_1\left(v_{1I} - v_{1F}\right) = m_2\left(v_{1I} + v_{1F} - v_{2I}\right) - m_2 v_{2I}$$

ou seja:

$$v_{1F} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2I} \qquad (5)$$

Usando esse valor na equação (4) , encontramos:

$$v_{2F} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2I} \qquad (6)$$

A partir das equações (5) e (6) poderemos analisar diversas situações:

a. *As bolas têm mesma massa*: $m_1 = m_2 = m$. O resultado desse tipo de colisão é que as bolas trocarão de velocidade:

$$\begin{cases} v_{1F} = v_{2I} \\ v_{2F} = V_{1I} \end{cases}$$

b. Uma partícula está em repouso:

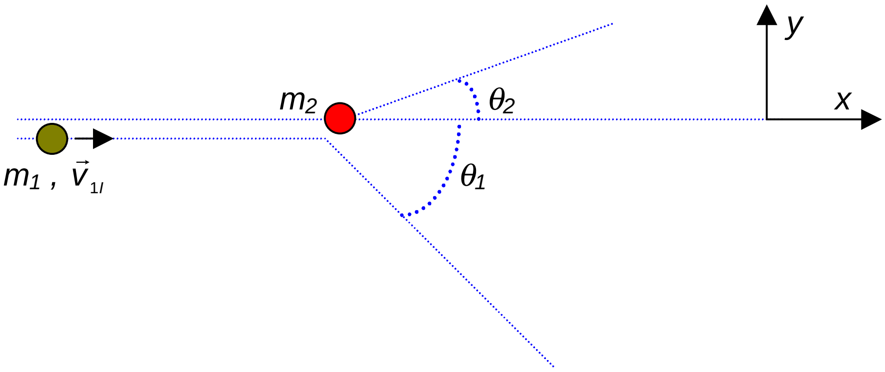
$$\begin{cases} v_{1F} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} \\ v_{2F} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1I} \end{cases}$$

Nessa situação ainda temos várias possibilidades:

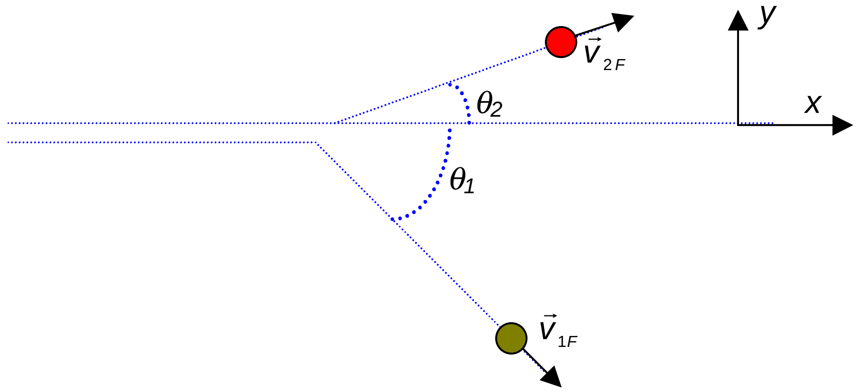
b1.	$m_1 < m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} < 0$	$\Rightarrow$	*m_1 inverte o sentido da sua velocidade.*
b2.	$m_1 > m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} > v_{1I}$	$\Rightarrow$	*m_1 diminui a sua velocidade em relação a situação antes da colisão.*
b3.	$m_1 = m_2$	$\Rightarrow$	$v_{1F} = 0$ $v_{2F} = v_{1I}$	$\Rightarrow$	*Uma bola pára e a outra arranca.*

Colisão elástica em duas dimensões

Vamos considerar uma partícula de massa m_1 e velocidade $\vec{v}_{1I}$ se deslocando em direção de uma outra partícula de massa m_2 que se encontra em repouso.



Após a colisão as partículas se movem com velocidades $\vec{v}_{1F}$ e $\vec{v}_{2F}$ que fazem ângulos θ_1 e θ_2 com a direção original da partícula de massa m_1 .



Usando a conservação da energia cinética total, encontramos que:

$$\begin{cases} K_I = K_F \\ \frac{1}{2}m_1v_{1I}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1F}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2F}^2 \end{cases}$$

e usando a conservação do momento linear total, encontramos que:

$$\begin{cases} \vec{P}_I = \vec{P}_F \\ em\ x: \quad m_1 v_{1I} = m_1 v_{1F} \cos\theta_1 + m_2 v_{2F} \cos\theta_2 \\ em\ y: \quad 0 = -m_1 v_{1F} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2F} \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases}$$

Para esse problema conhecemos, em princípio, os parâmetros m_1 , m_2 , v_{1I} e θ_1 . Temos três equações para calcular os valores das incógnitas v_{1F} , v_{2F} e θ_2 .

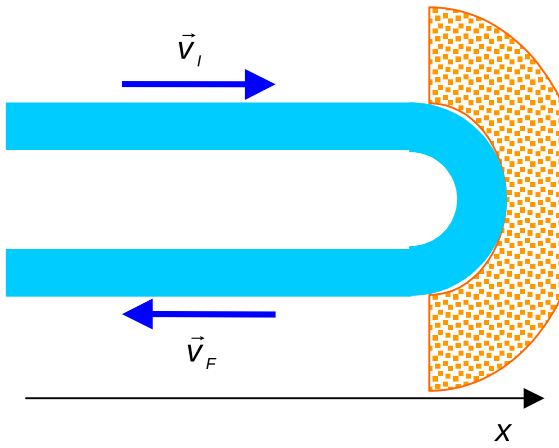
Solução de alguns problemas

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

19 Uma corrente de água colide contra uma pá de turbina estacionária em forma de "prato" , conforme a figura a seguir. O módulo da velocidade é v , tanto antes quanto depois de atingir a superfície curva da pá, e a massa de água atingindo esta por unidade de tempo tem valor μ constante. Encontre a força exercida pela água sobre a pá.

μ = fluxo de água atingindo a pá.

$$\mu = \frac{m}{\Delta t}$$



A segunda Lei de Newton diz que a força resultante que atua na água tem a forma:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\Delta \vec{v} = \mu \, \Delta \vec{v}$$

Mas

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_I = \left(-\hat{i}v\right) - \left(+\hat{i}v\right) = -2\hat{i}\,v$$

$$\vec{F} = \mu\left(-2\hat{i}\,v\right) = -2\hat{i}\mu v$$

A força que a água exerce na pá tem mesmo módulo e sentido contrário. ou seja:

$$\vec{F}_{Pá} = 2\hat{i}\mu v$$

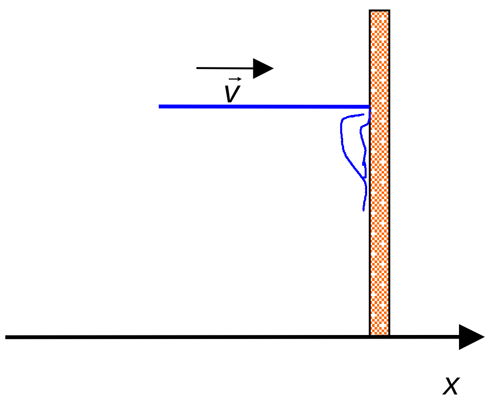
Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

20 Uma corrente de água de uma mangueira espalha-se sobre uma parede. Se a velocidade da água for de $5m/s$ e a mangueira espalhar $300cm^3/s$, qual será a força média exercida sobre a parede pela corrente de água? Suponha que a água não se espalhe de volta apreciavelmente. Cada centímetro cúbico de água tem massa de $1g$.

$v = 5m/s$

$\nu = 300cm^3/s = 4x10^{-4}m^3/s$

$\rho = 1g/cm^3 = 10^3Kg/m^3$



A densidade ρ de um corpo é definida como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho V$$

onde m é a sua massa e V o volume ocupado por esse corpo.

O fluxo volumétrico ν é definido como:

$$\nu = \frac{V}{\Delta t}$$

O fluxo de massa μ é definido como:

$$\mu = \frac{m}{\Delta t} = \rho \frac{V}{\Delta t} = \rho \nu$$

É suposto que a água se aproxima da parede com velocidade de módulo v , colide com ela de modo a escorrer suavemente. Desse modo podemos considerar como nula a sua velocidade final.

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_I = 0 - \hat{i} v = -\hat{i} v$$

A força exercida pela parede sobre a água tem a forma:

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \Delta \vec{v} = -\hat{i}\ \rho \nu v$$

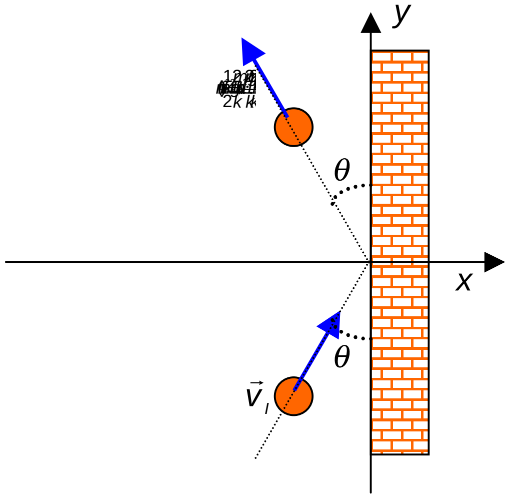
A força que a água exerce na parede tem mesmo módulo e sentido contrário. ou seja:

$$\vec{F} = \hat{i}\ \rho \nu v = \hat{\imath}\ (10^3 Kg/m^3)(3x10^{-4} m^3/s)(5m/s) = \hat{\imath}\ 1,5N$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
23	Uma bola de $300g$ com uma velocidade $v = 6m/s$ atinge uma parede a uma ângulo $\theta = 30^0$ e, então, ricocheteia com mesmo ângulo e velocidade de mesmo módulo. Ela fica em contato com a parede por $10ms$.

a) Qual foi o impulso sobre a bola?

$m = 300g = 0,3kg$
$v = 6m/s$
$\theta = 30^0$
$\Delta t = 10ms = 0,01s$



O momento linear da bola é:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

onde:

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$\vec{p}_F = \hat{i} p_{Fx} + \hat{j} p_{Fy} \qquad \begin{cases} p_{Fx} = -p \operatorname{sen}\theta \\ p_{Fy} = p \cos\theta \end{cases}$$

$$v_3^2 = 2g(2d - L) = g(L - d) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3L}{5}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = -2\hat{i}\, p \operatorname{sen}\theta = -\hat{i}\, 2(0{,}3x6)0{,}5 = -\hat{i}1{,}8\, N.s$$

b) Qual a força média exercida pela bola sobre a parede?

A força que a parede faz na bola é:

$$P = (F_C)_3 \Rightarrow mg = m\frac{v_3^2}{r} \;\therefore\; v_3^2 = gr = g(L-d)$$

E como conseqüência, a força que a bola faz na parede é:

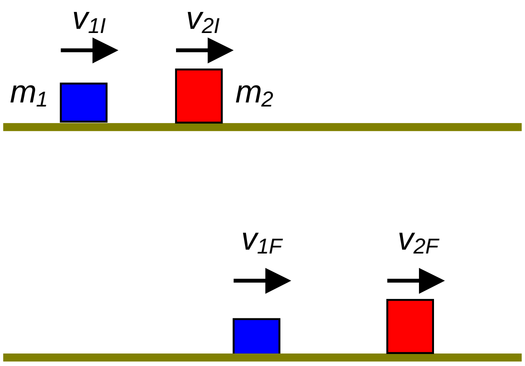
$$\bar{\vec{F}}_P = -\bar{\vec{F}} = +\hat{i}\, 180N$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

29 Os dois blocos da figura a seguir deslizam sem atrito.

a) Qual a velocidade do bloco de $m_1 = 6kg$ após a colisão?

$m_1 = 1{,}6kg$ $\quad$ $v_{1I} = 5{,}5m/s$
$m_2 = 2{,}4kg$ $\quad$ $v_{2I} = 2{,}5m/s$
$v_{2F} = 4{,}9m/s$



Como a força externa resultante é nula, o momento total do sistema se conserva:

$$P_I = P_F$$

$$m_1\, v_{1I} + m_2\, v_{2I} = m_1\, v_{1F} + m_2\, v_{2F}$$

ou seja:

$$v_3 = \sqrt{2g(2d - L)}$$

b) A colisão é elástica?

$$K_I = \frac{1}{2}m_1 v_{1I}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2I}^2 = 31{,}7J$$

$$mgL = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg[2(L-d)]$$

Como $K_I = K_F$, a colisão é elástica.

c) Suponha que a velocidade inicial do bloco $m_2 = 2,4kg$ seja oposta a exibida. Após a colisão, a velocidade v_{2F} pode estar no sentido ilustrado?

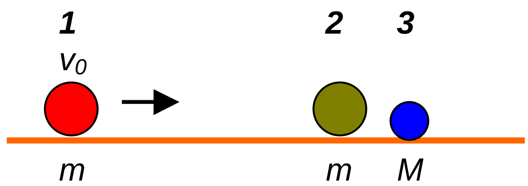
Neste caso teremos as seguintes possibilidades:

$$\hat{i} m_1 v_{1I} - \hat{i} m_2 v_{2I} = 2,8\hat{i} \qquad \begin{cases} \hat{i} m_1 v_{1F} + \hat{i} m_2 v_{2F} = 14,8\hat{i} \\ ou \\ -\hat{i} m_1 v_{1F} + \hat{i} m_2 v_{2F} = 8,72\hat{i} \end{cases}$$

O movimento inicial considerado resulta num certo valor para o momento linear total inicial. Quando consideramos as diversas possibilidades para o movimento dos blocos, o momento linear total final tem valores correspondentes. O que se observa é que não existe a possibilidade da conservação do momento linear total caso usemos a hipótese indicada no enunciado desse item. ***Concluímos então que a velocidade v_{2F} não pode estar no sentido ilustrado, caso a velocidade inicial do bloco $m_2 = 2,4kg$ seja oposta a exibida.***

Capítulo 10 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***	
31	As duas massas da figura a seguir estão ligeiramente separadas e inicialmente em repouso. A massa da esquerda incide sobre as outras duas com velocidade v_0 . Supondo que as colisões são frontais e elásticas. Mostre que se $m \geq M$ acontecerão duas colisões. Encontre as velocidades finais das massas.

$$mgL = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \therefore \quad v_2 = \sqrt{2gL}$$



$$v_{2F} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1I} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2I}$$

Primeiro choque: *massa 1 e massa 2*

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

Segundo choque: *massa 2 e massa 3*

$$\begin{Bmatrix} V_{3I} = 0 \\ V_{2I} = v_{2F} = v_0 \\ m_2 = m \\ m_3 = M \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{2F} = \left(\dfrac{m - M}{m + M} \right) v_0 \\ \\ V_{3F} = \left(\dfrac{2m}{m + M} \right) v_0 \end{cases}$$

$$\frac{V_{2F}}{v_{3F}} = \frac{m - M}{2m} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{m}\right)$$

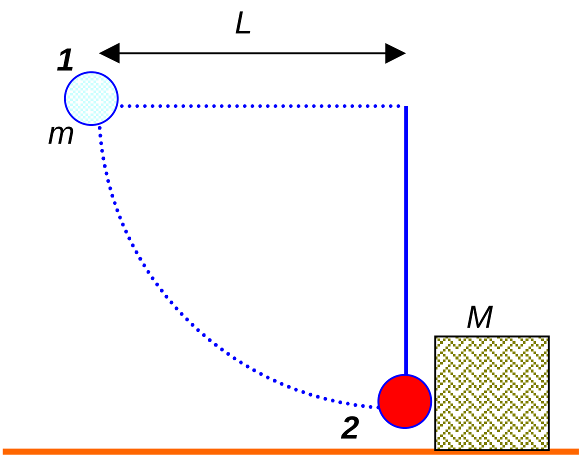
i. Quando $m \geq M$, as velocidades V_{2F} e V_{3F} têm a mesma direção e sentido, mas $V_{3F} \geq V_{2F}$, logo existirão apenas essas duas colisões mencionadas.

ii. Quando $m < M$, as velocidades V_{2F} e V_{3F} têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja a massa m_2 retrocederá e irá se chocar novamente com a massa 1 .

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
35	Uma bola de aço de *0,5kg* de massa é presa a uma corda, de *70cm* de comprimento e fixa na outra ponta, e é liberada quando a corda está na posição horizontal. No ponto mais baixo de sua trajetória, a bola atinge um bloco de aço de *2,5kg* inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica.

a) Encontre a velocidade da bola imediatamente após a colisão.

m = 0,5kg
M = 2,5kg
L = 70cm = 0,7m



A energia mecânica desse sistema quando a bola está na posição *1* é igual à energia mecânica quando a bola está na posição *2* porque entre essas duas situações só atuam forças conservativas. Logo:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_I^2 \quad \Rightarrow \quad v_I = \sqrt{2gL} =$$
$$= 3,47m/s$$

Vamos considerar a posição 2 inicial (antes da colisão) e a posição 2 final (depois da colisão). Como a resultante das forças externas que atuam no sistema é nula, o momento linear total desse sistema se conserva:

$$\vec{P}_I = \vec{P}_F \quad \Rightarrow \quad mv_I = mv_F + MV \qquad (1)$$

Como a colisão é elástica, existirá a conservação da energia cinética:

$$K_I = K_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_I^2 = \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) compões um sistema de duas equações com duas incógnitas: v_F e V, e iremos resolvê-lo da maneira padrão.

Da equação (1) encontramos que:

$$V = \frac{m}{M}(v_I - v_F)$$

e usando esse resultado na equação (2), temos:

$$mv_I^2 = mv_F^2 + \frac{m^2}{M}(v_I - v_F)^2 \quad \Rightarrow \quad v_I^2 - v_F^2 = (v_I - v_F)(v_I + v_F) = \frac{m}{M}(v_I - v_F)^2$$

Considerando que $v_I \neq v_F$

$$v_I + v_F = \frac{m}{M}(v_I - v_F) \quad \Rightarrow \quad v_F = \left(\frac{m - M}{m + M}\right)v_I = -2{,}49 m/s$$

O sinal negativo indica que as duas velocidades v_I e v_F têm sentidos contrários.

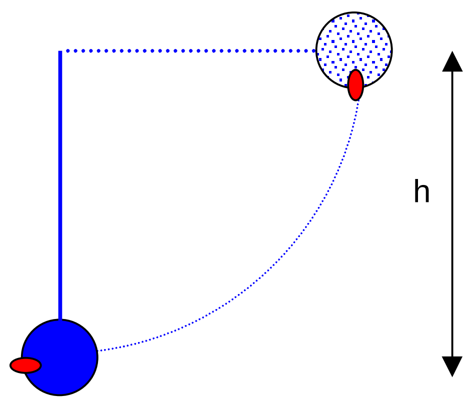
b) Encontre a velocidade do bloco imediatamente após a colisão.

$$V = \frac{m}{M}(v_I - v_F) = \left(\frac{2m}{m + M}\right)v_I = 1{,}24 m/s$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
45	Um projétil de *10g* de massa atinge um pêndulo balístico de *2kg* de massa. O centro de massa do pêndulo eleva-se de uma altura de *12cm* . Considerando-se que o projétil permaneça embutido no pêndulo, calcule a velocidade inicial do projétil.

$m_1 = 10g = 0{,}01kg \qquad h = 12cm = 0{,}12m$

$m_2 = 2kg$



Antes da colisão o projétil tem uma velocidade v_P , e logo após a colisão a velocidade do conjunto é v .

Considerando a conservação do momento linear do conjunto durante a colisão, temos que:

$$P_I = P_F$$

$$m_1 v_P = (m_1 + m_2)\, v$$

ou seja:

$$v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_P$$

O conjunto projétil - pêndulo vai subir uma altura h após a colisão. Considerando a conservação da energia mecânica durante o movimento depois da colisão até o conjunto parar, temos que:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=(m_1+m_2)gh \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2gh}$$

Considerando as duas últimas equações, encontramos que:

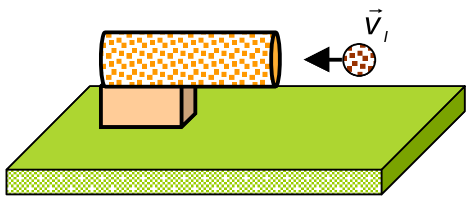
$$v_P=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)v=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}=308,25m/s$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

54 Projeta-se uma bola de massa m com velocidade v_I para dentro do cano de um canhão de mola de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, como na figura a seguir. A bola une-se ao cano no ponto de compressão máxima da mola. Não se perde energia por atrito.

a) Qual a velocidade do canhão após a bola entrar em repouso no cano?

Como o momento linear total do sistema se conserva, temos que:



$$mv_I=(m+M)v_F \quad\therefore\quad v_F=\left(\frac{m}{m+M}\right)v_I$$

onde v_F é a velocidade final do conjunto quando a bola se gruda ao cano.

b) Que fração de energia cinética inicial da bola é armazenada na mola?

Como não existem perdas por atrito, é sugerido que parte da energia cinética inicial da bola se transformará em energia potencial U elástica da mola. Logo:

$$\frac{1}{2}mv_I^2=\frac{1}{2}(m+M)v_F^2+U \quad\Rightarrow\quad U=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}(m+M)v_F^2$$

ou seja:

$$U=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}(m+M)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)v_I\right]^2=\frac{1}{2}mv_I^2-\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_I^2$$

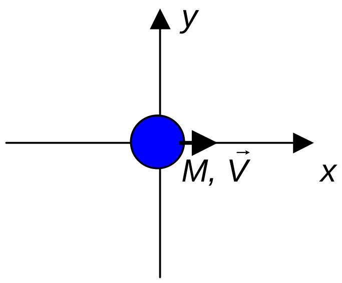
e finalmente

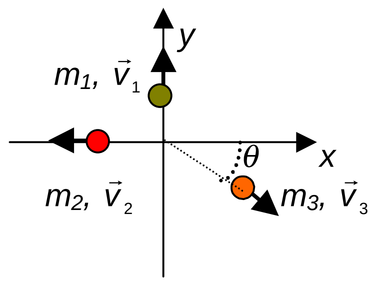
$$U=\frac{1}{2}mv_I^2\left[1-\frac{m}{m+M}\right]$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

66	Um corpo de *20kg* está se deslocando no sentido positivo do *eixo x* com uma velocidade de *200m/s* quando devido a uma explosão interna, quebra-se em três partes. Uma parte, cuja massa é de *10kg* , distancia-se do ponto da explosão com uma velocidade de *100m/s* ao longo do sentido positivo do *eixo y* . Um segundo fragmento, com massa de *4kg* , desloca-se ao longo do sentido negativo do *eixo x* com uma velocidade de *500m/s* .

a) Qual é a velocidade do terceiro fragmento, de *6kg* de massa?





$$\begin{cases} M = 20kg \\ V = 200m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 10kg \\ m_2 = 4kg \\ m_3 = 6kg \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 100m/s \\ v_2 = 500m/s \end{cases}$$

Considerando a conservação do momento linear total, temos que:

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

A equação vetorial acima se decompõe em duas outras escalares, uma referente ao *eixo x* e outra ao *eixo y* :

$$\text{Eixo x:} \qquad MV = - m_2 v_2 + m_3 v_3 \cos\theta$$

$$\text{Eixo y:} \qquad 0 = m_1 v_1 - m_3 v_3 \,\text{sen}\theta$$

$$\begin{cases} m_3 v_3 \,\text{sen}\theta = m_1 v_1 \\ \\ m_3 v_3 \cos\theta = MV + m_2 v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{m_1 v_1}{MV + m_2 v_2} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$

$$\theta = 9{,}46^0$$

$$v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_3 \,\text{sen}\theta} = 1014{,}04m/s$$

b) Quanta energia foi liberada na explosão? Ignore os efeitos devidos à gravidade.

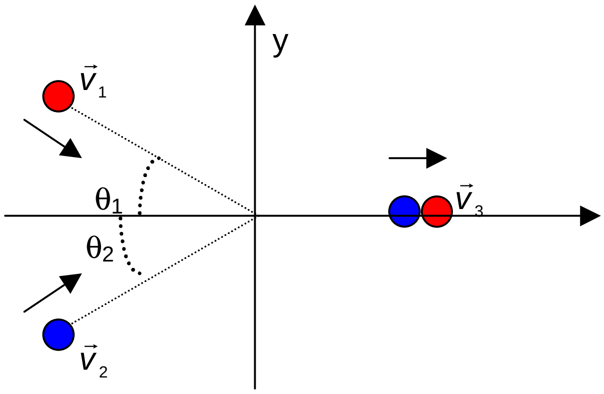
$$K_I = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}20.200^2 = 400.000Joules$$

$$K_F = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = 3.612.724,48J$$

$$\Delta K = K_F - K_I = 3.212.724,48J$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
69	Após uma colisão perfeitamente inelástica, descobre-se que dois objetos de mesma massa e com velocidades iniciais de mesmo módulo deslocam-se juntos com velocidade de módulo igual à metade do módulo de suas velocidades iniciais. Encontre o ângulo entre as velocidades iniciais dos objetos.

$m_1 = m_2 = m$
$v_1 = v_2 = v$
$v_3 = v/2$



Considerando a conservação do momento linear total, temos que:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_3$$

ou seja:

Em x: $m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = (m_1 + m_2) v_3$

Em y: $- m_1 v_1 \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$

Ou seja

Em x: $m v \cos\theta_1 + m v \cos\theta_2 = (m + m) v /2$

Em y: $- m v \operatorname{sen}\theta_1 + m v \operatorname{sen}\theta_2 = 0$

Ou seja:

Em x: $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1$

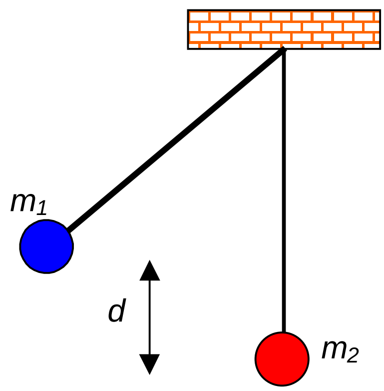
Em y: $- \operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 0$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad \Rightarrow \quad 2\cos\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = 60^0$$

Capítulo 10 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
70	Dois pêndulos, ambos de comprimento L , estão inicialmente posicionados como na figura a seguir. O pêndulo da esquerda é liberado e atinge o outro. Suponha que a colisão seja perfeitamente inelástica, despreze as massas das cordas e quaisquer efeitos de atrito. A que altura se eleva o centro de massa do sistema de pêndulos após a colisão?

Em uma colisão completamente inelástica, os corpos adquirem a mesma velocidade final.

Considerando a conservação da energia mecânica, o pêndulo da esquerda vai alcançar a posição mais baixa com uma velocidade v_0 :



$$m_1 gd = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gd}$$

Após a colisão os pêndulos têm mesma velocidade, e considerando a conservação do momento linear total, teremos:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_0 \quad \therefore \quad v = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\sqrt{2gd}$$

Após a colisão, os dois pêndulos irão subir simultaneamente até uma altura h. Usando, novamente, a conservação da energia mecânica, teremos:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 2gd\right]$$

ou seja:

$$h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 d$$