Versão preliminar
6 de junho de 2002

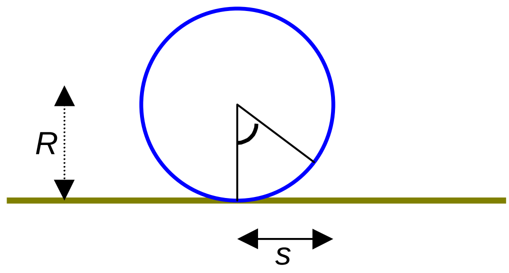
Notas de Aula de Física

12. Rolamento, torque e momento angular

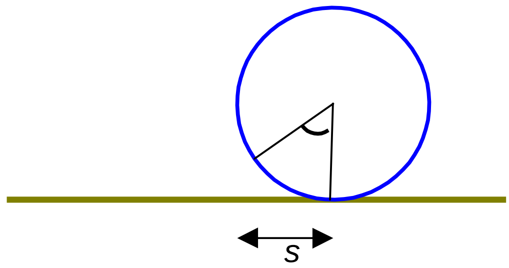
Rolamento

Considere um aro de raio R, rolando sem deslizar em uma superfície plana horizontal. Quando essa roda girar de um ângulo θ, o ponto de contato do aro com a superfície horizontal se deslocou uma distância s, tal que;

$$s = R\,\theta$$



O centro de massa do aro também deslocou-se da mesma distância. Portanto, a velocidade de deslocamento do centro de massa do aro tem a forma:

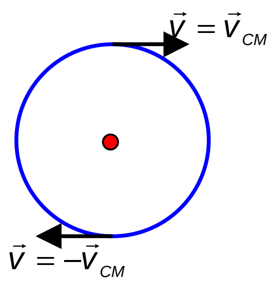


$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = R\,w$$

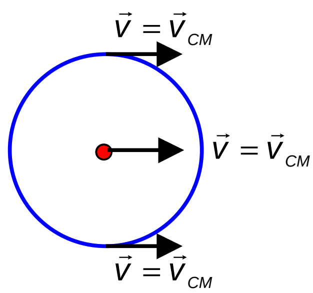
De maneira equivalente podemos encontrar a forma da aceleração do centro de massa do aro:

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{dw}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = R\,\alpha$$

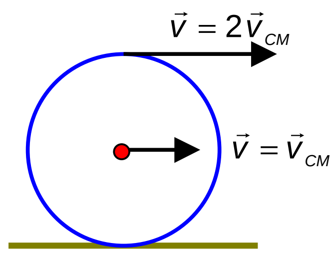
O rolamento descrito como uma combinação de rotação e translação



Movimento ***puramente rotacional*** *, todos os pontos da roda movem-se com a mesma velocidade angular.*



Movimento ***puramente translacional*** *, todos os pontos da roda movem-se para a direita com a mesma velocidade.*



O movimento de ***rolamento*** *da roda é uma combinação dos dois movimentos anteriormente descritos.*

O rolamento visto como uma rotação pura

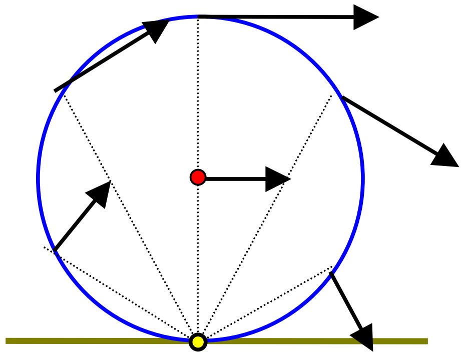
O rolamento pode ser entendido como uma rotação pura se observarmos que a cada instante o corpo está girando em torno de um eixo instantâneo, que passa pelo ponto de contato entre esse corpo e a superfície que o suporta. Esse eixo é perpendicular à direção do movimento.

A velocidade do centro da roda é

$$v_{CM} = w\, R$$

e a velocidade do topo da roda é

$$v_{Topo} = w\,(2R) = 2\, v_{CM}$$



Eixo instantâneo de rotação

A energia cinética

Um corpo que rola sem deslizar pode ser visto a cada instante como girando em torno de um eixo instantâneo que passa pelo ponto de contato desse corpo com a superfície que o suporta, e esse eixo é perpendicular à direção do movimento. do corpo. Desse modo, a sua energia cinética tem a forma:

$$K = \frac{1}{2} I w^2$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo mencionado. Observa-se esse movimento como consistindo apenas de rotação.

Mas se levarmos em conta o teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_{CM} + M\, R^2$$

a energia terá a forma:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Desse modo, observa-se esse movimento como consistindo de uma composição *rotação + translação .*

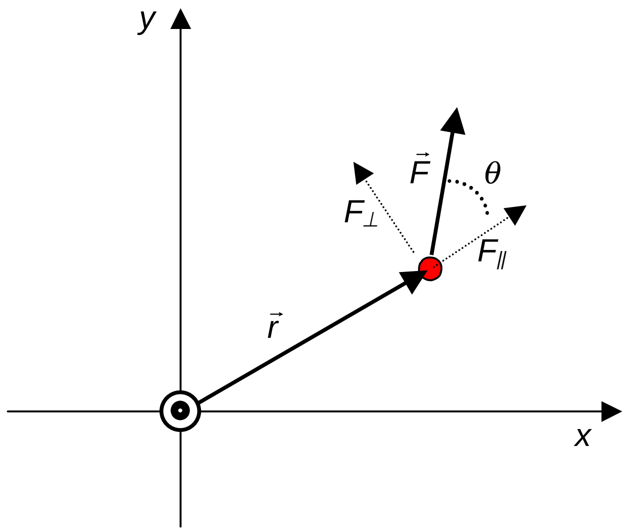
Torque

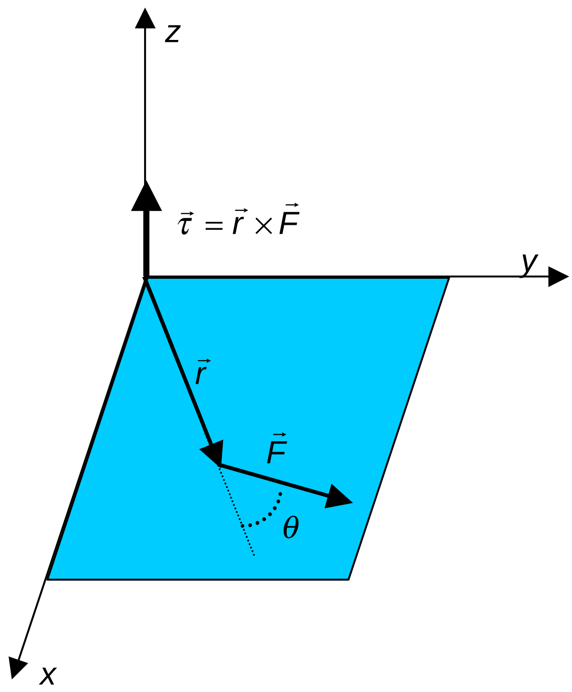
A figura abaixo mostra uma partícula localizada pelo vetor posição $\vec{r}$, sob a ação de uma força $\vec{F}$. O torque exercido por essa força sobre a partícula é definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

⊙ *Convenção para simbolizar um vetor saindo perpendicular à folha.*

⊗ *Convenção para simbolizar um vetor entrando perpendicular à folha.*

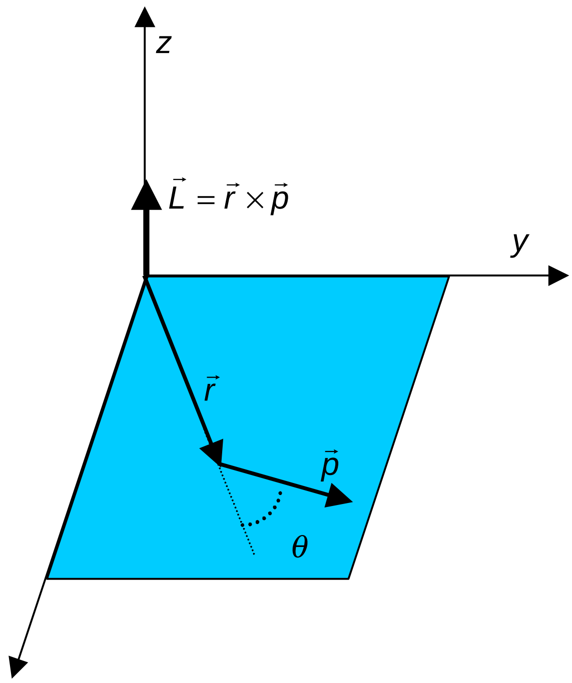




Momento angular

O momento angular de uma partícula de massa m localizada pelo vetor posição $\vec{r}$, que tem momento linear $\vec{p}$ é definido como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Existe uma conexão entre o momento angular de uma partícula e o torque associado à força resultante que atua sobre ela. Vamos considerar a variação do momento angular no tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Mas

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0 \\ \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = Força\ resul\tan te \end{cases}$$

logo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Rotação	**Equivalência**	*Translação*
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\rightarrow$	$\vec{p}$
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\rightarrow$	$\vec{F}$
$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\rightarrow$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Momento angular de um sistema de partículas

Quando estamos considerando um sistema de N partículas, o momento angular total é dado por:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

De modo equivalente à análise do caso de apenas uma partícula, vamos calcular a variação do momento angular total com o tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Mas

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{INT} + \vec{F}_i^{EXT}$$

ou seja

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{INT} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{EXT} = \vec{\tau}_i^{INT} + \vec{\tau}_i^{EXT}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{INT} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{EXT}$$

logo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{INT} + \vec{\tau}^{EXT}$$

Vamos mostrar que o torque interno é nulo. As forças internas surgem aos pares como interação entre os pares de partículas, ou seja:

$$\vec{F}_i^{INT} = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$$

Mas

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{INT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

ou seja:

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i \langle j} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right)$$

Mas usando-se a terceira Lei de Newton, temos que $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, logo

$$\vec{\tau}^{INT} = \sum_{i \langle j} \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{f}_{ij} \right]$$

onde $\left(\vec{r}_i - \vec{r}_i \right)$ é um vetor contido na reta que une as partículas i e j , e essa reta também contém a força $\vec{f}_{ij}$. Portanto o produto vetorial é nulo pois os dois vetores são paralelos, e finalmente podemos concluir que

$$\vec{\tau}^{INT} = 0$$

Desse modo, concluímos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{EXT}$$

e essa equação tem a sua equivalente no movimento de translação:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT}$$

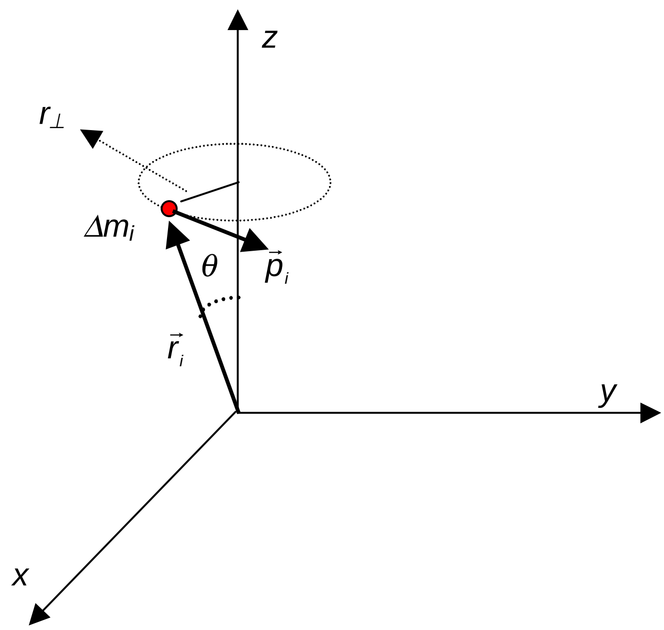
Momento angular de um corpo rígido

Para calcular o momento angular de um corpo rígido que está girando em torno de um eixo (neste caso eixo z) com velocidade angular ***w*** , vamos dividi-lo em pequenos volumes ΔV_i cada um com uma massa Δm_i , que tem momento linear $\vec{p}_i$ e estão localizados pelo vetor posição $\vec{r}_i$. O momento angular desta pequena massa é:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Observe-se que o ângulo entre os vetores $\vec{r}_i$ *e* $\vec{p}_i$ é 90^0 . Desse modo:

$$L_i = r_i\, p_i = r_i\, v_i\, \Delta m_i$$



Para calcular a componente z do momento angular, temos que:

$$L_{iz} = L_i\, sen\theta = (r_i\, sen\theta)\, v_i\, \Delta m_i = r_{i\perp}\, v_i\, \Delta m_i = r_{i\perp}\, (w\, r_{i\perp})\Delta m_i$$

ou seja:

$$L_{iz} = w\, \Delta m_i\, r^2_{i\perp}$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = w \sum_i \Delta m_i\, r^2_{i\perp}$$

Mas

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r^2_{i\perp} = \int r^2_{\perp} dm$$

onde $r_{i\perp}$ é a componente do vetor posição da massa Δm_i perpendicular ao eixo de rotação, ou seja é a distância da massa Δm_i ao eixo de rotação, e portanto temos a nossa definição original de momento de inércia. Desse modo:

$$L = I\, w$$

onde omitimos o índice z do momento angular pois iremos tratar apenas de situações onde o momento angular de um corpo rígido será paralelo ao eixo de rotação (analisaremos apenas situações onde o momento de inércia é uma grandeza escalar).

Estaremos interessados em situações onde

$$\vec{L} = I \vec{w}$$

e ainda:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

Conservação do momento angular

Quando consideramos um sistema de partículas, a variação do momento angular total é igual ao torque externo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,EXT}$$

Se esse sistema estiver isolado, ou seja se o torque externo for nulo, o momento angular total será uma constante.

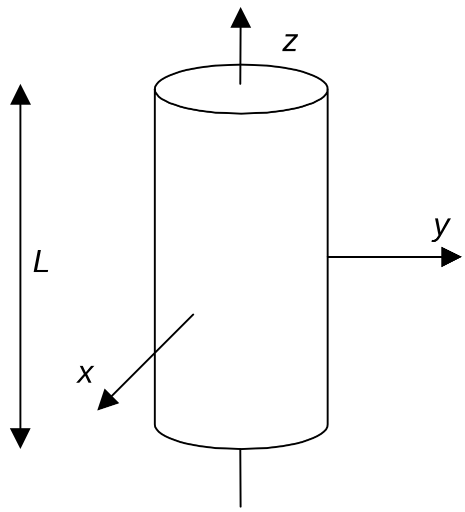
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = constante$$

Esse resultado é o equivalente da conservação do momento linear total, e tem um significado e importância similar.

Solução de alguns problemas

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
01	Um tubo de paredes finas rola pelo chão. Qual é a razão entre as suas energias cinéticas translacional e rotacional, em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento e que passa pelo seu centro de massa?

Inicialmente vamos calcular o momento de inércia do tubo mencionado, supondo que ele tenha raio R e comprimento L .



$$dm = \sigma\, dS = \sigma[(Rd\theta)L] = \sigma\, LRd\theta$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2(\sigma\, LRd\theta) = \sigma\, R^3 L \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{2\pi RL}$$

$$I = \left(\frac{M}{2\pi RL}\right) R^3 L(2\pi) \quad \therefore \quad I = MR^2$$

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{CM}^2}{\frac{1}{2}Iw^2} = \frac{M(wR)^2}{(MR^2)w^2} = 1$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
02	Um aro com um raio de 3m e uma massa de 140kg rola sobre um piso horizontal de modo que o seu centro de massa possui uma velocidade de 0,150m/s . Qual é o trabalho que deve ser feito sobre o aro para fazê-lo parar?

$$I_{CM} = M\,R^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$R = 3m$
$M = 140kg$
$v_{CM} = 0{,}15m/s$

Considerando que $v_{CM} = w\,R$, temos que:

$$K = \frac{1}{2}(MR^2)w^2 + \frac{1}{2}M(w\,R)^2 = Mv_{CM}^2 = 3{,}15J$$

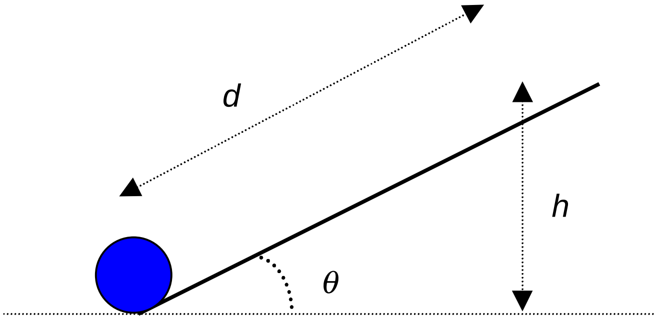
$$W = \Delta K = K_F - K_I = - K_I = - 3{,}15J$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

07 Uma esfera sólida de peso igual a $P = 35,58N$ sobe rolando um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é igual a $\theta = 30^0$. Na base do plano, o centro de massa da esfera tem uma velocidade linear de $v_0 = 4,88m/s$.

a) Qual é a energia cinética da esfera na base do plano inclinado?

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$



Como $v_{CM} = w\,R$

$$K = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) M v_{CM}^2$$

Para a esfera temos que $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$, logo a energia cinética terá a forma:

$$K = \frac{7}{10} M v_{CM}^2 = \frac{7}{10}\frac{P}{g} v_{CM}^2 = 60,52J$$

b) Qual é a distância que a esfera percorre ao subir o plano?

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{10} M v_{CM}^2 = Mgh \quad \therefore \quad h = \frac{7 v_{CM}^2}{10g} = 1,70m$$

$$h = d\,\mathrm{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h}{\mathrm{sen}\theta} = \frac{7 v_{CM}}{10g\,\mathrm{sen}\theta} = 3,4m$$

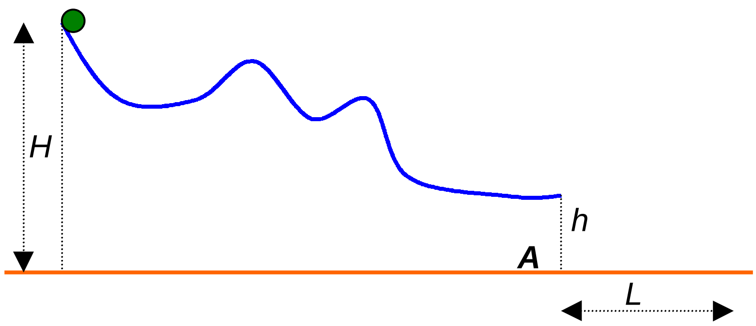
c) A resposta do *item b* depende do peso da esfera?

Como vimos na dedução anterior, a resposta não depende do peso.

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

11 Uma esfera homogênea, inicialmente em repouso, rola sem deslizar, partindo da extremidade superior do trilho mostrado a seguir, saindo pela extremidade da direita. Se $H = 60m$, $h = 20m$ e o extremo direito do trilho é horizontal, determine a distância L horizontal do ponto A até o ponto que a esfera toca o chão.

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$



$$K = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) M v_{CM}^2$$

$$K = \frac{7}{10} M v_{CM}^2$$

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad Mg(H-h) = \frac{7}{10} M v_{CM}^2 \quad \therefore \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{10g(H-h)}{7}}$$

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ L = v_{CM} t \quad \Rightarrow \quad L = v_{CM}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} \end{cases}$$

ou seja:

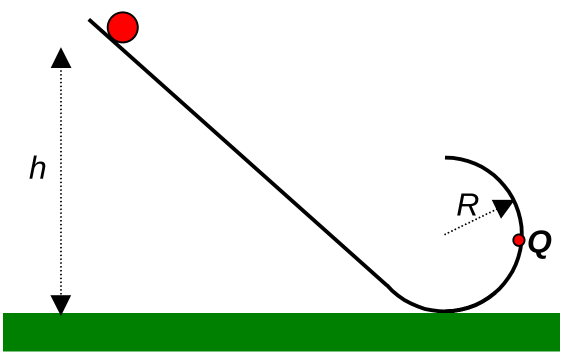
$$L = \sqrt{\frac{20h(H-h)}{7}} = 47{,}80m$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
13	Uma bolinha de gude sólida de massa m e raio r rola sem deslizar sobre um trilho mostrado a seguir, tendo partido do repouso em algum ponto do trecho retilíneo do trilho.

a) Qual é a altura mínima h, medida à partir da base do trilho, de onde devemos soltar a bolinha para que ela não perca o contato com o trilho no ponto mais alto da curva? O raio da curva é R e considere que $R >> r$.

A condição para que a bolinha não perca contato é que a normal seja nula na parte mais alta, ou seja que o peso seja a única força radial, e desse modo teremos:

$$P = mg = m\frac{v_{CM}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^2 = Rg$$



Mas como o sistema é conservativo, a energia mecânica será conservada:

$$E_I = E_F \quad \Rightarrow \quad U_I = U_F + K_F$$

ou seja

$$mgH = mg(2R) + \frac{7}{10} m v_{CM}^2 = mg(2R) + \frac{7}{10} m(Rg) = \frac{27}{10} mgR \quad \therefore \quad H = 2{,}7R$$

b) Se a bolinha for solta de uma altura igual a $6R$ acima da base do trilho, qual será a componente horizontal da força que atua sobre ela no ponto Q?

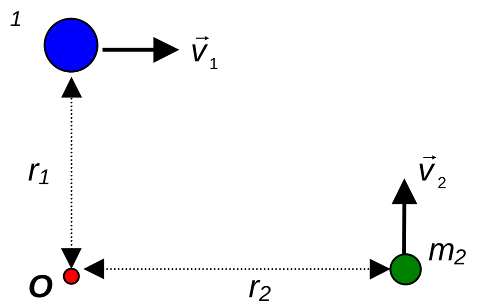
Usando a conservação da energia mecânica entre os dois pontos, temos que:

$$E_0 = E_Q \quad \Rightarrow \quad mg(6R) = mgR + \frac{7}{10} m v_Q^2 \quad \therefore \quad v_Q^2 = \frac{50}{7} Rg$$

A força horizontal no ponto Q é a própria força radial nesse ponto, logo:

$$F_R = m\frac{v_Q^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{50}{7}Rg\right) \quad \therefore \quad F_R = \frac{50}{7}mg$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
27	Dois objetos estão se movendo como mostra a figura a seguir. Qual é o seu momento angular em torno do ponto ***O*** ?



$m_1 = 6{,}5kg$ $\quad$ $m_2 = 3{,}1kg$
$v_1 = 2{,}2m/s$ $\quad$ $v_2 = 3{,}6m/s$
$r_1 = 1{,}5m$ $\quad$ $r_2 = 2{,}8m$

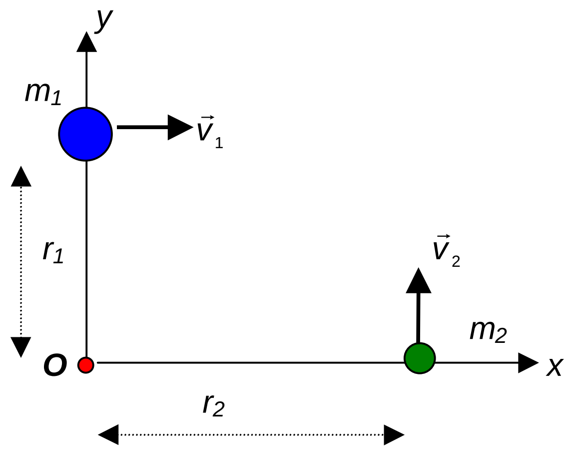
$$\begin{cases} \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = \hat{i}m_1v_1 \\ \vec{r}_1 = \hat{j}\,r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = \hat{j}\,m_2v_2 \\ \vec{r}_2 = \hat{i}\,r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = (\hat{j}\times\hat{i})m_1\,r_1\,v_1 = -\hat{k}\,m_1\,r_1\,v_1 \\ \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (\hat{i}\times\hat{j})m_2\,r_2\,v_2 = +\hat{k}\,m_2\,r_2\,v_2 \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

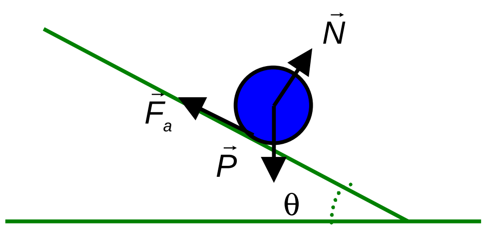
$$\vec{L} = \hat{k}\,(m_2v_2r_2 - m_1v_1r_1)$$

$$\vec{L} = \hat{k}\;9{,}798\,kg.m^2/s$$



Capítulo 12 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***	
32	Mostre que um cilindro deslizará sobre um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é θ, quando o coeficiente de atrito estático entre o plano e o cilindro for menor que *(tanθ)/3* .

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\,\mathrm{sen}\theta - F_a = ma \end{cases}$$



Quando estamos interessado em calcular

o torque em relação a um eixo que coincide com a reta de contato entre o cilindro e o plano, devamos notar que apenas a força de atrito produz um torque em relação a esse eixo. À medida que aumenta a inclinação vai aumentando a força de atrito estático necessária para evitar o deslizamento. Ni limite, antes do deslizamento, temos que $F_a = (F_a)_M = \mu_E N$ .A maior aceleração que o cilindro poderá ter sem deslizar é definida pela condição:

$$I_{CM}\,\alpha \;<\; F_a\,R$$

A condição de deslizamento é:

$$F_a\,R \;<\; I_{CM}\,\alpha$$

Usando a segundo lei de Newton poderemos calcular a aceleração angular α :

$$m\,g\,sen\theta - \mu_E\,m\,g\,cos\theta = ma = m\,\alpha\,R$$

$$\alpha = \frac{g}{R}\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_E\cos\theta\right)$$

Logo:

$$\left(\mu_E mg\cos\theta\right)R < I_{CM}\left[\frac{g}{R}\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_E\cos\theta\right)\right]$$

$$\mu_E\,cos\theta\,(\,mR^2 + I_{CM}\,) \;<\; I_{CM}\,sen\theta$$

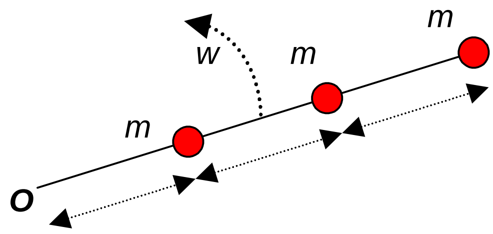
$$\mu_E < \left(\frac{I_{CM}}{mR^2 + I_{CM}}\right)\tan\theta$$

Considerando que o momento de inércia do cilindro é $mR^2/2$, teremos:

$$\mu_E < \frac{1}{3}\tan\theta$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
44	Três partículas, cada uma de massa m , são presas umas às outras e a um eixo de rotação por três cordões sem massa, cada um de comprimento L , como mostra a figura a seguir. O conjunto gira em torno do eixo de rotação em ***O*** com velocidade angular w , de tal forma que as partículas permanecem em linha reta.

Quais são, em termos de m , L e w e relativamente ao ponto ***O***



a) O momento de Inércia do conjunto?

$$I = m\,L^2 + m\,(2L)^2 + m\,(3L)^2 = 14\,m\,L^2$$

b) O momento angular da partícula do meio?

Se definirmos o *eixo z* como sendo perpendicular à folha de papel e saindo dela, o momento angular das três partículas estarão no sentido positivo do *eixo z* .

$$L_2 = I_2\, w = 4\, m\, L^2\, w$$

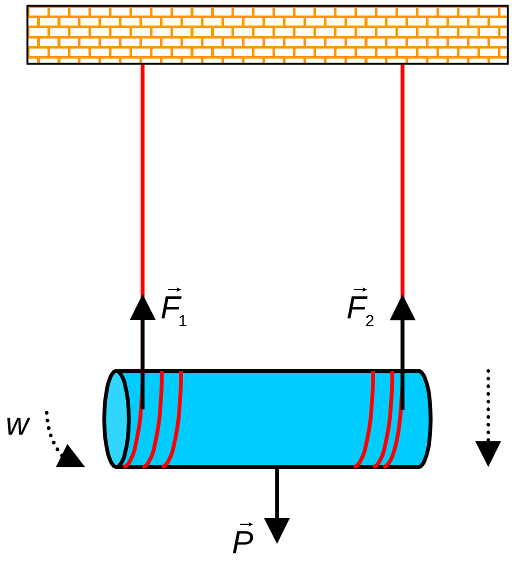
c) O momento angular total das três partículas?

$$L = I\, w = 14\, m\, L^2\, w$$

Capítulo 12 - Halliday e Resnick - ***Edição antiga***	
45	Um cilindro de comprimento L e raio r tem peso P. Dois cordões são enrolados em volta do cilindro, cada qual próximo da extremidade, e suas pontas presas a ganchos fixos no teto. O cilindro é mantido horizontalmente com os dois cordões exatamente na vertical e, em seguida, é abandonado.

a) Determine a aceleração linear do cilindro durante a queda.

$$F_1 = F_2 = F$$



Como a força peso não produz torque em relação ao eixo de rotação, temos que:

$$\tau = 2Fr = I\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I\alpha}{2r}$$

Mas

$$a = \alpha\, r$$

logo

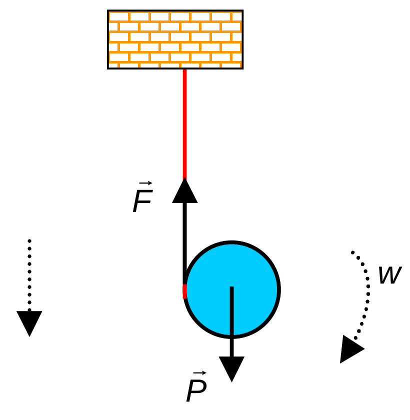
$$F = \frac{Ia}{2r^2}$$

Considerando as forças que atuam no cilindro, da segunda lei de Newton temos que:

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\vec{a}$$

ou seja:

$$P - 2\, F = Ma$$



$$Mg - 2\left(\frac{Ia}{2r^2}\right) = Ma$$

$$g = a\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)$$

$$a = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{Mr^2}}$$

Considerando que o momento de inércia do cilindro tem a forma $I = \dfrac{Mr^2}{2}$, encontramos que

$$a = \frac{2g}{3}$$

b) Determine a tensão em cada cordão enquanto eles estão se desenrolando.

Mostramos anteriormente que:

$$F = \frac{Ia}{2r^2}$$

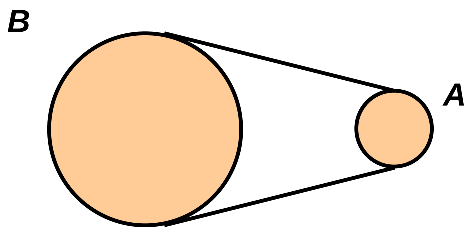
logo

$$F = \frac{Mr^2}{2}\frac{1}{2r^2}\frac{2g}{3} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Mg}{6}$$

Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
46	As rodas A e B da figura a seguir estão conectadas por uma correia que não desliza. O raio da roda B é três vezes maior que o raio da correia A .

a) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem o mesmo momento angular?

$$r_B = 3\, r_A$$



Como as duas rodas estão conectadas, as velocidades das suas bordas serão iguais, ou seja:

$$v_A = v_B$$

ou seja:

$$w_A r_A = w_B r_B \quad \Rightarrow \quad \frac{w_A}{w_B} = \frac{r_B}{r_A} = 3 \quad \therefore \quad w_A = 3 w_B$$

$$L_A = I_A\, w_A$$

$$L_B = I_B\, w_B$$

Como $L_A = L_B$

$$I_A w_A = I_B w_B \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{w_B}{w_A} \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{3}$$

b) Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B se ambas tivessem a mesma energia cinética de rotação?

Como $K_A = K_B$

$$\frac{1}{2} I_A w_A^2 = \frac{1}{2} I_B w_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{w_B}{w_A}\right)^2 \quad \therefore \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{1}{9}$$

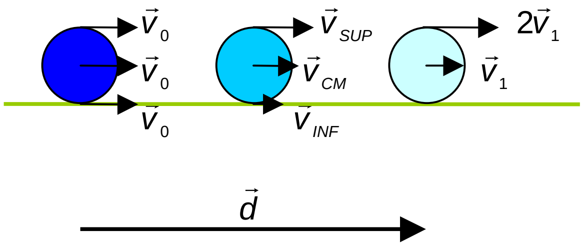
Capítulo 12 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

49 Um jogador de boliche principiante joga uma bola de massa M e raio $R = 11cm$ na pista, com velocidade inicial $v_0 = 8,5m/s$. A bola é arremessada de tal maneira que desliza uma certa distância antes de começar a rolar. Ela não está girando quando atinge a pista sendo o seu movimento puramente translacional. O coeficiente de atrito cinético entre ela e a pista é $0,21$.

a) Por quanto tempo a bola desliza?

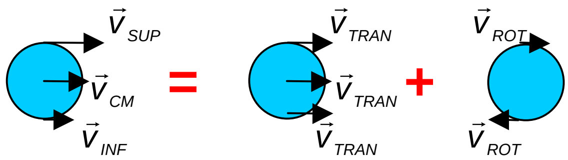
M $\qquad$ $v_0 = 8,5m/s$

$R = 11cm = 0,11m$ $\qquad$ $\mu_C = 0,21$



Podemos visualizar o movimento da bola como uma composição de movimentos: *rotação* + *translação* , e desse modo decompor as velocidades:

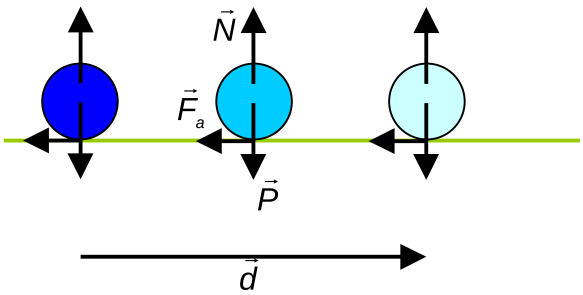
$$\vec{v} = \vec{v}_{TRAN} + \vec{v}_{ROT}$$



Cada parte da roda vai ter uma composição de velocidades peculiar, as partes superior e inferior são os extremos de diversidade:

$$v_S = v_{TRAN} + v_{ROT}$$

$$v_I = v_{TRAN} - v_{ROT}$$



Quando a bola atinge a pista a velocidade de rotação é nula, e ela só tem velocidade de translação v_0 . À medida que a bola começa deslizar, ela também inicia a rotação, adquirindo velocidade angular até alcançar o valor w_1 quando não mais desliza, tendo um movimento de rolamento sem deslizamento.

Os dois tipos de movimento (*rotação* + *translação*) obedecem às equações:

$$\begin{cases} (v_{TRAN})_0 = v_0 \\ \\ (v_{TRAN})_1 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_0 - a_{TRAN}t \\ \\ v_1^2 = v_0^2 - 2a_{TRAN}d \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_{ROT})_0 = 0 \\ \\ (v_{ROT})_1 = w_1R = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad v_1 = w_1R = R\alpha t \quad \therefore \quad v_1 = a_{ROT}t \\ \\ w_1^2 = w_0^2 - 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2(R\alpha)(R\theta) \quad \therefore \quad v_1^2 = 2a_{ROT}L \end{cases}$$

Ao contrário do rolamento com deslizamento, neste caso as velocidades de translação e rotação não estão conectadas diretamente. Isso só vai acontecer quando cessar o deslizamento, e nesse ponto $v_1 = w_1 R$.

Para o movimento de translação, temos a segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{N} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} N - P = 0 \\ \\ F_a = Ma_{TRAN} \end{Bmatrix}$$

Mas

$$F_a = \mu_C N = \mu_C M g \quad \therefore \quad a_{TRAN} = \mu_C g$$

Para o movimento de rotação temos:

$$\tau = F_a R = I_{CM}\alpha \quad \Rightarrow \quad F_a = \mu_C Mg = \frac{I_{CM}}{R}\alpha = \left(\frac{I_{CM}}{R^2}\right)(\alpha R) = \left(\frac{I_{CM}}{R^2}\right)a_{ROT}$$

$$a_{ROT} = \mu_C g\left(\frac{R^2}{I_{CM}}\right)$$

Considerando o que já foi mostrado, temos que:

$$\begin{Bmatrix} v_1 = R\alpha t = a_{ROT}t \\ \\ v_1 = v_0 - a_{TRAN}t \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_1}{a_{ROT}} = \frac{v_0 - v_1}{a_{TRAN}} \quad \therefore \quad v_1 = \left(\frac{a_{ROT}}{a_{TRAN} + a_{ROT}}\right)v_0$$

ou seja:

$$t = \frac{v_0}{a_{TRAN} + a_{ROT}} = \frac{v_0}{\mu_C g\left(1 + \dfrac{MR^2}{I_{CM}}\right)}$$

Considerando que para a esfera $I_{CM} = \dfrac{2}{5}MR^2$ encontramos que:

$$t = \frac{2v_0}{7\mu_C g} = 1{,}18s$$

b) A que velocidade está se movendo quando começa a rolar?

$$v_1 = R\alpha t = a_{ROT}t = \left[\mu_C g\left(\frac{MR^2}{I_{CM}}\right)\right]t = \frac{5}{2}\mu_C g = 6{,}07m/s$$

c) Qual a distância que ela desliza na pista?

$$v_1^2 = v_0^2 - 2a_{TRAN}d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_{TRAN}} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu_C g} = 8{,}60m$$

d) Quantas revoluções fez antes de começar a rolar?

$$w_1^2 = w_0^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad (w_1 R)^2 = 2(\alpha R)(R\theta) \quad \therefore \quad v_1^2 = 2a_{ROT}L$$

$$L = \frac{v_1^2}{2a_{ROT}} = \frac{1}{2}a_{ROT}t^2 = N(2\pi R) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{2\pi R}\frac{a_{ROT}t^2}{2} = \frac{1}{4\pi R}\mu_C g\left(\frac{MR^2}{I_{CM}}\right)t^2$$

$$N = \frac{5\mu_C g t^2}{8\pi R} = 5{,}18rev$$