

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
CENTRO DE PESQUISA EM GEOFÍSICA E GEOLOGIA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

---

---

# MÉTODOS ELÉTRICOS

Notas de Aula

---

por

Hédison Kiuity Sato

---

Salvador, abril de 2002

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos Fundamentais</b>	<b>1</b>
1.1	Fundamentos . . . . .	1
1.1.1	Equações de Maxwell . . . . .	1
1.1.2	Relações constitutivas . . . . .	1
1.1.3	Conservação da carga elétrica . . . . .	2
1.1.4	Condições estacionárias . . . . .	3
1.1.5	Condições de contorno . . . . .	3
1.2	Eletrodo pontual de corrente no espaço condutor . . . . .	4
1.3	Problemas . . . . .	5
1.4	Referências . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Método das Imagens</b>	<b>7</b>
2.1	Fundamentos do método das imagens . . . . .	7
2.2	Aplicação ao modelo de duas interfaces paralelas . . . . .	9
2.2.1	Fonte no meio 1 e potencial no meio 1 . . . . .	9
2.2.2	Fonte no meio 1 e potencial no meio 0 . . . . .	12
2.2.3	Fonte no meio 1 e potencial no meio 2 . . . . .	13
2.2.4	Fonte no meio 0 e potencial no meio 0 . . . . .	13
2.2.5	Fonte no meio 0 e potencial no meio 1 . . . . .	14
2.2.6	Fonte no meio 0 e potencial no meio 2 . . . . .	14
2.2.7	Fonte no meio 2 e potencial no meio 2 . . . . .	15
2.2.8	Fonte no meio 2 e potencial no meio 1 . . . . .	15
2.2.9	Fonte no meio 2 e potencial no meio 0 . . . . .	16
2.3	Problemas . . . . .	16
<b>3</b>	<b>N Interfaces Paralelas</b>	<b>17</b>
3.1	N interfaces paralelas . . . . .	17
3.2	Solução da equação de Laplace . . . . .	17
3.3	Condições de contorno . . . . .	20
3.3.1	Condições no infinito . . . . .	20
3.3.2	Condições de contorno nas interfaces . . . . .	20
3.3.3	Condições relativas à fonte de corrente . . . . .	21
3.4	Solução do sistema de equações . . . . .	22
3.4.1	Recorrência a partir da interface 0 . . . . .	23
3.4.2	Recorrência a partir da interface $n - 1$ . . . . .	26
3.5	Potenciais elétricos . . . . .	30
3.5.1	Potenciais elétricos nas camadas 0 a m . . . . .	30
3.5.2	Potenciais elétricos nas camadas m a n . . . . .	31

3.6	Problemas . . . . .	31
3.7	Referências . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Eletrorresistividade</b>	<b>33</b>
4.1	Eletrorresistividade . . . . .	33
4.1.1	Fonte na superfície de um semi-espaço condutor . . . . .	33
4.1.2	Resistividade aparente . . . . .	33
4.1.3	Arranjo de eletrodos . . . . .	34
4.1.4	Modelo geoeétrico de camadas horizontais . . . . .	36
4.1.5	Curvas de resistividade aparente para camadas horizontais . . . . .	38
4.1.6	Interpretação por coincidências parciais . . . . .	41
4.2	Problemas . . . . .	51
4.3	Referências . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Métodos Numéricos</b>	<b>53</b>
5.1	Integração com filtragem digital . . . . .	53
5.1.1	Série de Fourier . . . . .	53
5.2	Diferenças finitas . . . . .	56
5.2.1	Modelagem 3-D . . . . .	56
5.3	Referências . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Polarização Elétrica Induzida</b>	<b>65</b>
6.1	Histórico . . . . .	65
6.2	Fenômeno Macroscópico . . . . .	65
6.3	Fenômeno Microscópico . . . . .	65
6.4	Domínio da Freqüência . . . . .	65
6.5	Equipamentos . . . . .	65
6.6	Formas de Representação . . . . .	65
6.7	Modelagem . . . . .	65
6.8	Referências . . . . .	65
<b>A</b>	<b>Formulação</b>	<b>67</b>

# Lista de Figuras

1.1	Continuidade do potencial elétrico . . . . .	4
1.2	Continuidade da densidade de corrente elétrica normal . . . . .	4
2.1	Fonte luminosa ou fonte de corrente elétrica e dois semi-espacos . . . . .	7
2.2	Modelo de três camadas paralelas . . . . .	9
2.3	Fonte de corrente $I$ na camada intermediária do modelo de três camadas horizontais . . . . .	10
2.4	Dois primeiros raios de cada família de raios indo da fonte de corrente $I$ (no meio ) ao observador em $P$ (no meio 1) . . . . .	10
2.5	Imagens da fonte de corrente na família A . . . . .	11
2.6	Dois primeiros raios de cada família de raios indo da fonte de corrente $I$ (no meio 1) ao observador em $P$ (no meio 0) . . . . .	12
2.7	Dois primeiros raios da família de raios indo da fonte de corrente $I$ (no meio 0) ao observador em $P$ (no meio 0), com sucessivas reflexões . . . . .	13
2.8	Dois primeiros raios dos dois grupos de raios indo da fonte de corrente $I$ (no meio 0) ao observador em $P$ (no meio 1), com sucessivas reflexões . . . . .	14
2.9	Dois primeiros raios do grupo de raios indo da fonte de corrente $I$ (no meio 0) ao observador em $P$ (no meio 2), com sucessivas reflexões . . . . .	15
3.1	Modelo de $n$ -camadas horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada $m$ . . . . .	18
3.2	Funções de Bessel $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ . . . . .	19
3.3	Superfície cilíndrica envolvendo a fonte de corrente . . . . .	21
4.1	Arranjos de eletrodos. . . . .	35
4.2	Resistividades aparentes Wenner e Schlumberger em função do espaçamento $a$ , para o caso de duas camadas horizontais com $\rho_1 = 1$ , $h_1 = 1$ , e diversos valores de $\rho_2$ . . . . .	38
4.3	Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo H . . . . .	39
4.4	Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo K . . . . .	40
4.5	Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo A . . . . .	40
4.6	Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo Q . . . . .	41
4.7	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo A relativo ao arranjo Wenner . . . . .	43
4.8	Coleção de curvas auxiliares: (a) tipo A, (b) tipo H, (c) tipo Q, (d) tipo K . . . . .	44

4.9	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo H relativo ao arranjo Wenner . . . . .	45
4.10	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo K relativo ao arranjo Wenner . . . . .	46
4.11	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo Q relativo ao arranjo Wenner . . . . .	47
4.12	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo QH relativo ao arranjo Wenner . . . . .	48
4.13	Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo QH relativo ao arranjo Wenner . . . . .	49
4.14	Quadro das etapas da interpretação da sondagem elétrica vertical, arranjo Wenner, ilustradas nas figuras 4.12 e 4.13 . . . . .	50
5.1	Onda quadrada . . . . .	54
5.2	Onda triangular . . . . .	54
5.3	Grade tridimensional com $L \times M \times N$ nós . . . . .	56
5.4	Elemento de volume $\Delta V_{i,j,k}$ associado a um nó $(i, j, k)$ interior a $R$ . . . . .	57
5.5	Elemento de volume associado ao nó na superfície inferior da região $R$ . . . . .	60
5.6	Volume associado ao nó da aresta $(i, M, N)$ . . . . .	62
5.7	Volume associado ao nó da quina $(L, M, 1)$ . . . . .	63

# Lista de Tabelas

2.1	Localização e coeficiente de reflexão global de cada imagem $i$ para o caso da fonte na camada intermediária do modelo de três camadas paralelas . . . . .	12
-----	--	----

# Capítulo 1

## Conceitos Fundamentais

### 1.1 Fundamentos

#### 1.1.1 Equações de Maxwell

Os fenômenos eletromagnéticos podem ser descritos com base em cinco campos vetoriais:  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{J}$ . Esses cinco campos vetoriais relacionam-se através das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{e} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Os nomes dos campos vetoriais eletromagnéticos e suas unidades são:

Campo	Descrição	Unidades
$\mathbf{B}$	indução magnética	weber/m <sup>2</sup>
$\mathbf{H}$	campo magnético	A/m
$\mathbf{D}$	vetor deslocamento elétrico	C/m <sup>2</sup>
$\mathbf{E}$	campo elétrico	V/m
$\mathbf{J}$	densidade de corrente elétrica	A/m <sup>2</sup>

As equações de Maxwell são equações desacopladas. O acoplamento é conseguido através de relações constitutivas, empíricas, que reduzem o número dos campos de cinco para dois. Essas relações devem ser escolhidas de forma adequada com as características dos materiais terrestres. Na maioria das aplicações, elas são escolhidas de forma que representam regiões isotrópicas, homogêneas, lineares, e independentes de temperatura, pressão e tempo.

#### 1.1.2 Relações constitutivas

Além das relações constitutivas mostradas a seguir, outras, exóticas (Keller, 1987), existem mas, normalmente, não são consideradas da geofísica de exploração.

## Relação $\mathbf{J}$ e $\mathbf{E}$ – Lei de Ohm

Nas condições físicas encontradas no ambiente superficial da Terra, as formas de cargas elétricas livres mais importantes são os elétrons nos minerais metálicos e os íons contidos nas soluções eletrolíticas inclusas nos poros, fissuras e fraturas das rochas. A ocorrência dessas cargas elétricas, livres para se deslocar sob a ação de campos elétricos, caracteriza um meio condutivo. Porém, se acompanhássemos a trajetória de uma dessas cargas, veríamos que ela seria bastante complicada. Além da força elétrica, a partícula carregada interage continuamente com o meio do qual ele faz parte mas, estatisticamente, podemos admitir uma velocidade média de deslocamento. Considerando uma taxa de deslocamento de cargas por unidade de área, podemos definir a densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}$  como uma função do campo elétrico  $\mathbf{E}$ . É comum então, adotarmos uma dependência linear, na forma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3)$$

A constante de proporcionalidade  $\sigma$  é denominada condutividade elétrica e, sua inversa,  $\rho = 1/\sigma$ , resistividade elétrica. Em meios isotrópicos,  $\sigma$  é uma grandeza escalar, enquanto que, em meios anisotrópicos, é um tensor.

## Relação $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$

Na maioria das situações, uma relação entre a indução magnética  $\mathbf{B}$  e o campo magnético  $\mathbf{H}$  é adotada na forma

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

onde o parâmetro  $\mu$  é constante, conhecido como permeabilidade magnética. Mesmo sem a presença de matéria, este parâmetro existe e vale  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

## Relação $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$

De forma similar, a relação entre o vetor deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  obedece, na maioria das situações, uma relação linear do tipo

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

onde o parâmetro  $\epsilon$  é constante, conhecido como permissividade elétrica. No vácuo, vale  $8,854 \times 10^{-12}$  F/m.

No ambiente terrestre, este parâmetro é fortemente controlado pela presença da água, podendo apresentar variações de quase duas ordens de grandeza, pois  $\epsilon_{\text{água}} \approx 80\epsilon_0$ .

### 1.1.3 Conservação da carga elétrica

Supondo que  $S$  é uma superfície fechada e considerando que não existem fontes de cargas elétricas no volume contido pela superfície, a corrente elétrica total que flui para fora desta superfície deve ser igual à taxa de decréscimo da carga elétrica  $Q$  contida no volume interior a essa superfície, ou seja,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t}; \quad Q = \int_{\vartheta} q d\vartheta. \quad (1.6)$$

onde  $\vartheta$  é o volume delimitado pela superfície  $S$ . Fica entendido que  $q$  representa apenas as cargas livres, ou seja,  $\mathbf{J}$  não inclui movimentos de cargas de polarização. A integral de

superfície pode ser reescrita com uso do teorema da divergência, e a derivada em relação ao tempo pode ser transferida para o integrando, desde que o volume  $\vartheta$  encontre-se fixo. Assim, temos que

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\vartheta} \nabla \cdot \mathbf{J} d\vartheta = - \int_{\vartheta} \frac{\partial q}{\partial t} d\vartheta, \quad (1.7)$$

que por ser válido para qualquer volume  $\vartheta$ , permite escrever a “equação da continuidade”,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad (1.8)$$

que é uma expressão do princípio da conservação da carga elétrica.

### 1.1.4 Condições estacionárias

Em condições estacionárias, as derivadas em relação ao tempo se anulam e as equações de Maxwell e da conservação da carga elétrica reduzem-se a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad e \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.10)$$

O fato do rotacional do campo elétrico ser nulo implica que ele é conservativo, ou seja, existe uma função escalar  $\mathcal{V}$ , potencial, tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\mathcal{V}. \quad (1.11)$$

Considerando a lei de Ohm para meios isotrópicos e lineares, podemos escrever que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = 0. \quad (1.12)$$

Combinando essas duas últimas equações, podemos escrever que o potencial elétrico  $\mathcal{V}$  deve satisfazer o seguinte:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \mathcal{V}) = 0, \quad \text{ou} \quad (1.13)$$

$$\nabla \sigma \cdot \nabla \mathcal{V} + \sigma \nabla^2 \mathcal{V} = 0. \quad (1.14)$$

Se a região em estudo apresentar a condutividade constante e diferente de zero, a equação a ser satisfeita pelo potencial elétrico é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \mathcal{V} = 0. \quad (1.15)$$

### 1.1.5 Condições de contorno

Nos casos estacionários, duas condições devem ser satisfeitas ao longo das interfaces separando dois meios condutivos: (i) o potencial elétrico deve ser contínuo através da interface, e (ii) o componente de  $\mathbf{J}$  (densidade de corrente elétrica) normal à interface, também deve ser contínua através da interface. Seguindo Grant e West (1965), a primeira condição estabelece que o trabalho para colocar uma carga em um dos lados da interface não deve diferir do trabalho para colocar a mesma carga no outro lado da interface, tratando-se de uma mera particularização do princípio da conservação de energia. A outra condição de contorno exige que a taxa de concentração da carga elétrica seja nula na interface (ou em qualquer outro

local), a menos que exista uma fonte de cargas. Isto nada mais é do que o princípio da conservação da carga elétrica.

Além disso, estas duas condições de contorno podem ser deduzidas através de um processo formal. Assim, com relação à primeira condição, vamos considerar a circulação do campo elétrico ao longo de um contorno fechado na vizinhança da interface, conforme mostra a figura 1.1. Assim, usando o teorema de Stokes, temos:

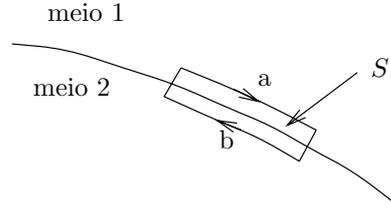


Figura 1.1: Continuidade do potencial elétrico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dS = 0. \quad (1.16)$$

Assim, no limite quando a largura do circuito fechado se anula,

$$\int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.17)$$

ou seja,  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ . Com relação à segunda condição, na medida em que não existem fontes de cargas elétricas, o fluxo da densidade de corrente através de uma superfície qualquer fechada  $S$  é nulo:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.18)$$

Considerando que a superfície  $S$  tem a forma de um disco achatado contendo uma parte da interface, conforme ilustra a figura 1.2, no limite em que a espessura do disco torna-se nula, teremos que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad (1.19)$$

ou seja, a continuidade do componente normal à interface do campo densidade de corrente elétrica.

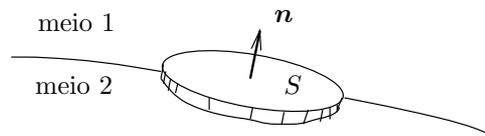


Figura 1.2: Continuidade da densidade de corrente elétrica normal

## 1.2 Eletrodo pontual de corrente no espaço condutor

A situação de um eletrodo pontual de corrente  $I$  no interior de um espaço condutor homogêneo e isotrópico, de condutividade  $\sigma$ , gera condições de simetria esférica. Portanto, é conseqüente pressupor que o potencial elétrico  $\mathcal{V}$  deva ser, apenas, uma função de  $R$ , distância relativa ao local em que se encontra o eletrodo pontual. Isto implica que o campo elétrico é radial,

como também é a densidade de corrente elétrica. Assim, a fim de solucionar o problema, vamos montar uma equação que preserve a corrente elétrica, considerando que o fluxo de corrente através de uma superfície fechada  $S$  com o eletrodo de corrente em seu interior, deve se igualar à intensidade da fonte de corrente  $I$  (eletrodo pontual). Isto pode ser escrito como

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I. \quad (1.20)$$

Considerando um sistema de coordenadas esféricas  $(R, \theta, \phi)$  cuja origem coincide com o eletrodo pontual, e admitindo-se que  $S$  é uma superfície esférica (de raio  $R$ ) cujo centro coincide com o eletrodo pontual, a integral de superfície é facilmente resolvida, permitindo escrever

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 j_R &= I && \text{ou} \\ j_R &= I/4\pi R^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Levando-se em conta a simetria, a lei de Ohm e a dependência entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathcal{V}$ , temos que

$$j_R = -\sigma \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial R}. \quad (1.22)$$

Assim, igualando essas duas últimas expressões, podemos integrar a equação resultante e, supondo que o potencial se anula ao distanciar-se da fonte, escrever

$$\mathcal{V} = \frac{(1/\sigma)I}{4\pi R} = \frac{\rho I}{4\pi R} \quad (1.23)$$

Se tivéssemos mais de um eletrodo de corrente, o potencial seria avaliado como a soma dos potenciais individuais de cada eletrodo pois a equação de Laplace é linear e a soma de duas ou mais soluções também é uma solução.

### 1.3 Problemas

1. Demonstre que a função  $f(R, \theta, \phi) = 1/R$ , onde  $(R, \theta, \phi)$  são coordenadas esféricas, satisfaz a equação de Laplace. A seguir, fazendo  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ , onde  $(r, \theta, z)$  são coordenadas cilíndricas, redemonstre em coordenadas cilíndricas. Finalmente, fazendo  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , redemonstre em coordenadas cartesianas.

2. Demonstre que, dadas duas fontes de corrente de igual intensidade colocadas nos pontos  $A$  e  $B$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}$  nos pontos  $P$  equidistantes de  $A$  e  $B$  é tal que o produto escalar de  $\mathbf{E}$  pelo vetor  $\overrightarrow{AB}$  é nulo. O que isso significa?

### 1.4 Referências

Grant, F. S. e West, G. F. (1965) Interpretation theory in applied geophysics, MacGraw-Hill.  
 Keller, G. V. (1987) Rock and mineral properties, In: M. N. Nabighian, ed., *Eletromagnetic methods in applied geophysics – Theory*, vol. 1, pp. 13–51, Society of Exploration Geophysicists.



# Capítulo 2

## Método das Imagens

### 2.1 Fundamentos do método das imagens

As soluções de problemas elétricos envolvendo situações em que volumes de diferentes resistividades encontram-se em contato, são complicadas e trabalhosas na sua maioria. De fato, as soluções analíticas são conhecidas para poucos casos, muitas das quais são obtidas resolvendo-se a equação de Laplace. Contudo, algumas situações podem ser resolvidas, também, com o uso do que se denomina “método das imagens”. Este nome foi escolhido dada a analogia que o fenômeno elétrico guarda com a ótica geométrica, considerando que, em ambos, a densidade de corrente elétrica e a intensidade luminosa diminuem com o quadrado da distância a uma fonte pontual.

Para o estabelecimento das regras básicas, vamos considerar as duas situações esquematizadas na figura 2.1. A primeira refere-se a uma fonte luminosa, um espelho semi-transparente

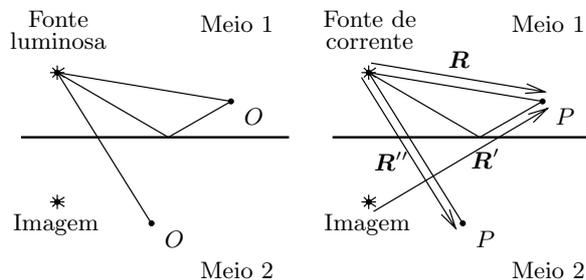


Figura 2.1: Fonte luminosa ou fonte de corrente elétrica e dois semi-espacos

e o observador ora no meio contendo a fonte, ora no outro meio. A segunda situação refere-se a uma fonte de corrente elétrica pontual colocada num semi-espaco resistivo, em contato com outro semi-espaco, também resistivo, e o ponto de observação do potencial ora num semi-espaco, ora no outro.

Quando o observador  $O$  encontra-se no meio 1, ele é iluminado com dois raios: um vindo direto da fonte e outro refletido no espelho semi-transparente, como se tivesse sido emanado de uma fonte, dita imagem, de intensidade diferente da fonte luminosa original. Se o observador  $O$  encontrar-se no meio 2, ele será iluminado apenas pelo raio oriundo da fonte com modificações de intensidade, pois atravessa o espelho semi-transparente.

Considerando, agora, a questão elétrica, o potencial  $\mathcal{V}_1$  no ponto  $P$  localizado no meio 1 será composto por duas parcelas. A primeira corresponde ao potencial elétrico devido a fonte, na forma  $\rho_1 I / 4\pi |\mathbf{R}|$ , onde  $\mathbf{R}$  é o vetor posição do ponto  $P$  em relação à fonte. A segunda

parcela corresponde ao potencial elétrico devido a imagem, resultante da reflexão, na forma  $\rho_1 I' / 4\pi |\mathbf{R}'|$ , onde  $\mathbf{R}'$  é o vetor posição do ponto  $P$  em relação à imagem, e  $I'$  representa a intensidade da imagem, diferente de  $I$  pois a reflexão não é perfeita. Assim, podemos escrever que o potencial será dado por:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\rho_1 I}{4\pi |\mathbf{R}|} + \frac{\rho_1 I'}{4\pi |\mathbf{R}'|} \quad (2.1)$$

Por outro lado, quando o ponto  $P$  situa-se no meio 2, o potencial elétrico  $\mathcal{V}_2$  é determinado por uma única contribuição, qual seja, a da “fonte”  $I''$  localizada na mesma posição da fonte verdadeira. Assim,  $\mathcal{V}_2$  pode ser expresso por

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\rho_2 I''}{4\pi |\mathbf{R}''|}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{R}''$  é o vetor posição do ponto  $P$  em relação à “fonte”  $I''$ .

Na montagem das duas últimas expressões, inserimos duas fontes desconhecidas:  $I'$  e  $I''$ , cujas definições ocorrerão ao se considerar as restrições de natureza física, quais sejam, a continuidade do potencial elétrico ao longo da interface, como também, a da densidade de corrente normal à interface.

A fim de garantir a continuidade do potencial elétrico, vamos igualar o potencial  $\mathcal{V}_1$  a  $\mathcal{V}_2$ , fazendo simultaneamente,  $R = R' = R''$ , lembrando que a imposição  $R = R'$  é satisfeita somente pelos pontos da interface. Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{\rho_1 I}{4\pi R} + \frac{\rho_1 I'}{4\pi R} = \frac{\rho_2 I''}{4\pi R} \quad \text{ou,} \quad (2.3)$$

$$\rho_1 (I + I') = \rho_2 I''. \quad (2.4)$$

Com relação a questão da continuidade da densidade de corrente elétrica normal à interface, podemos, inicialmente, escrever as expressões para essas grandezas considerando: (i) as definições dos potenciais no meio 1 e no meio 2, e (ii) que

$$\mathbf{j} = (1/\rho)\mathbf{E} = -(1/\rho)\nabla\mathcal{V}. \quad (2.5)$$

Assim, as densidades de corrente nos meios 1 e 2 são, respectivamente:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{I}{4\pi R^3}\mathbf{R} + \frac{I'}{4\pi (R')^3}\mathbf{R}' \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j}_2 = \frac{I''}{4\pi (R'')^3}\mathbf{R}''. \quad (2.7)$$

Definindo  $\hat{\mathbf{n}}$  como o vetor unitário normal à interface entre os meios 1 e 2, a imposição da condição da continuidade do componente normal ao longo da interface pode ser escrita como

$$\mathbf{j}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.8)$$

nos pontos da interface. Além disso, a igualdade  $R = R' = R''$  garante que se está examinando os pontos na interface. Sendo assim, também se tem que

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{R}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R}'' \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Essas quatro últimas equações permite-nos concluir que

$$I - I' = I''. \quad (2.9)$$

Considerando a equação (2.4), temos, então,

$$I' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} I, \text{ e} \quad (2.10)$$

$$I'' = \left[ 1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right] I. \quad (2.11)$$

O termo escrito sob a forma de fração pode ser interpretado como um coeficiente de reflexão  $k_{21}$ , definido como a fração refletida para o meio contendo a fonte, dado por

$$k_{21} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (2.12)$$

Por conseguinte,  $1 - k_{21}$  deve ser interpretado como a fração que é transmitida do meio 1 para o meio 2.

Para finalizar podemos reescrever as expressões para os potenciais nos meios 1 e 2 como:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\rho_1 I}{4\pi|\mathbf{R}|} + \frac{\rho_1 I k_{21}}{4\pi|\mathbf{R}'|} \quad (2.13)$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\rho_2 I (1 - k_{21})}{4\pi|\mathbf{R}''|}. \quad (2.14)$$

## 2.2 Aplicação ao modelo de duas interfaces paralelas

Nesta seção, fazendo uso da método das imagens, iremos deduzir a expressão para o potencial elétrico em qualquer ponto da situação esquematizada na figura 2.2, considerando que a

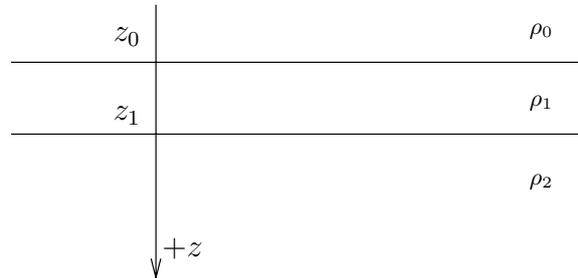


Figura 2.2: Modelo de três camadas paralelas

fonte de corrente encontra-se também, alternativamente, em qualquer um dos três meios ali representados. Assim, teremos nove expressões, de acordo com as localizações da fonte de corrente e do observador. Obviamente, algumas expressões guardarão grandes semelhanças quando consideramos as similaridades qualitativas do posicionamento da fonte e do observador. Por exemplo, o resultado obtido com a fonte no meio 0 e observador no meio 1 deverá ser semelhante àquele obtido com a fonte do meio 2 e observador no meio 1.

### 2.2.1 Fonte no meio 1 e potencial no meio 1

Iniciando as deduções, vamos considerar a situação mostrada na figura 2.3, onde encontra-se representada a fonte de corrente e o ponto  $P$  (observador), ambos no meio 1. A solução de tal problema através do método das imagens exige uma abordagem cuidadosa pois o potencial total tem, além da contribuição do potencial direto ( $\rho_1 I / 4\pi R$ ), um número infinito

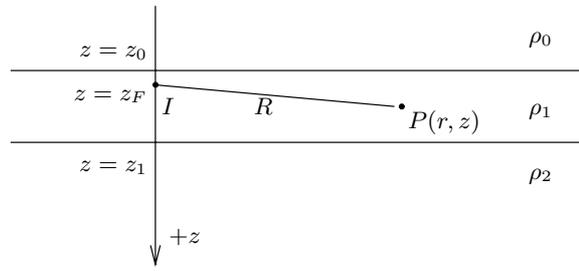


Figura 2.3: Fonte de corrente  $I$  na camada intermediária do modelo de três camadas horizontais

de contribuições devido às imagens associadas aos raios, em número irrestrito, que saem da fonte de corrente ( $I$ ), sofrem reflexões nas duas interfaces do modelo, e atingem o ponto de observação  $P$ . É importante destacar que essas mesmas considerações serão utilizadas para estabelecer os potenciais nas demais combinações de localização da fonte e do ponto de observação.

Considerando um raio saindo da fonte de corrente, refletindo, sucessivamente, ora na interface superior, ora na inferior da camada 1, a primeira reflexão pode se dar, alternativamente, na interface superior, ou na inferior. Por outro lado, o raio pode atingir o observador  $P$  vindo de uma reflexão ocorrida na interface superior ou inferior. Desta maneira, vamos considerar quatro famílias de raios, determinadas pela combinação das duas situações referentes à primeira reflexão, com as outras duas relativas à última reflexão. Assim, conforme encontram-se ilustrados na figura 2.4, vamos denominar como: (a) “Família A”, conjunto dos raios cujas

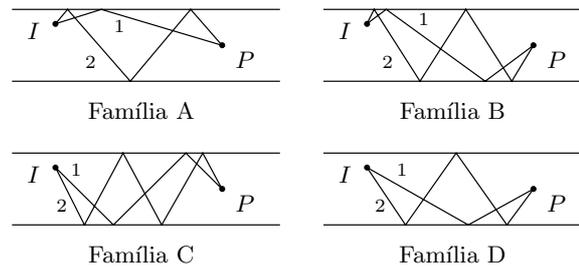


Figura 2.4: Dois primeiros raios de cada família de raios indo da fonte de corrente  $I$  (no meio 1) ao observador em  $P$  (no meio 1)

primeiras reflexões se dão na interface superior e as últimas, idem, (b) “Família B”, idem com primeiras reflexões na interface superior, porém, as últimas, na inferior, (c) “Família C”, primeiras reflexões na interface inferior e as últimas, na superior, e (d) “Família D”, primeiras reflexões na interface inferior e as últimas, também na inferior.

Antes de prosseguirmos com a determinação da localização ( $z$ ) e o coeficiente de reflexão global da imagem associada a cada raio, ambos necessários para se determinar a parcela de contribuição para o potencial elétrico, vamos considerar que, dado um eixo orientado qualquer, digamos  $x$ , de sorte que  $x_i$  representa a coordenada de um objeto,  $x_E$ , a coordenada de um espelho, e  $x_{i+1}$ , a coordenada aparente da imagem refletida do objeto no espelho, a condição  $x_{i+1} - x_E = x_E - x_i$  deve ser obedecida, ou seja, temos a seguinte recorrência:

$$x_{i+1} = 2x_E - x_i. \quad (2.15)$$

Retomando o conjunto de raios representados pela família A, a figura 2.5 mostra as três primeiras imagens da fonte de corrente. Usando a expressão (2.15), a coordenada  $Z_1$ , da

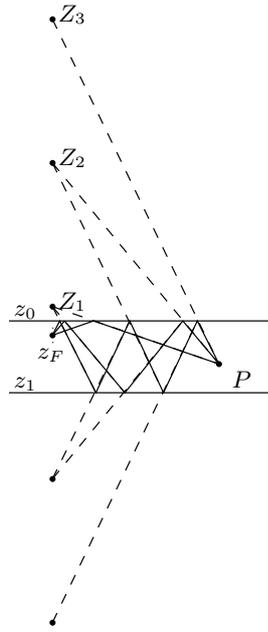


Figura 2.5: Imagens da fonte de corrente na família A

primeira imagem, pode ser escrita como

$$Z_1 = 2z_0 - z_F. \quad (2.16)$$

Para se obter a expressão para  $Z_2$ , devemos obter a imagem de  $Z_1$  em  $z_1$  e, em seguida, esta imagem refletida em  $z_0$ , ou seja, usando recursivamente a expressão (2.15) temos

$$Z_2 = 2z_0 - (2z_1 - Z_1) = 4z_0 - 2z_1 - z_F. \quad (2.17)$$

Repetindo esse processo para a coordenada  $Z_3$ , podemos escrever:

$$Z_3 = 6z_0 - 4z_1 - z_F, \quad (2.18)$$

e, generalizando,

$$Z_i = 2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F, \quad (2.19)$$

onde  $i = 1, 2, \dots$ . Para cada imagem  $i$  da família A, temos um coeficiente de reflexão global constituído pelo produto dos coeficientes de reflexão associados a cada reflexão. Assim, considerando

$$k_{01} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1}, \quad (2.20)$$

$$k_{21} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad (2.21)$$

respectivamente, os coeficientes de reflexão nas interfaces superior e inferior, o coeficiente de reflexão globalizado vale  $k_{01}$  para o primeiro raio,  $k_{01}^2 k_{21}$  para o segundo e assim, sucessivamente, de sorte que para o  $i$ -ésima imagem, ele valerá  $k_{01}^i k_{21}^{i-1}$ .

Aplicando-se essa metodologia às outras três famílias, podemos construir um quadro com a profundidade  $z$  e o coeficiente de reflexão global de cada imagem  $i$ , conforme mostra a tabela 2.1.

Família	Localização $Z_i$	Coefficiente de reflexão global
A	$2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F$	$k_{01}^i k_{21}^{i-1}$
B	$2i(z_1 - z_0) + z_F$	$k_{01}^i k_{21}^i$
C	$2i(z_0 - z_1) + z_F$	$k_{01}^i k_{21}^i$
D	$2(i-1)(z_1 - z_0) + 2z_1 - z_F$	$k_{01}^{i-1} k_{21}^i$

$i = 1, 2, 3, \dots$

Tabela 2.1: Localização e coeficiente de reflexão global de cada imagem  $i$  para o caso da fonte na camada intermediária do modelo de três camadas paralelas

Face a esses resultados, podemos escrever que o potencial elétrico em  $P$  é dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_1 I}{4\pi} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^{i-1}}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F))^2}} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_1 - z_0) + z_F))^2}} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_0 - z_1) + z_F))^2}} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^{i-1} k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_1 - z_0) + 2z_1 - z_F))^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

onde as cinco parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, aos potenciais de cada raio da família A, da família B, da família C, e da família D.

## 2.2.2 Fonte no meio 1 e potencial no meio 0

Na medida em que a fonte encontra-se no meio 1 e o ponto de observação no meio 0, todos os raios que contribuem para o potencial devem ser transmitidos e, portanto, a expressão de cada contribuição deve conter o coeficiente de transmissão  $(1 - k_{01})$ . Além da contribuição do tipo direto, sem reflexões, o potencial no ponto  $P$  é formado por infinitas outras contribuições refletidas. A figura 2.6 mostra os dois primeiros raios dos dois únicos possíveis grupos de raios de saem do fonte, refletem, passam pela interface e atingem o ponto  $P$ . Podemos observar

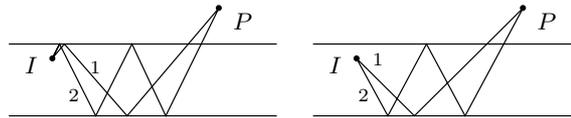


Figura 2.6: Dois primeiros raios de cada família de raios indo da fonte de corrente  $I$  (no meio 1) ao observador em  $P$  (no meio 0)

que esses dois grupos são formados por raios análogos àqueles que compõem as famílias B e D, definidas anteriormente.

Desta forma, podemos aproveitar os resultados contidos na tabela 2.1 e escrever que o potencial no ponto  $P$ , no meio 0 ( $z \leq z_0$ ), é dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_0 I (1 - k_{01})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_1 - z_0) + z_F))^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^{i-1} k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_1 - z_0) + 2z_1 - z_F))^2}} \right\} \quad (2.23)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, aos potenciais de cada raio dos grupos similares às famílias B e D.

### 2.2.3 Fonte no meio 1 e potencial no meio 2

Seguindo os argumentos utilizados durante a elaboração do potencial no meio 0 com a fonte no meio 1, temos que: (i) o coeficiente de transmissão a ser considerado é  $(1 - k_{21})$ , e (ii) os raios contendo pelo menos uma reflexão são análogos aos que formam as famílias A e C. Desta forma a expressão para o potencial para os pontos  $P$  no meio 2 ( $z \geq z_1$ ), é dada por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_2 I (1 - k_{21})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^{i-1}}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F))^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_0 - z_1) + z_F))^2}} \right\} \quad (2.24)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, aos potenciais de cada raio dos grupos similares às famílias A e C.

### 2.2.4 Fonte no meio 0 e potencial no meio 0

Nessa situação, temos: (i) uma contribuição direta e uma refletida na interface  $z = z_0$  com coeficiente de reflexão  $k_{10}$ , e (ii) um grupo de raios transmitidos do meio 0 para o meio 1, refletidos sucessivamente na interface  $z = z_1$  e na  $z = z_0$ , e retornados, de forma transmitida, para o meio 0, ilustrado na figura 2.7. Pode-se notar que esse grupo é similar à família D já

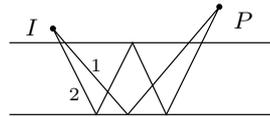


Figura 2.7: Dois primeiros raios da família de raios indo da fonte de corrente  $I$  (no meio 0) ao observador em  $P$  (no meio 0), com sucessivas reflexões

definida. Assim, neste caso, o coeficiente global de cada imagem é o produto do coeficiente de reflexão global da tabela 2.1, multiplicado pelos coeficientes de transmissão  $(1 - k_{10})$  e

$(1 - k_{01})$ , sendo, o primeiro deles, referente à transmissão inicial que ocorre do meio 0 para o meio 1, e o segundo, referente à transmissão de retorno do meio 1 para o meio 0.

Lembrando que  $k_{10} = -k_{01}$ , podemos escrever que o potencial elétrico em  $z \leq z_0$ , com a fonte localizada em  $z_F \leq z_0$ , é dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_0 I}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \frac{k_{10}}{\sqrt{r^2 + (z - (2z_0 - z_F))^2}} + (1 - k_{01}^2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^{i-1} k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_1 - z_0) + 2z_1 - z_F))^2}} \right\} \quad (2.25)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, o refletido na interface  $z = z_0$  e aos potenciais de cada raio do grupo similar à família D.

### 2.2.5 Fonte no meio 0 e potencial no meio 1

Neste caso, temos o raio direto, transmitido do meio 0 para o meio 1, e um conjunto de raios, também transmitidos do meio 0 para o meio 1, que sofrem sucessivas reflexões nas interfaces  $z = z_0$  e  $z = z_1$ .

Esses raios podem ser agrupados em duas famílias, de acordo apenas com a última reflexão, na medida em que a primeira reflexão sempre acontece na interface  $z = z_1$ , conforme mostra a figura 2.8. De fato, a menos da transmissão inicial, estes dois grupos de raios são análogos

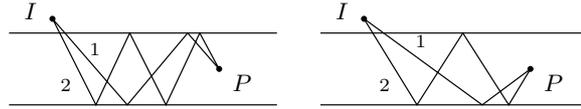


Figura 2.8: Dois primeiros raios dos dois grupos de raios indo da fonte de corrente  $I$  (no meio 0) ao observador em  $P$  (no meio 1), com sucessivas reflexões

aos das famílias C e D, anteriormente definidas. Desta maneira, podemos escrever a expressão do potencial no meio 1 ( $z_0 \leq z \leq z_1$ ), com a fonte de corrente no meio 0 ( $z_F \leq z_0$ ):

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_1 I (1 - k_{10})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_0 - z_1) + z_F))^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^{i-1} k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_1 - z_0) + 2z_1 - z_F))^2}} \right\} \quad (2.26)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, aos potenciais de cada raio dos grupos similares à família C e D, todos eles atenuados pelo coeficiente de transmissão do meio 0 para o meio 1.

### 2.2.6 Fonte no meio 0 e potencial no meio 2

Neste caso, como os raios saem do meio 0 para o meio 2, passam obrigatoriamente pelas interfaces  $z = z_0$  e  $z = z_1$ . Assim, todos são atenuados pelos coeficientes de transmissão  $(1 - k_{10})$  e  $(1 - k_{21})$ .

A menos dos efeitos introduzidos pelas transmissões já referidas, podemos destacar: (i) o raio direto indo da fonte no meio 0 para o ponto de observação no meio 2, e (ii) um único grupo de raios tendo sua primeira reflexão na interface  $z = z_1$  e a última, na interface  $z = z_0$ , conforme mostra a figura 2.9, formando um conjunto análogo à família C já definida. Dessa

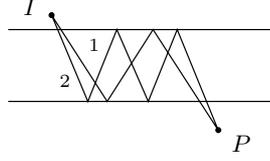


Figura 2.9: Dois primeiros raios do grupo de raios indo da fonte de corrente  $I$  (no meio 0) ao observador em  $P$  (no meio 2), com sucessivas reflexões

forma, o potencial pode ser expresso por

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_2 I (1 - k_{10})(1 - k_{21})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_0 - z_1) + z_F))^2}} \right\} \quad (2.27)$$

onde as duas parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, e aos potenciais de cada raio do grupo similar à família C, todos eles atenuados pelo coeficiente de transmissão do meio 0 para o meio 1, e do meio 1 para o meio 2.

### 2.2.7 Fonte no meio 2 e potencial no meio 2

Situação similar àquela com a fonte de corrente no meio 0 e potencial no meio 0, o potencial no meio 2 ( $z \geq z_1$ ), com a fonte de corrente também no mesmo meio 2 ( $z_F \geq z_1$ ), é formado pela contribuição direta, pela refletida na interface ( $z = z_1$ ), e pelos raios que passam do meio 2 para o meio 1, refletem sucessivamente nessas duas interfaces e retornam ao meio 2. Dessa forma, lembrando que  $k_{12} = -k_{21}$ , o potencial é dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_2 I}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \frac{k_{12}}{\sqrt{r^2 + (z - (2z_1 - z_F))^2}} + (1 - k_{21}^2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^{i-1}}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F))^2}} \right\} \quad (2.28)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, o refletido na interface  $z = z_1$  e aos potenciais de cada raio do grupo similar à família A.

### 2.2.8 Fonte no meio 2 e potencial no meio 1

Situação similar ao caso da fonte no meio 0 e observador no meio 1, temos uma contribuição direta e dois grupos de raios correspondentes às sucessivas reflexões nas duas interfaces que limitam o meio 1. Estes dois grupos caracterizam-se por ter a primeira reflexão na interface  $z = z_0$  e a última, alternativamente, nessa mesma interface ou na  $z = z_1$ . Assim, elas são similares às famílias A e B.

Dessa forma, podemos escrever a expressão do potencial no meio 1 ( $z_0 \leq z \leq z_1$ ), com a fonte no meio 2 ( $z_F \geq z_1$ ):

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_1 I(1 - k_{12})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^{i-1}}{\sqrt{r^2 + (z - (2(i-1)(z_0 - z_1) + 2z_0 - z_F))^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_1 - z_0) + z_F))^2}} \right\} \quad (2.29)$$

onde as três parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, aos potenciais de cada raio dos grupos similares à família A e B, todos eles atenuados pelo coeficiente de transmissão do meio 2 para o meio 1.

### 2.2.9 Fonte no meio 2 e potencial no meio 0

Similar ao caso da fonte no meio 0 e potencial no meio 2, todos os raios terão, no mínimo, duas atenuações devido as transmissões que ocorrem do meio 2 para o meio 1, e do meio 1 para o meio 0. Assim, podemos considerar uma contribuição direta, e um grupo de raios que se refletem sucessivamente nas duas interfaces que limitam o meio 1. Este grupo é aquele em que a primeira reflexão se dá na interface  $z = z_0$ , e a última, na interface  $z = z_1$ , ou seja, é similar à família B.

Dessa forma, podemos escrever que o potencial no meio 0 ( $z \leq z_0$ ), com a fonte no meio 2 ( $z_F \geq z_1$ ), é dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_0 I(1 - k_{12})(1 - k_{01})}{4\pi} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{01}^i k_{21}^i}{\sqrt{r^2 + (z - (2i(z_1 - z_0) + z_F))^2}} \right\} \quad (2.30)$$

onde as duas parcelas correspondem, respectivamente, ao potencial direto, e aos potenciais de cada raio do grupo similar à família B, todos eles atenuados pelo coeficiente de transmissão do meio 2 para o meio 1, e do meio 1 para o meio 0.

## 2.3 Problemas

1. Tomando por base a expressão (2.22), obtenha a expressão do potencial considerando que  $z = z_F = z_0 = 0$  e  $\rho_0 = \infty$ . Reduza, ainda mais, fazendo o limite  $z_1 \rightarrow 0$  dessa nova expressão, e mostre que ela tende para  $V = \rho_2 I / 2\pi r i$ .
2. Similarmente, tomando a expressão 2.24, mostre que, fazendo  $z_F = z_0 = z_1 = 0$ , a expressão tende para  $V = \rho_2 I / (2\pi \sqrt{r^2 + z^2})$ .

# Capítulo 3

## N Interfaces Paralelas

Neste capítulo, será apresentada a solução detalhada para o potencial elétrico do problema relacionado a uma fonte de corrente pontual instalada em qualquer local de um meio formado por uma sucessão de camadas condutoras, homogêneas e isotrópicas, separadas por interfaces plano-paralelas, sendo que a primeira e a última camada são, de fato, semi-espacos.

### 3.1 N interfaces paralelas

Conforme ilustra a figura 3.1, vamos considerar um modelo formado por uma sucessão de camadas separadas por  $n$  interfaces plano-paralelas. A fonte de corrente pontual está localizado no interior da camada  $m$  que, por conta dessa particularidade, será considerada dividida, artificialmente, por um plano contendo a fonte. Como consequência, o número de camadas do problema é acrescido de um, totalizando  $n + 2$ . Desta forma, as camadas serão denominadas pela sucessão  $0, 1, \dots, \overline{m}, \underline{m}, \dots, n - 1$  e  $n$ , onde  $\overline{m}$  denota a porção da camada  $m$  delimitada pelos planos  $z = z_{m-1}$  e  $z = z_F$ , enquanto que  $\underline{m}$  a porção restante da camada  $m$ , ou seja, aquela delimitada pelos planos  $z = z_F$  e  $z = z_m$ .

Nessas condições, a solução geral desse problema implica na obtenção de  $n + 2$  expressões dos potenciais elétricos  $\mathcal{V}_i$ , uma para cada camada  $i$ . Como, por hipótese, cada camada é homogênea e isotrópica, a função potencial  $\mathcal{V}_i$  em seu interior deve satisfazer à equação de Laplace, ou seja, temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{V}_i &= 0, \\ i &= 0, 1, \dots, \overline{m}, \underline{m}, \dots, n - 1, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

considerando que a fonte de corrente encontra-se dentro de um volume infinitesimal, que não faz parte da camada  $m$ .

### 3.2 Solução da equação de Laplace

A solução dessa equação diferencial a derivadas parciais pode ser obtida através de diversas técnicas. Tendo em vista a geometria e as propriedades físicas do modelo ilustradas na figura 3.1, a evidente simetria cilíndrica em torno do eixo  $z$  leva-nos a considerar um sistema de coordenadas cilíndrica  $(r, \theta, z)$ . Além disso, essa simetria cilíndrica implica que a solução não depende de  $\theta$ . Assim, aplicando o método da separação de variáveis, vamos supor que a solução da equação de Laplace pode ser escrita como um produto de duas funções:  $R_i(r)$  e

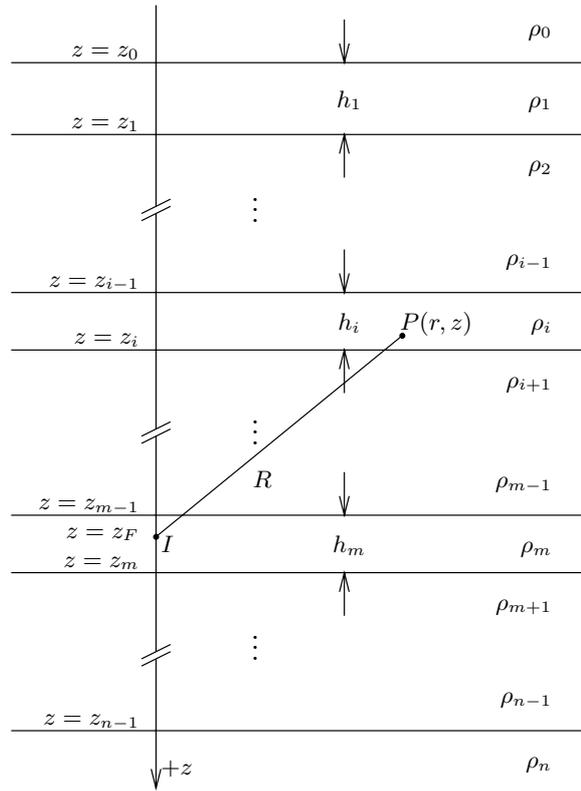


Figura 3.1: Modelo de  $n$ -camadas horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada  $m$

$Z_i(z)$ , ou seja,  $\mathcal{V}_i = R_i(r) Z_i(z)$ . Com essas considerações, a equação de Laplace simplifica-se a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (R_i Z_i)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (R_i Z_i)}{\partial z^2} = 0, \quad (3.2)$$

$$Z_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) + R_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} = 0. \quad (3.3)$$

Seguindo os passos utilizados no método da separação de variáveis, vamos supor que  $R_i Z_i \neq 0$ , e dividir a equação por  $R_i Z_i$ , ou seja,

$$\frac{1}{r R_i} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} = 0. \quad (3.4)$$

Como a primeira parcela depende apenas de  $r$  e a segunda, apenas de  $z$ , devemos considerar que elas são constantes em  $r$  e  $z$ , de valores opostos, na medida em que sua soma é nula. Assim, vamos escolher estabelecendo que

$$\frac{1}{r R_i} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_i}{dr} \right) = -\lambda^2, \text{ e} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{Z_i} \frac{d^2 Z_i}{dz^2} = \lambda^2. \quad (3.6)$$

Fazendo  $r = u/\lambda$  na equação (3.5), podemos mostrar que ela é um caso particular ( $\nu = 0$ ), da equação diferencial de Bessel,

$$u^2 \frac{d^2 w}{du^2} + u \frac{dw}{du} + (u^2 - \nu^2)w = 0 \quad (3.7)$$

$$u \frac{d}{du} \left( u \frac{dw}{du} \right) + (u^2 - \nu^2)w = 0,$$

cuja solução, seguindo Erdélyi (1953a), é formada pelas funções de Bessel de primeira espécie, de ordem  $\nu$  e  $-\nu$ , representadas por  $J_\nu(u)$  e  $J_{-\nu}(u)$ . Também, as combinações lineares:

$$Y_\nu(u) = (\text{sen } \nu\pi)^{-1} [J_\nu(u) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(u)], \quad (3.8)$$

$$H_\nu^{(1)}(u) = J_\nu(u) + iY_\nu(u), \text{ e} \quad (3.9)$$

$$H_\nu^{(2)}(u) = J_\nu(u) - iY_\nu(u), \quad (3.10)$$

são soluções da equação diferencial de Bessel. A função  $Y_\nu(u)$  denomina-se função de Bessel de segunda espécie ou função de Neumann. As funções  $H_\nu^{(1)}(u)$  e  $H_\nu^{(2)}(u)$  são funções de Bessel de terceira espécie, também denominadas por primeira ou segunda função de Hankel.

Contudo, a solução do nosso problema exige  $\nu = 0$ . Nesse caso,  $J_{-\nu}(u)$  não pode ser a outra solução da equação diferencial e, sendo assim, vamos tomar a função  $Y_0(u)$  como a outra solução, de sorte que a solução da equação (3.5) é uma combinação linear de  $Y_0(\lambda r)$  e  $J_0(\lambda r)$ . A figura 3.2 mostra o comportamento dessas funções.

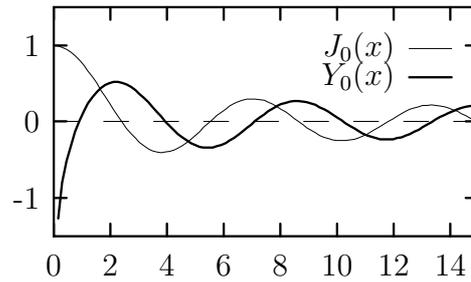


Figura 3.2: Funções de Bessel  $J_0(x)$  e  $Y_0(x)$

Retomando a equação diferencial em  $z$  (eq. 3.6), a sua solução é bastante simples, formada pela combinação linear das funções  $\exp(-\lambda z)$  e  $\exp(\lambda z)$ . Dessa maneira, podemos escrever que o potencial  $\mathcal{V}_i$  que satisfaz, em coordenadas cilíndricas, à equação de Laplace (eq. 3.1), é dado por:

$$\mathcal{V}_i = \int_0^\infty [A_i(\lambda) \exp(-\lambda z) + B_i(\lambda) \exp(\lambda z)] \times [C_i(\lambda) J_0(\lambda r) + D_i(\lambda) Y_0(\lambda r)] d\lambda. \quad (3.11)$$

O fato da função de Bessel  $Y_0(x)$  divergir quando o seu argumento é anulado, ou seja, ao fazermos  $r \rightarrow 0$ , obriga-nos a anular a função  $D_i(\lambda)$ , argumentando que o potencial deve ser limitado em  $r = 0$ . Assim, o potencial  $\mathcal{V}_i$  fica reduzido a

$$\mathcal{V}_i = \int_0^\infty [A_i(\lambda) e^{-\lambda z} + B_i(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (3.12)$$

### 3.3 Condições de contorno

Como dito anteriormente, temos  $n + 2$  funções  $\mathcal{V}_i$  a serem determinadas. Contudo, considerando o resultado representado pela expressão (3.12), cada função  $V_i$  exige o conhecimento de duas outras funções:  $A_i$  e  $B_i$ . Isto significa que temos, também,  $n + 2$  funções  $A_i$  e  $n + 2$  funções  $B_i$  desconhecidas. Para viabilizar a solução deste problema, iremos considerar diversos aspectos físicos, visando o estabelecimento das  $2n + 4$  equações necessárias.

#### 3.3.1 Condições no infinito

A consideração que o potencial  $\mathcal{V}_0$  deve se anular à medida em que  $z \rightarrow -\infty$ , e que o potencial  $\mathcal{V}_n$  deve, também, se anular à medida em que  $z \rightarrow +\infty$ , leva-nos a escrever duas das  $2n + 4$  equações, quais sejam:

$$A_0 = 0, \text{ e} \quad (3.13)$$

$$B_n = 0. \quad (3.14)$$

#### 3.3.2 Condições de contorno nas interfaces

Com exceção da interface contendo a fonte de corrente, em cada uma das  $n$  interfaces  $z = z_i$ , onde  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , devem ser satisfeitas as condições de continuidade do potencial elétrico e do componente normal do vetor da densidade de corrente. Então, de forma generalizada, a continuidade do potencial na interface  $z = z_i$ , estabelece que  $\mathcal{V}_i|_{z=z_i} = \mathcal{V}_{i+1}|_{z=z_i}$ . Assim, fazendo uso da expressão (3.12),

$$\int_0^\infty [A_i e^{-\lambda z_i} + B_i e^{\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty [A_{i+1} e^{-\lambda z_i} + B_{i+1} e^{\lambda z_i}] J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (3.15)$$

Na medida em que essa igualdade deve ser satisfeita para qualquer  $r$ , os integrandos devem ser iguais,

$$A_i e^{-\lambda z_i} + B_i e^{\lambda z_i} - A_{i+1} e^{-\lambda z_i} - B_{i+1} e^{\lambda z_i} = 0. \quad (3.16)$$

Considerando a questão da continuidade do componente normal do vetor da densidade de corrente, devemos estabelecer que

$$[\mathbf{j}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}]|_{z=z_i} = [\mathbf{j}_{i+1} \cdot \hat{\mathbf{z}}]|_{z=z_i}.$$

Dessa forma, considerando a expressão (3.12), devemos escrever que

$$\sigma_i \int_0^\infty [A_i e^{-\lambda z_i} - B_i e^{\lambda z_i}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \sigma_{i+1} \int_0^\infty [A_{i+1} e^{-\lambda z_i} - B_{i+1} e^{\lambda z_i}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (3.17)$$

e, novamente, como essa igualdade deve ser satisfeita para qualquer  $r$ , temos

$$\sigma_i [A_i e^{-\lambda z_i} - B_i e^{\lambda z_i}] - \sigma_{i+1} [A_{i+1} e^{-\lambda z_i} - B_{i+1} e^{\lambda z_i}] = 0. \quad (3.18)$$

Nas equações acima, considerando a divisão da camada  $m$  pelo plano passando pela fonte de corrente,  $i + 1$  representa  $\overline{m}$  quando  $i = m - 1$  e, quando  $i = m$ , se quer dizer  $i = \underline{m}$ .

Para finalizar, as equações resultantes da aplicação da continuidade do potencial elétrico como, também, do componente normal do vetor da densidade de corrente elétrica, leva-nos, então, a ter mais  $2n$  das  $2n + 4$  equações necessárias.

### 3.3.3 Condições relativas à fonte de corrente

A fonte de corrente pontual merece uma atenção especial e, no presente caso, adotaremos a técnica utilizada por Sato (1996, 1997, 2000). Por essa técnica, conforme pressuposto durante a apresentação do modelo, a camada  $m$  contendo a fonte de corrente é dividida em duas porções ( $\overline{m}$  e  $\underline{m}$ ), por meio de um plano horizontal  $z = z_F$ . Além disso, mais precisamente, devemos dizer que vamos considerar que o meio denominado  $\overline{m}$  é limitado superiormente pelo plano  $z = z_{m-1}$  e, inferiormente, pelo plano  $z = z_F$ . Analogamente, o meio  $\underline{m}$  é limitado inferiormente pelo plano  $z = z_m$  e, superiormente, pelo plano  $z = z_F$ .

Assim, para completar o conjunto de equações ficam faltando duas que serão escritas considerando a fonte de corrente. Como já dito, adotando a técnica utilizada por Sato (1996, 1997, 2000), a continuidade do potencial elétrico, com exceção do ponto  $r = 0$ , estabelece que

$$\int_0^\infty [A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F}] J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty [A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F}] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (3.19)$$

ou seja,

$$A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F} - A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} - B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F} = 0. \quad (3.20)$$

Para a questão da continuidade da corrente elétrica, vamos considerar o fluxo total de corrente  $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ , onde  $S$  é uma superfície fechada envolvendo a fonte de corrente. Assim, na medida em que a carga deve ser conservada, esse fluxo deve-se igualar à intensidade  $I$  da fonte de corrente.

Vamos supor que a superfície  $S$  é uma superfície cilíndrica, de raio  $\xi$ , altura  $2h$ , eixo  $z$ , com bases de coordenadas  $z = z_f \pm h$ , o que implica, portanto, que a fonte de corrente localiza-se exatamente no centro geométrico deste cilindro, conforme ilustra a figura 3.3. O fluxo

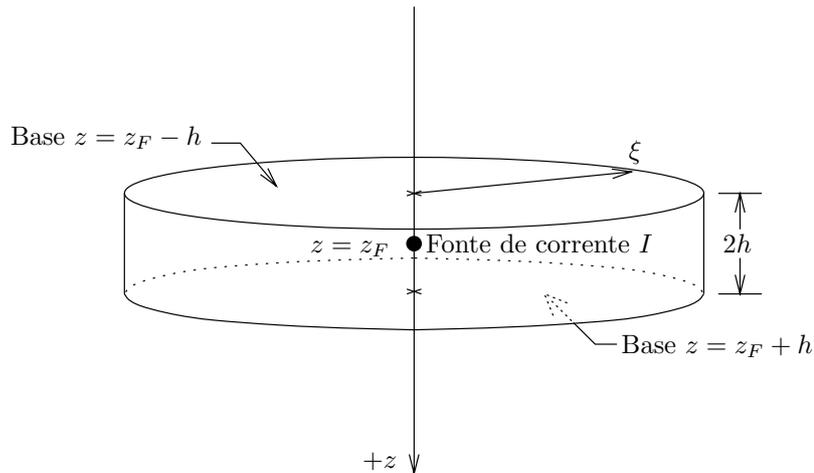


Figura 3.3: Superfície cilíndrica envolvendo a fonte de corrente

de corrente através desta superfície cilíndrica pode ser dividido em três parcelas: pela base  $z = z_F - h$ , pela base  $z = z_F + h$ , e pela lateral cilíndrica, de altura  $2h$ . Assim, atendo-nos à questão do fluxo através da lateral, podemos dizer que o mesmo tende a zero quando  $h \rightarrow 0$ , desde que possamos considerar finita a densidade de corrente na direção  $r$  que flui através dessa lateral.

O fluxo de corrente através da base  $z = z_F - h$  é expresso por:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\xi} \mathbf{j}_{\overline{m}} \cdot (-\hat{\mathbf{z}} r dr d\theta), \quad (3.21)$$

e o através da base  $z = z_F + h$ , por:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\xi} \underline{j}_m \cdot (\hat{z} r dr d\theta). \quad (3.22)$$

Desenvolvendo essas duas últimas integrais e igualando sua soma à intensidade da fonte de corrente  $I$ , temos:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} 2\pi\sigma_m \int_{r=0}^{\xi} \int_0^{\infty} [-A_{\overline{m}} e^{-\lambda(z_F-h)} + B_{\overline{m}} e^{\lambda(z_F-h)}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda r dr \\ & - \lim_{h \rightarrow 0} 2\pi\sigma_m \int_{r=0}^{\xi} \int_0^{\infty} [-A_{\underline{m}} e^{-\lambda(z_F+h)} + B_{\underline{m}} e^{\lambda(z_F+h)}] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda r dr = I. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Fazendo os limites indicados e invertendo a ordem das integrações, temos:

$$\begin{aligned} & 2\pi\sigma_m \int_0^{\infty} [-A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F}] \left[ \int_0^{\xi} J_0(\lambda r) r dr \right] \lambda d\lambda \\ & - 2\pi\sigma_m \int_0^{\infty} [-A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F}] \left[ \int_0^{\xi} J_0(\lambda r) r dr \right] \lambda d\lambda = I. \end{aligned} \quad (3.24)$$

As integrais entre colchetes são idênticas e valem  $(\xi/\lambda)J_1(\lambda\xi)$ , o que possibilita reescrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned} & 2\pi\sigma_m \int_0^{\infty} [-A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F}] (\xi/\lambda) J_1(\lambda\xi) \lambda d\lambda \\ & - 2\pi\sigma_m \int_0^{\infty} [-A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F}] (\xi/\lambda) J_1(\lambda\xi) \lambda d\lambda = I, \end{aligned} \quad (3.25)$$

ou, ainda,

$$\int_0^{\infty} \frac{2\pi\sigma_m}{I\lambda^{1/2}} [-A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F} + A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} - B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F}] (\lambda\xi)^{1/2} J_1(\lambda\xi) d\lambda = \xi^{-1/2}. \quad (3.26)$$

Essa integral tem a forma

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) (\lambda\xi)^{1/2} J_1(\lambda\xi) d\lambda = \xi^{-1/2}, \quad (3.27)$$

a qual, lembrando que ela é o resultado do fluxo total de corrente através da superfície cilíndrica de raio  $\xi$  qualquer que envolve a fonte de corrente, constitui-se numa transformada de Hankel que implica em  $f(\lambda) = 1/\lambda^{1/2}$  (Erdélyi, 1953b, p. 22). Assim, temos que

$$-A_{\overline{m}} e^{-\lambda z_F} + B_{\overline{m}} e^{\lambda z_F} + A_{\underline{m}} e^{-\lambda z_F} - B_{\underline{m}} e^{\lambda z_F} = \frac{I}{2\pi\sigma_m}. \quad (3.28)$$

### 3.4 Solução do sistema de equações

O conjunto de  $2n+4$  equações é formado pelas equações (3.13) e (3.14) referentes a questão da convergência do potencial no infinito ( $z = \pm\infty$ ), pelas equações (3.16) e (3.18) preservando a continuidade do potencial e do componente normal do vetor densidade de corrente em todas interfaces, e as equações (3.20) e (3.28), referentes à fonte de corrente  $I$ . Todas equações têm termo independente nulo, exceto a equação (3.28).

### 3.4.1 Recorrência a partir da interface 0

Interfaces  $i \leq m - 1$

Considerando as equações (3.13), (3.16) e (3.18), sendo essas duas últimas para  $i = 0$ , temos quatro incógnitas ( $A_0, B_0, A_1$  e  $B_1$ ). Usando a equação (3.13), podemos reescrever (3.16) e (3.18) como

$$B_0 e^{2\lambda z_0} - [A_1 + B_1 e^{2\lambda z_0}] = 0 \quad (3.29)$$

$$-B_0 e^{2\lambda z_0} - S_{10}[A_1 - B_1 e^{2\lambda z_0}] = 0. \quad (3.30)$$

onde  $S_{10} = \sigma_1/\sigma_0$ . Somando-se essas duas equações, temos a relação

$$A_1 + \frac{1 - S_{10}}{1 + S_{10}} B_1 e^{2\lambda z_0} = 0. \quad (3.31)$$

Esta última equação junto com as equações (3.16) e (3.18) tomadas para  $i = 1$ , podem também ser reduzidas a uma equação em  $A_2$  e  $B_2$ , de termo independente nulo, a qual, por sua vez, utilizada novamente com as equações (3.16) e (3.18) tomadas para  $i = 2$ , levam a outra equação em  $A_3$  e  $B_3$  e termo independente nulo. Assim, generalizando, devemos esperar uma equação do tipo

$$A_{i-1} + x_{i-1} B_{i-1} = 0. \quad (3.32)$$

Tomando as equações (3.16) e (3.18) para a interface  $i - 1$ , elas podem ser reescritas como:

$$A_{i-1} + B_{i-1} e^{2\lambda z_{i-1}} - A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0 \quad (3.33)$$

$$A_{i-1} - B_{i-1} e^{2\lambda z_{i-1}} - S_{i,i-1}[A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}] = 0. \quad (3.34)$$

onde  $S_{i,i-1} = \sigma_i/\sigma_{i-1}$ . Subtraindo-se a penúltima equação da duas últimas, temos:

$$B_{i-1}[e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}] - A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0 \quad (3.35)$$

$$-B_{i-1}[e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}] - S_{i,i-1}[A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}] = 0. \quad (3.36)$$

Dividindo-se essas equações pelos respectivos coeficientes de  $B_{i-1}$  e somando-se, temos:

$$\frac{-A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}} - S_{i,i-1} \frac{A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}} = 0, \quad (3.37)$$

ou, multiplicando por  $e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}$  e reagrupando termos, temos

$$-A_i \left[ 1 + S_{i,i-1} \frac{e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}}{e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}} \right] - B_i e^{2\lambda z_{i-1}} \left[ 1 - S_{i,i-1} \frac{e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}}{e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}} \right] = 0, \quad (3.38)$$

e, finalmente,

$$A_i + \frac{1 - S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}}{1 + S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}} B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0. \quad (3.39)$$

Comparando esta equação com as equações (3.31) e (3.32), podemos sintetizar este último resultado através da equação:

$$A_i + g_i B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0, \quad (3.40)$$

onde  $i = 0, 1, \dots, m-1, \bar{m}$ , e

$$g_i = \frac{1 - S_{i,i-1}f_i}{1 + S_{i,i-1}f_i}, \quad (3.41)$$

$$f_i = \frac{1 - g_{i-1} e^{-2\lambda(z_{i-1}-z_{i-2})}}{1 + g_{i-1} e^{-2\lambda(z_{i-1}-z_{i-2})}}, \quad (3.42)$$

$$g_{i-1} = \dots,$$

$$\vdots$$

$$f_1 = 1, \quad (3.43)$$

$$g_0 = 0, \quad (3.44)$$

**Interfaces**  $i > m-1$

Tomando-se a equação (3.40) para  $i = \bar{m}$ , temos

$$A_{\bar{m}} + g_{\bar{m}} B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}} = 0. \quad (3.45)$$

Usando esta equação para eliminar o termo  $A_{\bar{m}}$  das equações (3.20) e (3.28) que se referem à fonte de corrente  $I$ , temos

$$-B_{\bar{m}} [e^{2\lambda z_F} - g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}] + A_{\bar{m}} + B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F} = 0. \quad (3.46)$$

$$B_{\bar{m}} [e^{2\lambda z_F} + g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}] + A_{\bar{m}} - B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F} = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m}, \quad (3.47)$$

ou, dividindo-se cada equação pelos respectivos coeficientes de  $B_{\bar{m}}$  e somando as equações resultantes, temos

$$\frac{A_{\bar{m}} + B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F}}{e^{2\lambda z_F} - g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}} + \frac{A_{\bar{m}} - B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F}}{e^{2\lambda z_F} + g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}} = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1}{e^{2\lambda z_F} + g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}}, \quad (3.48)$$

que, após ser multiplicada por  $e^{2\lambda z_F} - g_{\bar{m}} e^{2\lambda z_{m-1}}$  e ter seus termos reagrupandos, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} A_{\bar{m}} \left[ 1 + \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}} \right] + B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F} \left[ 1 - \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}} \right] \\ = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

e, finalmente,

$$A_{\bar{m}} + \frac{1 - \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}}{1 + \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}} B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F} = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{\frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}}{1 + \frac{1 - g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}}, \quad (3.50)$$

ou, sinteticamente,

$$A_{\bar{m}} + g_{\bar{m}} B_{\bar{m}} e^{2\lambda z_F} = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times r_{\bar{m}}, \quad (3.51)$$

onde,

$$r_m = \frac{f_m}{1 + f_m}, \quad (3.52)$$

$$g_m = \frac{1 - f_m}{1 + f_m}, \quad (3.53)$$

$$f_m = \frac{1 - g_m e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_m e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}. \quad (3.54)$$

Dando prosseguimento à recorrência agora pelas interfaces  $i = m, m + 1, \dots, n - 1$ , vamos considerar que as demais equações têm termos independente não nulo, ou seja, têm a seguinte forma:

$$A_{i-1} + x_{i-1} B_{i-1} = y_{i-1}. \quad (3.55)$$

Assim, a fim de obter a equação similar com  $A_i$  e  $B_i$ , vamos considerar as equações relativas às condições de contorno na interface  $z = z_{i-1}$ , ou seja, as equações (3.16) e (3.18) reescritas como:

$$-A_{i-1} - B_{i-1} e^{2\lambda z_{i-1}} + A_i + B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0 \quad (3.56)$$

$$-A_{i-1} + B_{i-1} e^{2\lambda z_{i-1}} + S_{i,i-1} [A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}] = 0. \quad (3.57)$$

A fim de eliminar o termo  $A_{i-1}$ , vamos somar a penúltima equação às duas últimas. Assim, temos

$$-B_{i-1} [e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}] + A_i + B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = y_{i-1} \quad (3.58)$$

$$B_{i-1} [e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}] + S_{i,i-1} [A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}] = y_{i-1}. \quad (3.59)$$

Dividindo cada uma dessas equações pelos respectivos coeficientes do termo  $B_{i-1}$  e somando as equações resultantes, temos

$$\frac{A_i + B_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}} + S_{i,i-1} \frac{A_i - B_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}} = y_{i-1} \left[ \frac{1}{e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}} + \frac{1}{e^{2\lambda z_{i-1}} + x_{i-1}} \right], \quad (3.60)$$

ou, multiplicando-se por  $e^{2\lambda z_{i-1}} - x_{i-1}$  e reagrupando termos, temos

$$A_i \left[ 1 + S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}} \right] + B_i e^{2\lambda z_{i-1}} \left[ 1 - S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}} \right] = y_{i-1} \left[ 1 + \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}} \right], \quad (3.61)$$

e, finalmente,

$$A_i + \frac{1 - S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}}{1 + S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}} B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = y_{i-1} \frac{1 + \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}}{1 + S_{i,i-1} \frac{1 - x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}{1 + x_{i-1} e^{-2\lambda z_{i-1}}}}, \quad (3.62)$$

que, pode-se ver, tem a forma da equação (3.55). Assim, considerando as equações (3.40), (3.41), (3.42), (3.51), (3.53) e (3.54), podemos, também, sintetizar o resultado anterior através da equação

$$A_i + g_i B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = \frac{I e^{\lambda z_F}}{2\pi \sigma_m} \times r_i, \quad (3.63)$$

onde  $i = \underline{m}, m+1, \dots, n-1, n$ ,

$$r_i = r_{i-1} \times \frac{1 + f_i}{1 + S_{i,i-1} f_i}, \quad (3.64)$$

⋮

$$r_{\underline{m}} = \frac{f_{\underline{m}}}{1 + f_{\underline{m}}}, \quad (3.65)$$

e  $g_i$  é dado pelas expressões (3.41) e (3.42), considerando que

$$g_{m+1} = \frac{1 - S_{m+1,m} f_{m+1}}{1 + S_{m+1,m} f_{m+1}}, \quad (3.66)$$

$$f_{m+1} = \frac{1 - g_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + g_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}, \quad (3.67)$$

$$g_{\underline{m}} = \frac{1 - f_{\underline{m}}}{1 + f_{\underline{m}}}, \quad (3.68)$$

$$f_{\underline{m}} = \frac{1 - g_{\overline{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + g_{\overline{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}, \quad (3.69)$$

e  $z_{i-1} = z_F$  quando  $i = \underline{m}$ .

### 3.4.2 Recorrência a partir da interface $n - 1$

**Interfaces  $i \geq m$**

A equação (3.14) refere-se a condição de convergência do potencial elétrico na camada  $n$  quando  $z \rightarrow \infty$ , e envolve, simplesmente, o termo  $B_n$ . Se considerarmos as equações (3.16) e (3.18) na interface  $z = z_{n-1}$ , formamos um conjunto com quatro incógnitas que, se manipuladas convenientemente, permitem estabelecer uma relação envolvendo apenas  $A_{n-1}$  e  $B_{n-1}$ . Tomando a equação (3.14), podemos reescrever as equações (3.16) e (3.18) como

$$A_{n-1} e^{-\lambda z_{n-1}} + B_{n-1} e^{\lambda z_{n-1}} - A_n e^{-\lambda z_{n-1}} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} [A_{n-1} e^{-\lambda z_{n-1}} - B_{n-1} e^{\lambda z_{n-1}}] - A_n e^{-\lambda z_{n-1}} = 0. \quad (3.71)$$

Subtraindo-se membro a membro, temos

$$\left[1 - \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right] A_{n-1} e^{-\lambda z_{n-1}} + \left[1 + \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right] B_{n-1} e^{\lambda z_{n-1}} = 0, \quad (3.72)$$

ou, simplesmente,

$$\frac{1 - S_{n-1,n}}{1 + S_{n-1,n}} A_{n-1} e^{-2\lambda z_{n-1}} + B_{n-1} = 0, \quad (3.73)$$

onde  $S_{n-1,n} = \sigma_{n-1}/\sigma_n$ .

Esta equação junto com as equações (3.16) e (3.18) na interface  $z = z_{n-2}$ , possuem, também, quatro incógnitas:  $A_{n-1}$ ,  $B_{n-1}$ ,  $A_{n-2}$  e  $B_{n-2}$ . Como os termos independentes destas três equações são nulos, elas podem ser reduzidas a uma equação apenas em  $A_{n-2}$  e  $B_{n-2}$ , similar à equação (3.73), ou seja, na forma

$$X_{n-2} A_{n-2} + B_{n-2} = 0. \quad (3.74)$$

Isso sugere que a repetição sucessiva com o uso das equações (3.16) e (3.18) nas interfaces  $n - 3, n - 4, \dots, i + 1$ , leva-nos a uma relação do tipo

$$X_{i+1}A_{i+1} + B_{i+1} = 0. \quad (3.75)$$

Assim, tendo por base essa equação, vamos tentar obter sua similar em  $A_i$  e  $B_i$ , fazendo uso das equações (3.16) e (3.18) na interface  $z = z_i$ , quais sejam:

$$A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i - A_{i+1} e^{-2\lambda z_i} - B_{i+1} = 0 \quad (3.76)$$

$$-S_{i,i+1}[A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i] + A_{i+1} e^{-2\lambda z_i} - B_{i+1} = 0, \quad (3.77)$$

onde  $S_{i,i+1} = \sigma_i/\sigma_{i+1}$ . Somando-se a estas, a equação (3.75), temos

$$A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i - A_{i+1} [e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}] = 0 \quad (3.78)$$

$$-S_{i,i+1}[A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i] + A_{i+1} [e^{-2\lambda z_i} + X_{i+1}] = 0. \quad (3.79)$$

Dividindo-se estas equações pelos respectivos coeficientes do termo  $A_{i+1}$  e somando as equações resultantes, eliminamos  $A_{i+1}$ , ou seja,

$$\frac{A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i}{e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}} - S_{i,i+1} \frac{A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i}{e^{-2\lambda z_i} + X_{i+1}} = 0. \quad (3.80)$$

Multiplicando-se por  $e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}$  e reagrupando-se os termos,

$$\left[ 1 - S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}} \right] A_i e^{-2\lambda z_i} + \left[ 1 + S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}} \right] B_i = 0, \quad (3.81)$$

e, finalizando,

$$\frac{1 - S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}}{1 + S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}} A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = 0. \quad (3.82)$$

Comparando esta última equação com a (3.73), podemos dizer que, com a sucessiva incorporação das equações relativas às condições de contorno, forma-se uma seqüência de equações tipo

$$G_i A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = 0, \quad (3.83)$$

onde  $i = n, n - 1, \dots, \underline{m}$ , e

$$G_i = \frac{1 - S_{i,i+1} F_i}{1 + S_{i,i+1} F_i}, \quad (3.84)$$

$$F_i = \frac{1 - G_{i+1} e^{-2\lambda(z_{i+1} - z_i)}}{1 + G_{i+1} e^{-2\lambda(z_{i+1} - z_i)}}, \quad (3.85)$$

$$G_{i+1} = \dots, \quad (3.86)$$

⋮

$$F_{n-1} = 1, \quad (3.87)$$

$$G_n = 0. \quad (3.88)$$

**Interfaces**  $i < m$ 

Tomando-se a equação (3.83) para  $i = \underline{m}$ , temos

$$G_{\underline{m}} A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m} + B_{\underline{m}} = 0. \quad (3.89)$$

Usando esta equação para eliminar o termo  $B_{\underline{m}}$  das equações relativas às condições relativas à fonte de corrente, (3.20) e (3.28), temos

$$A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}} - A_{\underline{m}} [e^{-2\lambda z_F} - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}] = 0, \quad (3.90)$$

$$-A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}} + A_{\underline{m}} [e^{-2\lambda z_F} + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}] = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m}, \quad (3.91)$$

que, divididas pelos respectivos coeficientes do termo  $A_{\underline{m}}$ , e somadas, formam

$$\frac{A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}}}{e^{-2\lambda z_F} - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}} + \frac{-A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}}}{e^{-2\lambda z_F} + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}} = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1}{e^{-2\lambda z_F} + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}}. \quad (3.92)$$

Multiplicando-se por  $e^{-2\lambda z_F} - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_m}$  e reagrupando termos, temos

$$\begin{aligned} A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} \left[ 1 - \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}} \right] + B_{\underline{m}} \left[ 1 + \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}} \right] \\ = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}} \\ 1 + \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}} \end{aligned} A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}} = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{\frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}}{1 + \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}}. \quad (3.94)$$

Este resultado pode ser resumido por meio de

$$G_{\underline{m}} A_{\underline{m}} e^{-2\lambda z_F} + B_{\underline{m}} = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times R_{\underline{m}}, \quad (3.95)$$

onde

$$R_{\underline{m}} = \frac{F_{\underline{m}}}{1 + F_{\underline{m}}} \quad (3.96)$$

$$G_{\underline{m}} = \frac{1 - F_{\underline{m}}}{1 + F_{\underline{m}}}, \quad (3.97)$$

$$F_{\underline{m}} = \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}. \quad (3.98)$$

Relembrando, esta última equação traz no seu coeficiente  $G_{\underline{m}}$ , todas as informações relativas às condições contorno desde a camada  $n$  até as referentes a fonte de corrente.

Dando prosseguimento à recorrência, agora pelas interfaces  $i = m - 1, m - 2, \dots, 0$ , vamos considerar que as demais equações têm termos independente não nulo, ou seja, têm a seguinte forma:

$$X_{i+1} A_{i+1} + B_{i+1} = Y_{i+1}. \quad (3.99)$$

Visando obter uma equação similar com  $A_i$  e  $B_i$ , vamos considerar as equações relativas às condições de contorno na interface  $z = z_i$ , ou seja, as equações (3.16) e (3.18) reescritas como:

$$A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i - A_{i+1} e^{-2\lambda z_i} - B_{i+1} = 0 \quad (3.100)$$

$$-S_{i,i+1} [A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i] + A_{i+1} e^{-2\lambda z_i} - B_{i+1} = 0. \quad (3.101)$$

Para eliminar o termo  $B_{i+1}$ , devemos somar a penúltima equação às duas últimas, ou seja,

$$A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i - A_{i+1} [e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}] = Y_{i+1} \quad (3.102)$$

$$-S_{i,i+1} [A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i] + A_{i+1} [e^{-2\lambda z_i} + X_{i+1}] = Y_{i+1}. \quad (3.103)$$

Dividindo-se cada equação pelos respectivos coeficientes do termo  $A_{i+1}$  e somando-se as equações resultantes, temos

$$\frac{A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i}{e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}} - S_{i,i+1} \frac{A_i e^{-2\lambda z_i} - B_i}{e^{-2\lambda z_i} + X_{i+1}} = Y_{i+1} \left[ \frac{1}{e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}} + \frac{1}{e^{-2\lambda z_i} + X_{i+1}} \right], \quad (3.104)$$

ou, multiplicando-se por  $e^{-2\lambda z_i} - X_{i+1}$  e reagrupando-se termos, temos

$$\begin{aligned} A_i e^{-2\lambda z_i} \left[ 1 - S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}} \right] + B_i \left[ 1 + S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}} \right] \\ = Y_{i+1} \left[ 1 + \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}} \right], \end{aligned} \quad (3.105)$$

e, finalmente,

$$\frac{1 - S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}}{1 + S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}} A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = Y_{i+1} \frac{1 + \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}}{1 + S_{i,i+1} \frac{1 - X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}{1 + X_{i+1} e^{2\lambda z_i}}}. \quad (3.106)$$

que repete a forma da equação (3.99). Observando as equações (3.83), (3.84), (3.85), (3.95), (3.97) e (3.98), podemos sintetizar esta última equação como:

$$G_i A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = \frac{I e^{-\lambda z_F}}{2\pi\sigma_m} \times R_i, \quad (3.107)$$

onde  $i = \bar{m}, m-1, \dots, 1, 0$ , e

$$R_i = R_{i+1} \times \frac{1 + F_i}{1 + S_{i,i+1} F_i}, \quad (3.108)$$

⋮

$$R_{\bar{m}} = \frac{F_{\bar{m}}}{1 + F_{\bar{m}}}, \quad (3.109)$$

e  $G_i$  é dado pelas expressões (3.84) e (3.85), considerando que

$$G_{m-1} = \frac{1 - S_{m-1,m} F_{m-1}}{1 + S_{m-1,m} F_{m-1}}, \quad (3.110)$$

$$F_{m-1} = \frac{1 - G_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}{1 + G_{\bar{m}} e^{-2\lambda(z_F - z_{m-1})}}, \quad (3.111)$$

$$G_{\bar{m}} = \frac{1 - F_{\bar{m}}}{1 + F_{\bar{m}}}, \quad (3.112)$$

$$F_{\bar{m}} = \frac{1 - G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}{1 + G_{\underline{m}} e^{-2\lambda(z_m - z_F)}}, \quad (3.113)$$

e que  $z_i = z_F$  quando  $i = \bar{m}$ .

### 3.5 Potenciais elétricos

As expressões de recorrência derivadas permitem estabelecer, afinal, o potencial elétrico em cada camada. Assim o par de equações (3.40) e (3.107) formam um sistema cuja solução leva-nos a estabelecer os potenciais elétricos nas camadas  $i = 0, \dots, \bar{m}$ , enquanto que o par de equações (3.63) e (3.83), leva-nos a estabelecer os potenciais elétricos nas camadas  $i = \underline{m}, \dots, n$ .

#### 3.5.1 Potenciais elétricos nas camadas 0 a m

Neste caso, devemos retomar as equações (3.40) e (3.107), ou seja,

$$A_i + g_i B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = 0, \quad (3.114)$$

$$G_i A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = \frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m}, \quad (3.115)$$

lembrando que  $z_i = z_F$  e  $z_{i-1} = z_{m-1}$ , quando  $i = \bar{m}$ . Eliminando o termo  $A_i$ , temos

$$[1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}] B_i = \frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m}, \text{ ou} \quad (3.116)$$

$$B_i = \frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}, \quad (3.117)$$

que possibilita escrever

$$A_i = -\frac{I e^{-\lambda z_F} R_i}{2\pi\sigma_m} \times \frac{g_i e^{2\lambda z_{i-1}}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}, \quad (3.118)$$

Finalmente, substituindo estes dois últimos resultados na expressão do potencial  $\mathcal{V}_i$ , dada pela equação (3.12), temos

$$\mathcal{V}_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty [-e^{-\lambda z} g_i e^{2\lambda z_{i-1}} + e^{\lambda z}] \frac{e^{-\lambda z_F} R_i J_0(\lambda r) d\lambda}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}, \quad (3.119)$$

ou, ainda,

$$\mathcal{V}_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - g_i e^{-2\lambda(z - z_{i-1})}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z_F - z)} R_i J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (3.120)$$

relembrando que  $z_i = z_F$  e  $z_{i-1} = z_{m-1}$ , quando  $i = \bar{m}$ .

O campo elétrico pode ser obtido através de  $\mathbf{E} = -\nabla\mathcal{V}$ . Assim os seus componentes são:

$$E_r = -\frac{\partial\mathcal{V}_i}{\partial r} = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - g_i e^{-2\lambda(z - z_{i-1})}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z_F - z)} \lambda R_i J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.121)$$

$$E_z = -\frac{\partial\mathcal{V}_i}{\partial z} = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 + g_i e^{-2\lambda(z - z_{i-1})}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z_F - z)} \lambda R_i J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (3.122)$$

### 3.5.2 Potenciais elétricos nas camadas m a n

Já neste caso, vamos retomar as equações (3.63) e (3.83), ou seja,

$$A_i + g_i B_i e^{2\lambda z_{i-1}} = \frac{I e^{\lambda z_F r_i}}{2\pi\sigma_m} \quad (3.123)$$

$$G_i A_i e^{-2\lambda z_i} + B_i = 0, \quad (3.124)$$

lembrando que  $z_{i-1} = z_F$  e  $z_i = z_m$  quando  $i = \underline{m}$ . Eliminando-se  $B_i$ , temos

$$A_i [1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}] = \frac{I e^{\lambda z_F r_i}}{2\pi\sigma_m}, \text{ ou} \quad (3.125)$$

$$A_i = \frac{I e^{\lambda z_F r_i}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{1}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}, \quad (3.126)$$

que permite escrever

$$B_i = -\frac{I e^{\lambda z_F r_i}}{2\pi\sigma_m} \times \frac{G_i e^{-2\lambda z_i}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}. \quad (3.127)$$

Fazendo uso da equação (3.12), podemos escrever que o potencial  $V_i$  é dado por

$$\mathcal{V}_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty [e^{-\lambda z} - e^{\lambda z} G_i e^{-2\lambda z_i}] \frac{e^{\lambda z_F r_i} J_0(\lambda r) d\lambda}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}}, \quad (3.128)$$

ou

$$\mathcal{V}_i = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - G_i e^{-2\lambda(z_i - z)}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z - z_F)} r_i J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (3.129)$$

relembrando que  $z_{i-1} = z_F$  e  $z_i = z_m$  quando  $i = \underline{m}$ .

O campo elétrico correspondente pode ser obtido através de  $\mathbf{E} = -\nabla\mathcal{V}$ . Assim os seus componentes são:

$$E_r = -\frac{\partial\mathcal{V}_i}{\partial r} = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 - G_i e^{-2\lambda(z_i - z)}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z - z_F)} \lambda r_i J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.130)$$

$$E_z = -\frac{\partial\mathcal{V}_i}{\partial z} = \frac{I}{2\pi\sigma_m} \int_0^\infty \frac{1 + G_i e^{-2\lambda(z_i - z)}}{1 - g_i G_i e^{-2\lambda(z_i - z_{i-1})}} e^{-\lambda(z - z_F)} \lambda r_i J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.131)$$

## 3.6 Problemas

1. Por meio da atribuição de valores específicos a alguns parâmetros do modelo, os resultados representados pelas equações (3.120) e (3.129) podem ser adaptados para representar o potencial elétrico na primeira camada de uma terra plana formada por  $n$  camadas horizontais, com a fonte de corrente também da primeira camada. Assim, para tanto, deve-se atribuir o valor nulo à condutividade  $\sigma_0$  para representar o ar e, por mera conveniência, também o valor nulo para  $z_0$ , fixando-se, dessa forma, a origem do sistema de coordenadas no plano representando a superfície da terra.

Como exercício, considerando que  $\sigma_0 = 0$  e  $z_0 = 0$ , demonstre que os potenciais  $\mathcal{V}_{\bar{1}}$  e  $\mathcal{V}_{\underline{1}}$  são expressos por:

### 3.7 Referências

- Erdélyi, A., ed. (1953a) Higher transcendental functions, vol. II, McGraw-Hill, New York.
- Erdélyi, A., ed. (1953b) Tables of integral transforms, vol. II, McGraw-Hill, New York.
- Sato, H. K. (1996) Fonte de corrente elétrica no interior de camadas horizontais cujas condutividades variam potencialmente com a profundidade, Tese de Doutorado, Univ. Federal da Bahia.
- Sato, H. K. (1997) Potencial em torno de uma fonte pontual de corrente elétrica em um semi-espaço cuja resistividade é função exponencial da profundidade, In: *Resumos Expandidos do 5o. Congres. Intern. da SBGf*, vol. 1, pp. 357–360, São Paulo.
- Sato, H. K. (2000) Potential field from a DC current source arbitrarily located in a nonuniform layered medium, *Geophysics*, **65**:1726–1732.

# Capítulo 4

## Eletrorresistividade

### 4.1 Eletrorresistividade

O método da eletrorresistividade baseia-se na observação, via de regra, da diferença entre os potenciais elétricos de dois pontos, associada a uma distribuição de correntes elétricas induzidas, artificialmente, no meio em estudo. A distribuição do potencial elétrico é função de parâmetros tais como a geometria do problema, as propriedades elétricas, em particular a resistividade elétrica e as intensidades das fontes de corrente elétrica.

#### 4.1.1 Fonte na superfície de um semi-espaco condutor

Este é o modelo simplificado da Terra, desprezando-se sua curvatura. Trata-se do problema elétrico associado a um eletrodo instalado na interface de um semi-espaco condutor de resistividade  $\rho$ . Este problema pode ser solucionado através do método das imagens. De fato, considerando, então, as expressões (2.13) e (2.14), devemos associar o ar ao meio 2, infinitamente resistivo, de sorte que o coeficiente de reflexão  $k_{21}$  iguala-se à unidade. Assim, o meio 1 fica associado ao nosso semi-espaco (Terra) e, fazendo  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ , posicionamos a fonte na interface entre os meios 1 e 2, ou seja, na superfície da Terra. Desta forma, a expressão do potencial reduz-se simplesmente a

$$\mathcal{V} = \frac{\rho I}{2\pi R}. \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Resistividade aparente

O conceito de resistividade aparente para o método da eletrorresistividade pode ser definido como a resistividade elétrica de um meio homogêneo que, substituindo um meio heterogêneo, provocaria as mesmas reações elétricas observadas nas mesmas condições geométricas dos eletrodos.

Vamos supor um experimento elétrico na superfície da Terra, desprezando-se a sua curvatura. Neste experimento, os bornes de uma fonte de corrente elétrica são conectados à terra em dois pontos A e B (eletrodos de corrente), provocando a circulação de uma corrente elétrica de intensidade  $I$ , que consideraremos positiva no ponto A (entrando na Terra) e negativa no ponto B. Enquanto isso, estaríamos determinando a diferença de potencial  $\Delta V$  entre dois outros pontos (M e N) (eletrodos de potencial).

Se a Terra em estudo for heterogênea, não teremos, evidentemente, condições de estimar, *a priori*, a diferença de potencial  $\Delta V$ . Contudo, se ela for homogênea, podemos utilizar a

expressão do potencial elétrico associado a uma fonte de corrente na superfície de um semi-espaço homogêneo e isotrópico, sobrepondo os potenciais devido às injeções de corrente sendo feitas em A e B. Em outros termos, podemos escrever que nos pontos M e N, os potenciais elétricos são dados por:

$$V_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right), \text{ e} \quad (4.2)$$

$$V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right), \quad (4.3)$$

onde  $\rho$  é a resistividade elétrica do semi-espaço homogêneo,  $I$ , a corrente elétrica, AM, AN, BM, e BN, as distâncias entre os pontos A e B para os pontos M e N. Assim, a diferença de potencial  $\Delta V$  é expressa por:

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right). \quad (4.4)$$

Isto posto, podemos considerar a possibilidade da estimação da resistividade do semi-espaço a partir do conhecimento de  $\Delta V$ ,  $I$  e as distâncias AM, BM, AN e BN. Para tanto, basta fazer uso da expressão anterior invertida para  $\rho$ , ou seja,

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} \left\{ \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} \right\}, \quad (4.5)$$

para se obter, experimentalmente, o valor da resistividade elétrica de um semi-espaço homogêneo. Porém, esta expressão invertida pode ser utilizada para resultados oriundos de situações generalizadas, particularmente não homogêneas. Neste contexto, o valor da resistividade elétrica assim obtido é dito “resistividade elétrica aparente”, ou simplesmente, “resistividade aparente” e corresponderia à resistividade de um meio homogêneo que, substituindo o verdadeiro, reproduziria os mesmos valores de  $\Delta V$  e  $I$ , nas mesmas condições geométricas dos pontos A, B, M e N.

### 4.1.3 Arranjo de eletrodos

Na expressão (4.5), o termo fracionário entre chaves é denominado “fator geométrico”, haja vista sua dependência apenas com a disposição relativa dos eletrodos em A, B, M e N.

Em princípio, não existe nenhum aspecto restritivo quanto a distribuição relativa desses eletrodos, a não ser a coincidência. Diversas distribuições foram bastante pesquisadas e nomeadas. A figura 4.1 apresenta alguns arranjos com suas respectivas expressões para a resistividade aparente  $\rho_a$ .

#### Arranjo Schlumberger ideal

Em relação ao arranjo Schlumberger, a disposição apresentada na figura 4.1 representa a maneira real da aplicação, ou seja, com quatro eletrodos. Todavia, no arranjo Schlumberger ideal, seria medido o campo elétrico  $E$  no ponto médio de AB e na direção de A para B, substituindo a medida da diferença de potencial elétrico entre os pontos M e N.

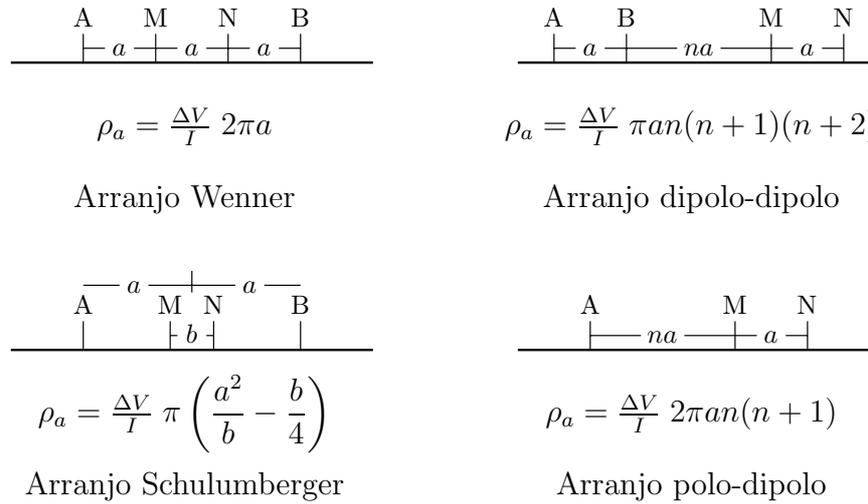


Figura 4.1: Arranjos de eletrodos.

Considerando o modelo do semi-espço homogêneo e isotrópico, o valor deste campo elétrico é a soma dos campos elétricos relacionados às fontes de corrente em A e B, ou seja,

$$E = \frac{\rho I}{2\pi a^2} - \frac{\rho(-I)}{2\pi a^2} = \frac{\rho I}{\pi a^2}. \quad (4.6)$$

Invertendo-se essa expressão, podemos escrever

$$\rho = \frac{E}{I} \pi a^2, \quad (4.7)$$

que é a expressão da resistividade aparente do arranjo Schlumberger ideal.

Contudo, se considerarmos a razão  $\Delta V/b$  como uma aproximação para o valor do campo elétrico  $E$ , a expressão acima pode ser reescrita como

$$\rho \approx \frac{\Delta V}{I} \pi \frac{a^2}{b}, \quad (4.8)$$

que, comparada à expressão da resistividade aparente do arranjo Schlumberger da na figura 4.1, mostra a parcela  $b/4$  como diferença. Portanto, o desvio entre as resistividades aparentes para o semi-espço homogêneo obtidas pela expressão do arranjo ideal para o arranjo a quatro eletrodos, pode ser expresso por

$$\epsilon = \frac{b/4}{a^2/b - b/4}. \quad (4.9)$$

Sendo assim, a fim de preservar um erro inferior a  $\epsilon$ , é necessário que

$$b \leq a \sqrt{\frac{4\epsilon}{1-\epsilon}}. \quad (4.10)$$

Assim, por exemplo, se mantivermos  $b < 0,2a$ , o erro será menor que 1%. Todavia, convém lembrar que não podemos escolher valores muito pequenos para  $b$  pois dificultaria a medida da diferença de potencial  $\Delta V$ .

#### 4.1.4 Modelo geométrico de camadas horizontais

##### Caso de duas camadas pelo método das imagens

Considerando o resultado representado pela expressão (2.22), vamos fazer  $z_F$  e  $z$  tenderem a zero, ou seja, tanto a fonte de corrente como o observador encontram-se na superfície (interface entre os meios 0 e 1). Além disso, vamos tornar infinita a resistividade da camada 0, de sorte que ela passe a representar o ar. Sob essa hipótese, o coeficiente  $k_{01}$  iguala-se à unidade e, assim, a primeira parcela do primeiro somatório da expressão (2.22) iguala-se ao termo que representa a contribuição direta da fonte de corrente.

Sendo assim, é mais conveniente a retirada desse termo do somatório, fazendo-se os ajustes necessários para que o somatório continue ainda a ter sua variável de controle iniciando-se com o valor unitário. Nesse caso, finalmente, os quatro somatórios igualam-se totalmente, permitindo escrever a seguinte expressão para o potencial elétrico:

$$\mathcal{V} = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{1 + (2iz_1/r)^2}} \right]. \quad (4.11)$$

onde  $k_{21} = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1) = (\rho_2/\rho_1 - 1)/(\rho_2/\rho_1 + 1)$  é o coeficiente de reflexão. Além disso, supondo que podemos derivar o somatório derivando cada um dos seus termos, podemos expressar o campo elétrico na direção  $\hat{r}$ , na superfície, como

$$E_r|_{z=0} = - \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \right|_{z=0} = \frac{\rho_1 I}{2\pi r^2} \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{1 + (2iz_1/r)^2}} \right]. \quad (4.12)$$

Utilizando a expressão do potencial elétrico (4.11) e a expressão da resistividade aparente do arranjo Wenner mostrada na figura 4.1, temos que, para o modelo de duas camadas,

$$\rho_{a,W} = \rho_1 \left[ 1 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{1 + (2iz_1/a)^2}} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{1 + (iz_1/a)^2}} \right]. \quad (4.13)$$

Por outro lado, utilizando a expressão do campo elétrico (4.12) e a expressão da resistividade aparente do arranjo Schlumberger ideal (4.7), temos

$$\rho_{a,Si} = \rho_1 \left[ 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{1 + (2iz_1/a)^2}} \right]. \quad (4.14)$$

Para o arranjo dipolo-dipolo, a expressão da resistividade aparente fica

$$\rho_{a,\text{dip-dip}} = \rho_1 \left[ 1 + n(n+1)(n+2) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{n^2 + (2iz_1/a)^2}} \right) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{(n+1)^2 + (2iz_1/a)^2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{21}^i}{\sqrt{(n+2)^2 + (2iz_1/a)^2}} \right]. \quad (4.15)$$

### Solução generalizada

Particularizando a expressão do potencial elétrico (3.129) para o caso em que a camada 0 corresponda ao ar ( $\sigma_0 = 0$ ), e que  $z_0 = z_F = z = 0$ , ou seja, modelando a situação de uma fonte de corrente instalada na superfície de uma Terra plana estratificada horizontalmente, formada por  $n$ -camadas de espessura  $h_i$  e resistividade elétrica  $\rho_i$ , podemos escrever que o potencial elétrico  $\mathcal{V}_1$  em um ponto afastado de  $r$  da fonte de corrente é dado por

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (4.16)$$

onde  $G_1$  é determinado por meio do seguinte processo recursivo:

$$G_i = \frac{1 - (\rho_{i+1}/\rho_i) F_i}{1 + (\rho_{i+1}/\rho_i) F_i}, \quad (4.17)$$

$$F_i = \frac{1 - G_{i+1} e^{-2\lambda h_{i+1}}}{1 + G_{i+1} e^{-2\lambda h_{i+1}}}, \quad (4.18)$$

$$G_{i+1} = \dots, \quad (4.19)$$

⋮

$$F_{n-1} = 1, \quad (4.20)$$

$$G_n = 0. \quad (4.21)$$

Considerando que  $\int_0^\infty J_0(\lambda r) d\lambda = 1/r$ , o potencial pode ser reescrito como

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda z_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda z_1}} - 1 \right] J_0(\lambda r) d\lambda \right\}. \quad (4.22)$$

Utilizando a expressão do potencial elétrico (4.22) e a expressão da resistividade aparente do arranjo Wenner mostrada na figura 4.1, temos que, para o modelo de  $n$ -camadas, a resistividade aparente Wenner  $\rho_{a,W}$  é dada por:

$$\rho_{a,W} = \rho_1 \left\{ 1 + 2a \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] [J_0(\lambda a) - J_0(\lambda 2a)] d\lambda \right\}. \quad (4.23)$$

A partir da expressão do potencial elétrico (4.22), podemos derivar o campo elétrico radial associado:

$$E_r|_{z=0} = - \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial r} \Big|_{z=0} = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \right]. \quad (4.24)$$

Este resultado juntamente com a expressão da resistividade aparente do arranjo Schlumberger ideal (4.7), permite escrever a resistividade aparente para o arranjo Schlumberger ideal:

$$\rho_{a,Si} = \rho_1 \left\{ 1 + a^2 \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] \lambda J_1(\lambda a) d\lambda \right\}. \quad (4.25)$$

Por outro lado, considerando o arranjo Schlumberger a quatro eletrodos dado na figura 4.1, a resistividade aparente é dada por

$$\rho_{a,S} = \rho_1 \left\{ 1 + \left[ \frac{a^2}{b} - \frac{b}{4} \right] \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] [J_0(\lambda(a - b/2)) - J_0(\lambda(a + b/2))] d\lambda \right\} \quad (4.26)$$

Para completar, podemos escrever que a resistividade aparente para o arranjo dipolo-dipolo é dado por

$$\rho_{a,\text{dip-dip}} = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{n(n+1)(n+2)a}{2} \times \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] [J_0(\lambda n a) - 2J_0(\lambda(n+1)a) + J_0(\lambda(n+2)a)] d\lambda \right\}. \quad (4.27)$$

#### 4.1.5 Curvas de resistividade aparente para camadas horizontais

A seguir, apresentaremos e discutiremos alguns aspectos associados às curvas de resistividade aparente para situações de 2 e 3 camadas.

- A figura 4.2 mostra as resistividades aparente Wenner e Schlumberger (ideal) em função do espaçamento  $a$ , para o caso de duas camadas horizontais. É interessante observar as

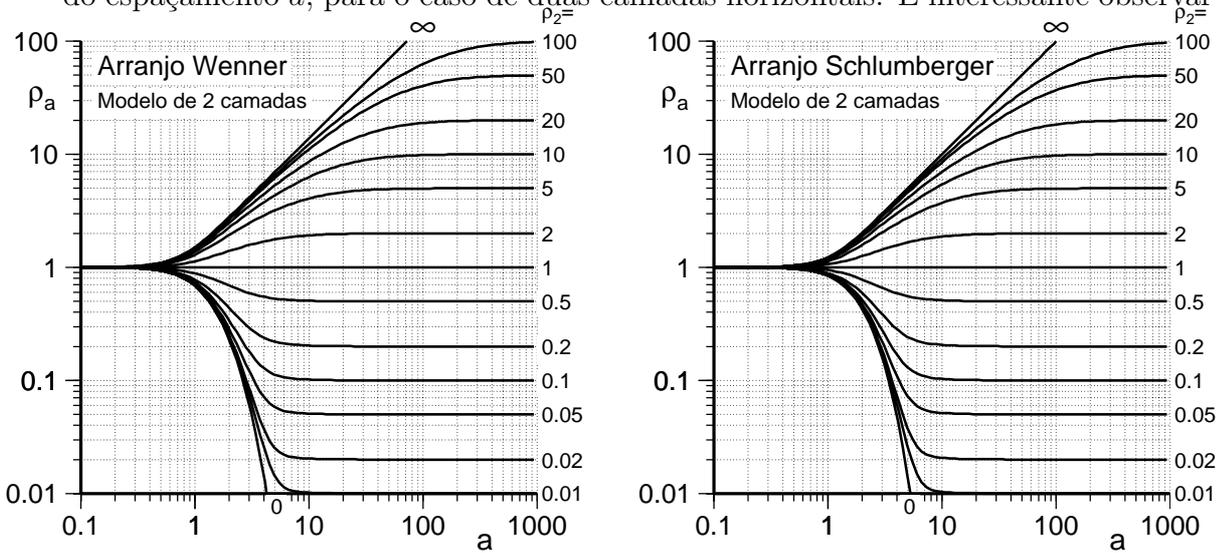


Figura 4.2: Resistividades aparentes Wenner e Schlumberger em função do espaçamento  $a$ , para o caso de duas camadas horizontais com  $\rho_1 = 1$ ,  $h_1 = 1$ , e diversos valores de  $\rho_2$

diferenças e similaridades existentes entre os gráficos obtidos com os arranjos Wenner ou Schlumberger. Todos gráficos têm um comportamento assintótico para pequenos e grandes valores de  $a$ , exceto para o caso em que é nula a resistividade da segunda camada. Para os pequenos valores  $a$ , a resistividade aparente tende para o valor da resistividade da camada superficial, enquanto que para grandes valores, a tendência é para o valor da resistividade da segunda camada, a inferior. O comportamento assintótico para o valor da segunda camada é mais acentuado quando a resistividade da segunda camada é inferior à resistividade da primeira.

Um outro fato a ser demonstrado mais adiante é que, quando a segunda camada é infinitamente resistiva, a curva da resistividade aparente tende assintoticamente para retas inclinadas a  $45^\circ$ , nas escalas escolhidas para representar as curvas, qual seja, o tamanho das décadas das escalas log na horizontal e na vertical é o mesmo. Independente desse fato, a assíntota para o arranjo Wenner é dado pela expressão

$$\rho_{a,W} \Big|_{\substack{a \gg h_1 \\ \rho_2 \rightarrow \infty}} = \rho_1 \frac{a}{h_1} 2 \ln 2, \quad (4.28)$$

enquanto que, para o arranjo Schlumberger ideal, por

$$\rho_{a, Si} \Big|_{\substack{a \gg h_1 \\ \rho_2 \rightarrow \infty}} = \rho_1 \frac{a}{h_1}. \quad (4.29)$$

- As figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 seguintes apresentam as curvas de resistividade aparente obtidas para o arranjo Schlumberger sobre uma estrutura de três camadas horizontais. Nessas figuras, duas situações estão exemplificados aos pares. Na primeira situação, são mantidas constantes as resistividades e espessuras da primeira e segunda camadas, enquanto é variada a resistividade da terceira. Na segunda situação, são mantidos constantes as resistividades das três camadas e a espessura da primeira, enquanto é variada a espessura da segunda.

Essas variações, ora da resistividade, ora da espessura, têm o objetivo de ressaltar as combinações nas quais, por exemplo, se prejudica inclusive o reconhecimento do modelo de três camadas, o que, sem dúvida, compromete o trabalho de interpretação.

As curvas de resistividade aparente de três camadas são tipificadas de acordo com a relação entre as resistividades das três camadas. Assim,

- se  $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ , a curva é dita do tipo H,
- se  $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ , a curva é dita do tipo K,
- se  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ , a curva é dita do tipo A, e
- se  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ , a curva é dita do tipo Q.

Nas condições modeladas para a figura 4.3, observa-se que tendem a ficar indistinguíveis, as curvas tipo H para grandes valores da resistividade da terceira camada. A figura

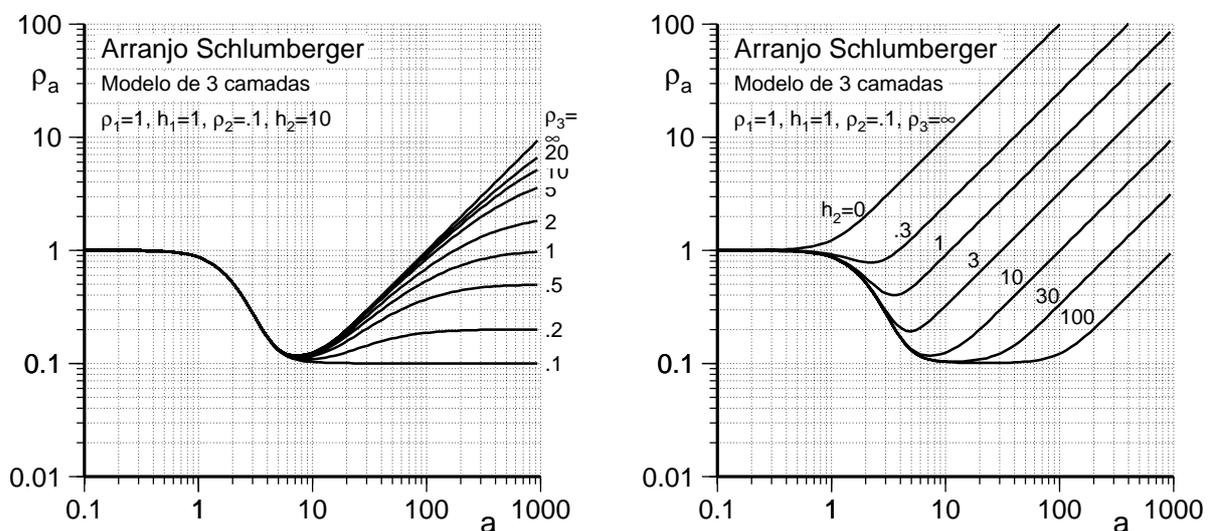


Figura 4.3: Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento  $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo H

exemplificando variações da espessura da segunda camada mostra, com clareza, a crescente dificuldade da estimativa visual da resistividade da segunda camada quando sua espessura encontrar-se simplesmente abaixo de 10, ou seja, dez vezes a espessura da primeira!

Na figura 4.4, as diversas curvas tipo K ali representadas mostram-se mais homogeneamente distribuídas, facilitando estimativas visuais. Porém, a curva da resistividade

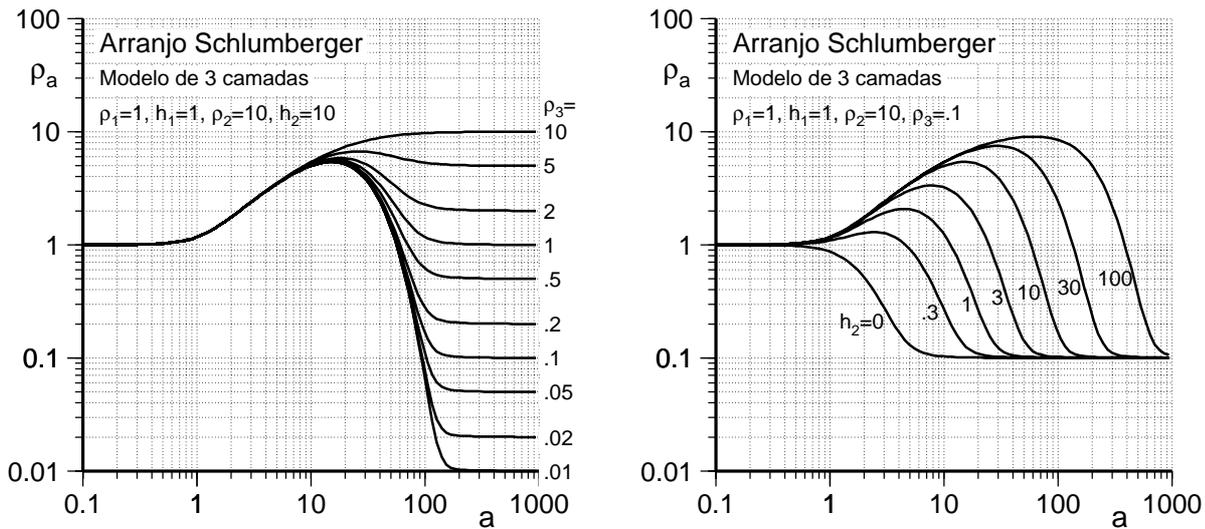


Figura 4.4: Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento  $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo K

aparente é mais sensível à espessura da segunda camada, se comparado com o que ocorre nas curvas tipo H, considerando o afastamento da resistividade aparente, do valor da resistividade da segunda camada.

Além disso, conforme se apresentam na figura 4.5, as curvas tipo A ficam, com o aumento da resistividade da terceira camadas, indistinguíveis até quanto ao número de camadas do modelo representado, mostrando o grau de dificuldade para se extrair informações

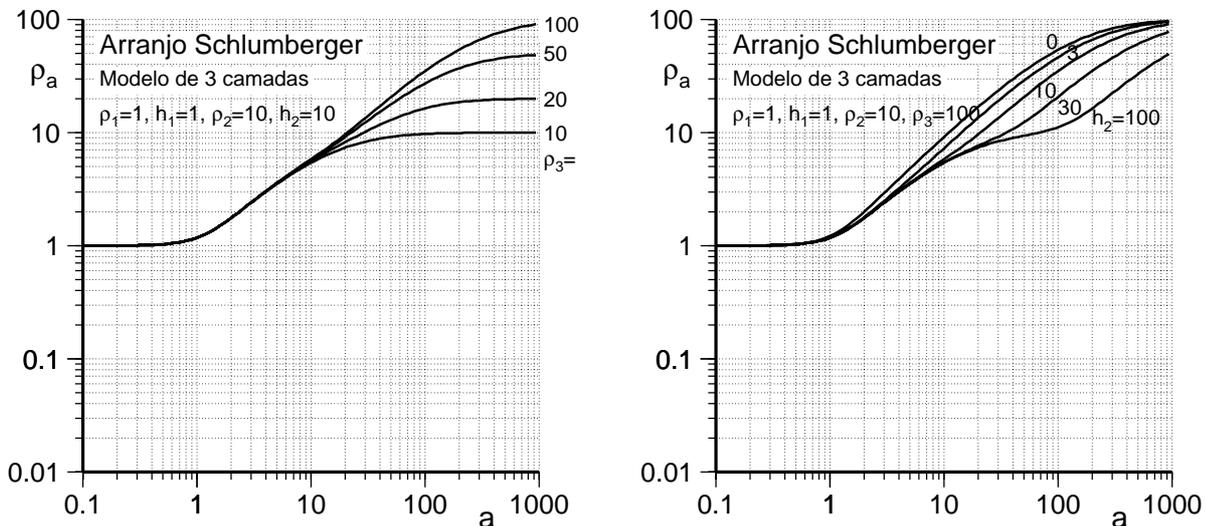


Figura 4.5: Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento  $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo A

sobre a camada intermediária inclusa numa sucessão de camadas com resistividades crescente.

Apesar de uma ligeira diminuição das dificuldades relacionadas às curvas tipo A, continuam persistindo problemas similares com as curvas do tipo Q, que encontram-se

representadas na figura 4.6.

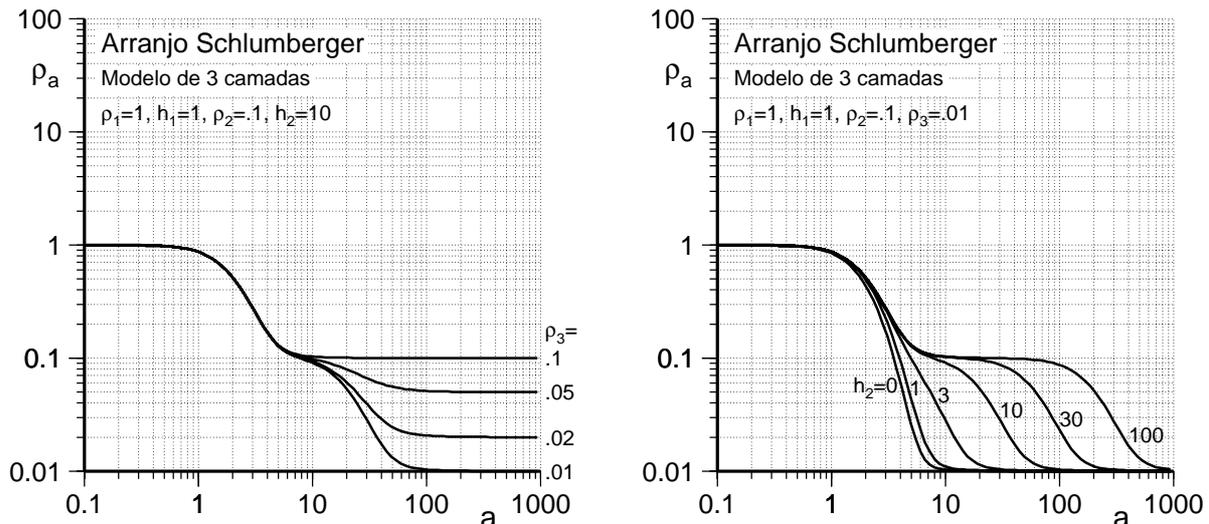


Figura 4.6: Resistividades aparentes Schlumberger em função do espaçamento  $a$ , para o caso de três camadas horizontais, tipo Q

A escolha da escala log-log não é uma mera opção. Observando as expressões (4.13) e (4.14) das resistividades aparentes, podemos deduzir que ambas as funções podem ser expressas na forma do produto:

$$\rho_a = \rho_1 f(\rho_2/\rho_1, a/z_1). \quad (4.30)$$

onde devemos destacar que  $f$  representa uma função das razões  $\rho_2/\rho_1$  e  $a/z_1$ . Isto significa que, na escala log-log, curvas para diferentes valores de  $\rho_1$ , porém mantida constante a razão  $\rho_2/\rho_1$  e o valor de  $z_1$ , traduzem-se em diferentes curvas as quais, entre si, são exatamente iguais a menos de um deslocamento na direção do eixo representando a resistividade. Por outro lado, se mantivermos constantes  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , diferentes valores de  $z_1$  traduzem-se em diferentes curvas iguais a menos de deslocamentos na direção do eixo representando a distância  $a$ . Em resumo, então, a menos de um maior detalhamento com relação a outros valores de  $\rho_2$ , as curvas mostradas na figura 4.2 representam todas aquelas para o modelo de duas camadas horizontais, bastando para isso, multiplicar a escala horizontal pelo real valor de  $z_1$ , e a escala vertical e os parâmetros da curvas pelo real valor de  $\rho_1$ .

A generalização da expressão (4.30) para um número qualquer de camadas pode ser visualizada por inspeção das expressões da resistividade aparente Wenner (4.23) e Schlumberger (4.25) obtidas com uso da formulação integral. Para tanto, deve-se fazer  $\lambda a = \xi$ , por exemplo, e observar como isso afeta as funções. O que se quer dizer é que para  $n$ -camadas, a generalização da função  $f$  da expressão (4.30) é função: (i) das razões das resistividades, como pode ser deduzido tendo em vista a expressão de  $G_i$  (4.17), e (ii) das razões de  $a/h_i$ , pois  $\lambda h_i = \xi h_i/a$ .

#### 4.1.6 Interpretação por coincidências parciais

O método de interpretação por coincidências parciais consecutivas é um processo gráfico, manual, que se faz repetindo-se a concordância de curvas de duas camadas a partes consecutivas dos dados plotados em uma escala log-log, num papel translúcido ou transparente.

Na primeira concordância, são determinadas a resistividade e espessura da primeira camada e a resistividade da segunda. Para a realização da segunda concordância, que permitirá obter a espessura da segunda camada e a resistividade da terceira, aglutina-se a primeira e a segunda numa camada fictícia, denominada camada equivalente 1. Esta camada equivalente sobrejacente à terceira recria a situação de “duas camadas” para ser analisada pelo método da concordância com as curvas teóricas de duas camadas, a fim de se obter a resistividade da terceira e espessura da segunda camada.

Se for necessário considerar uma quarta camada, a continuação deste processo se faz aglutinando-se a camada equivalente 1 com a terceira, formando uma camada equivalente 2 que, sobrejacente à quarta, recria para análise a situação de duas camadas que, analogamente ao passo anterior, permitirá definir a resistividade da quarta e a espessura da terceira.

Para dar início ao processo de concordância, uma das primeiras decisões deve ser o estabelecimento do número de camadas do modelo geoeletrico a ser atribuído aos dados em investigação. Como visto nos exemplos de curvas de três camadas, o comportamento assintótico das curvas de resistividade aparente é indicativo do número de camadas. Porém, sob determinadas circunstâncias, este comportamento é prejudicado, restando somente verificar as alterações de como está se dando a variação da seqüência dos dados de resistividade aparente. No mínimo, o fato dos valores da resistividade aparente se apresentar crescente ou decrescente com o espaçamento, é uma indicação evidente que pelo menos duas camadas estão envolvidas e cada alteração no sentido de variação é indicativo para se acrescentar uma camada ao modelo a ser ajustado. Cabe salientar que as curvas de resistividade aparente de modelos em que três das suas camadas se apresentam, seqüencialmente, com resistividades crescentes ou decrescentes, trazem o inconveniente de serem difíceis de ser reconhecidas como tal, conforme se pôde visualizar nos exemplos apresentados para curvas de resistividade aparente tipo A e Q.

Sem aventar qualquer camada equivalente, o processo de interpretação por coincidências parciais tem início considerando aqueles pontos dos dados  $(\rho_a, a)$  relativos aos espaçamentos  $a$  que se mostram ter influência limitada, preponderantemente, às propriedades elétricas da primeira e segunda camadas. A explanação que se segue divide-se em cinco partes, das quais as quatro primeiras tratam dos processos de interpretação das curvas tipo A, K, H e Q, e a quinta aplica os métodos apresentados em um exemplo de quatro camadas.

### Curvas de três camadas tipo A

A figura 4.7a apresenta os dados de três camadas (marcas circulares) sobrepostos a uma das curvas teóricas de duas camadas. Após esse ajuste, marca-se no papel contendo os dados, o ponto de coordenadas (1,1) das curvas teóricas. Este ponto, no referencial dos dados, tem como coordenadas  $(h_1, \rho_1)$ . O valor da resistividade  $\rho_1$  multiplicado pelo parâmetro da curva concordante (3 no exemplo) determina a resistividade  $\rho_2$  da segunda camada. Então, neste exemplo,  $\rho_1 = 2.5$ ,  $h_1 = 3$  e  $\rho_2 = 7.5$ . Considerando o que foi dito no início, o passo seguinte seria procurar uma curva de duas camadas que concordasse com um segundo trecho de dados. Porém, como foi explicado, devemos aglutinar as duas primeiras camadas para formar uma equivalente 1. Contudo, na medida em que a espessura da segunda camada ainda está para ser determinada, a camada equivalente não pode ser univocamente conhecida. Assim, considerando que a resistividade  $\rho_{e1}$  e a espessura  $h_{e1}$  da camada equivalente são funções de  $\rho_1$ ,  $h_1$ ,  $\rho_2$  e  $h_2$ , podemos escrever

$$\rho_{e1} = \rho_1 \rho_{e1}^*(\rho_2/\rho_1, h_2/h_1), \quad (4.31)$$

$$h_{e1} = h_1 h_{e1}^*(\rho_2/\rho_1, h_2/h_1). \quad (4.32)$$

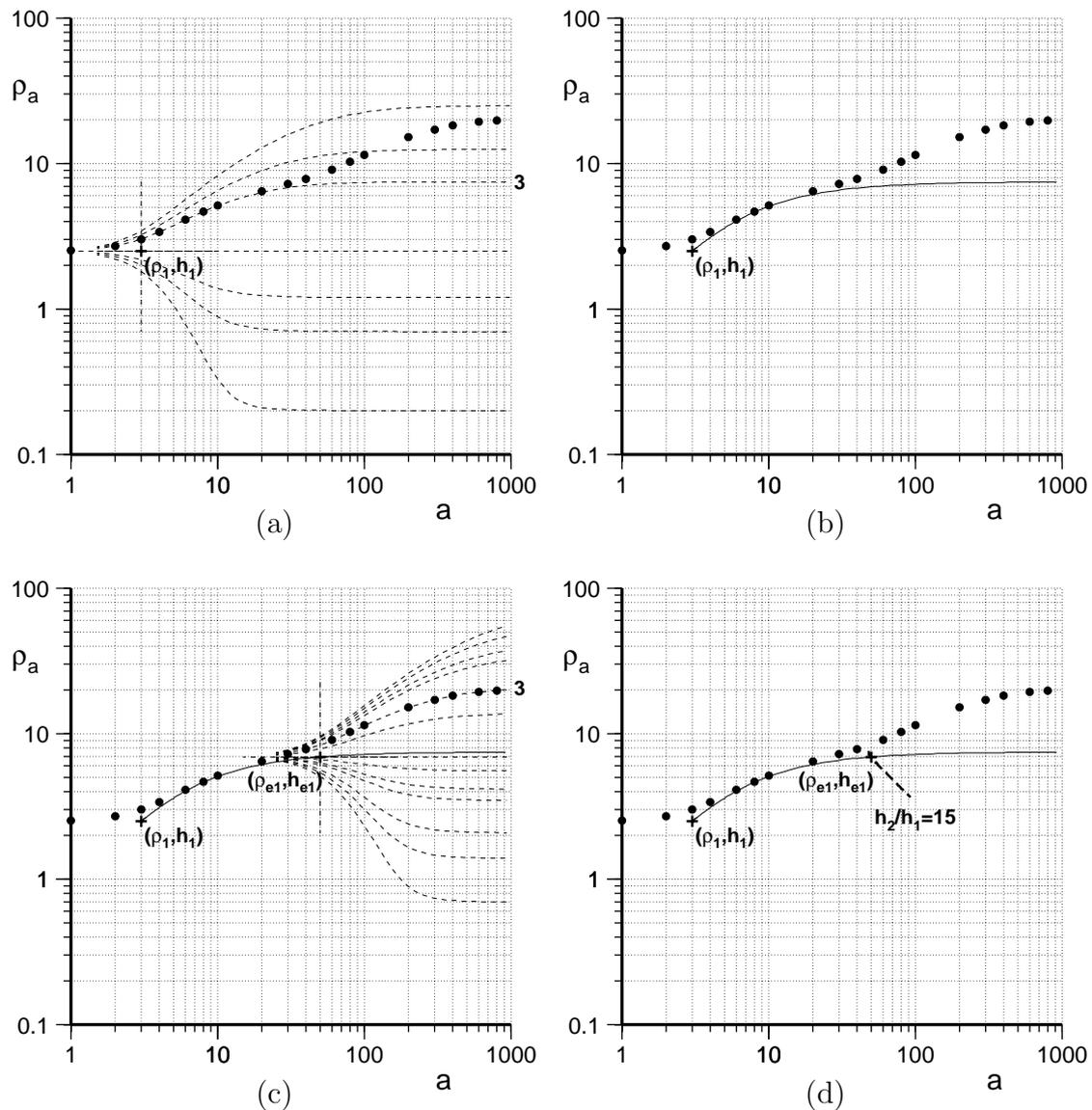


Figura 4.7: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo A relativo ao arranjo Wenner

Assim, ao variarmos  $h_2$ , os pontos  $(h_{e1}, \rho_{e1})$  no plano  $\rho_a \times a$  formam uma curva, denominada auxiliar. Como a camada equivalente é a própria primeira quando  $h_2 = 0$  e tende a coincidir com a segunda quando  $h_2 \rightarrow \infty$ , a curva auxiliar parte do ponto  $(h_1, \rho_1)$  e, para grandes valores de  $h_2$ , tende assintoticamente para a reta  $\rho_a = \rho_2$ . No nosso exemplo, esta curva está traçada no papel dos dados conforme mostra a figura 4.7b. Ela foi reproduzida de um conjunto de curvas auxiliares do tipo A, conforme mostra a figura 4.8a. A elaboração deste conjunto de curvas assim como as demais relativas aos outros tipos pode ser encontrada em Keller e Frischknecht (1966).

A etapa seguinte é a coincidência do segundo trecho dos dados a uma das curvas teóricas de duas camadas restringindo a localização do ponto referente à primeira camada teórica à curva auxiliar já desenhada. Esta solução está exemplificada na figura 4.7c. O ponto de coordenadas (1,1) das curvas teóricas deve ser marcado no papel dos dados, e suas coordenadas interpretadas como  $(h_{e1}, \rho_{e1})$ . O valor  $\rho_1$  multiplicado pelo parâmetro da curva concordante (3 no exemplo) é o valor da resistividade  $\rho_3$  da terceira camada. Assim, lendo as coordenadas,

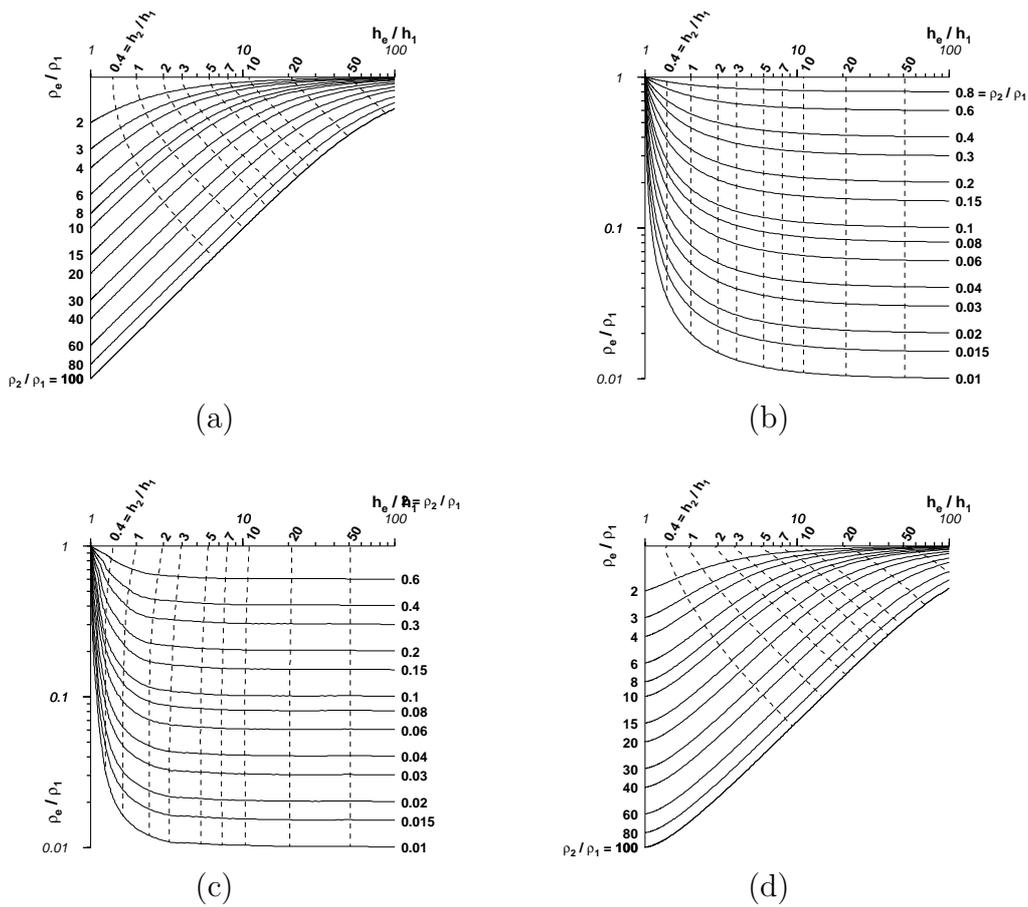


Figura 4.8: Coleção de curvas auxiliares: (a) tipo A, (b) tipo H, (c) tipo Q, (d) tipo K

temos que  $(h_{e1}, \rho_{e1}) = (50, 7)$ , então,  $\rho_3 = 3 \times 7 = 21$ .

Conforme mostra a figura 4.7d, após o reposicionamento da folha de dados sobre o conjunto das curvas auxiliares, o parâmetro da curva tracejada, que passa pelo ponto  $(h_{e1}, \rho_{e1})$ , é o valor da razão  $h_2/h_1$  (15 no exemplo), o que permite a determinação do valor de  $h_2$ , no caso,  $15 \times 3 = 45$ .

### Curvas de três camadas tipo H

A figura 4.9a apresenta os dados de três camadas do tipo H (marcas circulares) já sobrepostos a uma das curvas teóricas de duas camadas. Assim, dessa concordância, temos que  $(h_1, \rho_1) = (3, 25)$  e  $\rho_2/\rho_1 = 0.1$ , ou seja,  $\rho_2 = 2.5$ .

As duas etapas seguintes são o traçado da curva auxiliar e a busca da concordância da segunda parte dos dados. Conforme mostra a figura 4.9b, o traçado da curva auxiliar é feita reproduzindo-se a curva cheia, de parâmetro  $\rho_2/\rho_1$  (0.1 no exemplo), do conjunto de curvas auxiliares tipo H mostrado na figura 4.8b. A concordância com as curvas teóricas de duas camadas está mostrada na figura 4.9c, com a marcação do ponto  $(h_{e1}, \rho_{e1})$ , ou seja,  $(h_{e1}, \rho_{e1}) = (30, 2.7)$ . O parâmetro da curva concordante (5 no caso) multiplicado por  $\rho_{e1}$  fornece o valor de  $\rho_3$ , ou seja,  $\rho_3 = 5 \times 2.7 = 13.5$ .

Para finalizar, conforme mostra a figura 4.9d, reposicionamos a folha de dados sobre o conjunto de curvas tipo H para obter o parâmetro  $h_2/h_1$ . Neste exemplo, o parâmetro da curva tracejada que passa pelo ponto representando a camada equivalente 1 vale 9, e assim,  $h_2 = 9 \times 3 = 27$ .

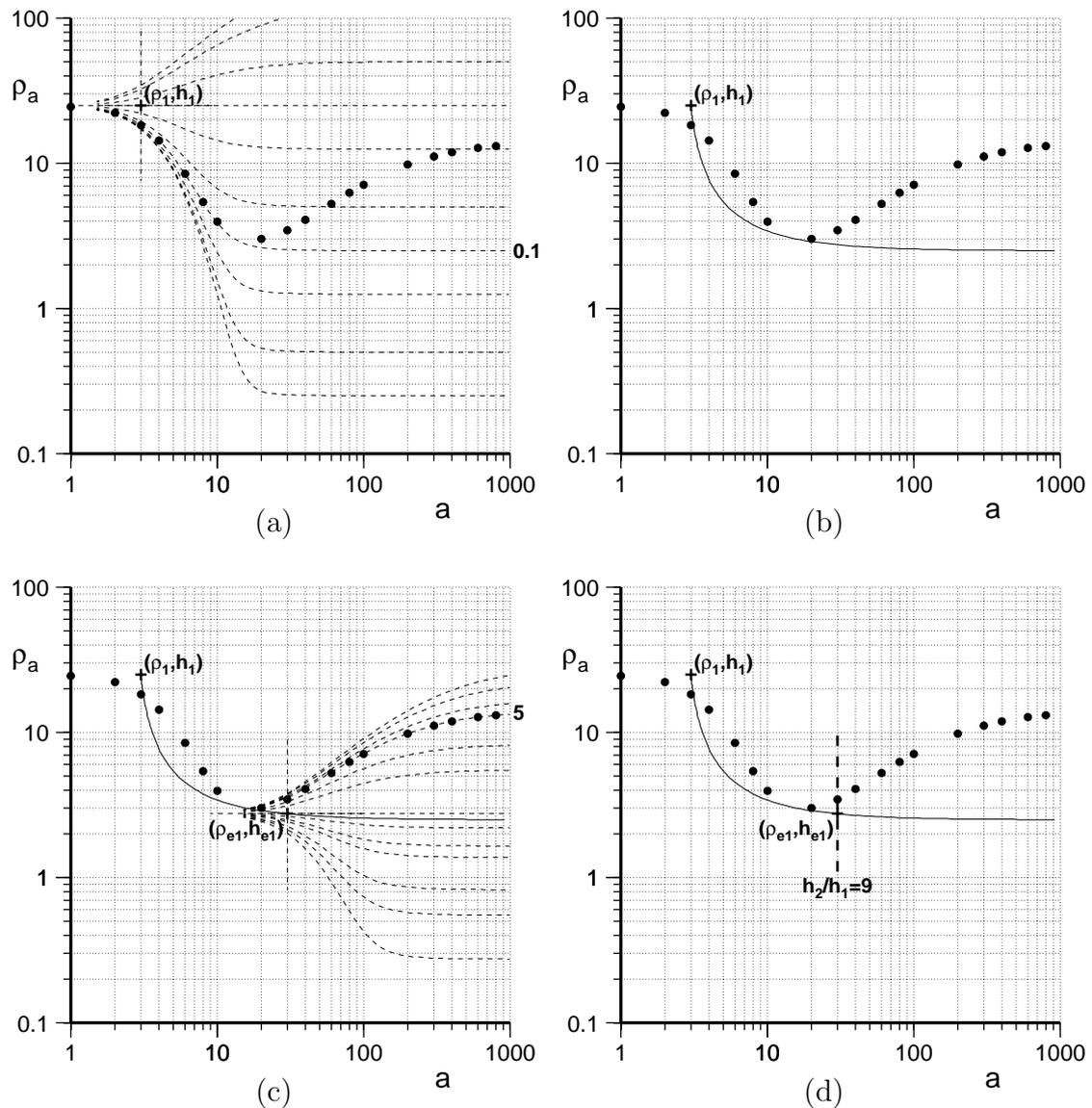


Figura 4.9: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo H relativo ao arranjo Wenner

### Curvas de três camadas tipo K

Considerando a figura 4.10a, temos os dados marcados por círculos e a concordância feita com uma das curvas teóricas de duas camadas, no caso, a de parâmetro de valor 3. Assim, no exemplo, temos que  $(h_1, \rho_1) = (3, 2.5)$  e  $\rho_2 = 3 \times 2.5 = 7.5$ . Reproduzido do conjunto de curvas auxiliares tipo K mostrado na figura 4.8c, o traçado da curva de parâmetro  $\rho_2/\rho_1 = 3$  está mostrado na figura 4.10b. Assim, passando-se à etapa da sobreposição da segunda parte dos dados, a figura 4.10c mostra o resultado, do qual podemos obter que  $(h_{e1}, \rho_{e1}) = (54, 7)$ . O parâmetro da curva concordante (0.2 no caso) multiplicado por  $\rho_{e1}$  fornece o valor de  $\rho_3$ , ou seja,  $\rho_3 = 0.2 \times 7 = 1.4$ .

Conforme indica a figura 4.10d, após o reposicionamento da folha de dados sobre o conjunto das curvas auxiliares utilizado, verificou-se que o parâmetro  $h_2/h_1$  da curva tracejada que passa pelo ponto  $(h_{e1}, \rho_{e1})$  vale 15, ou seja,  $h_2 = 15 \times 3 = 45$ .

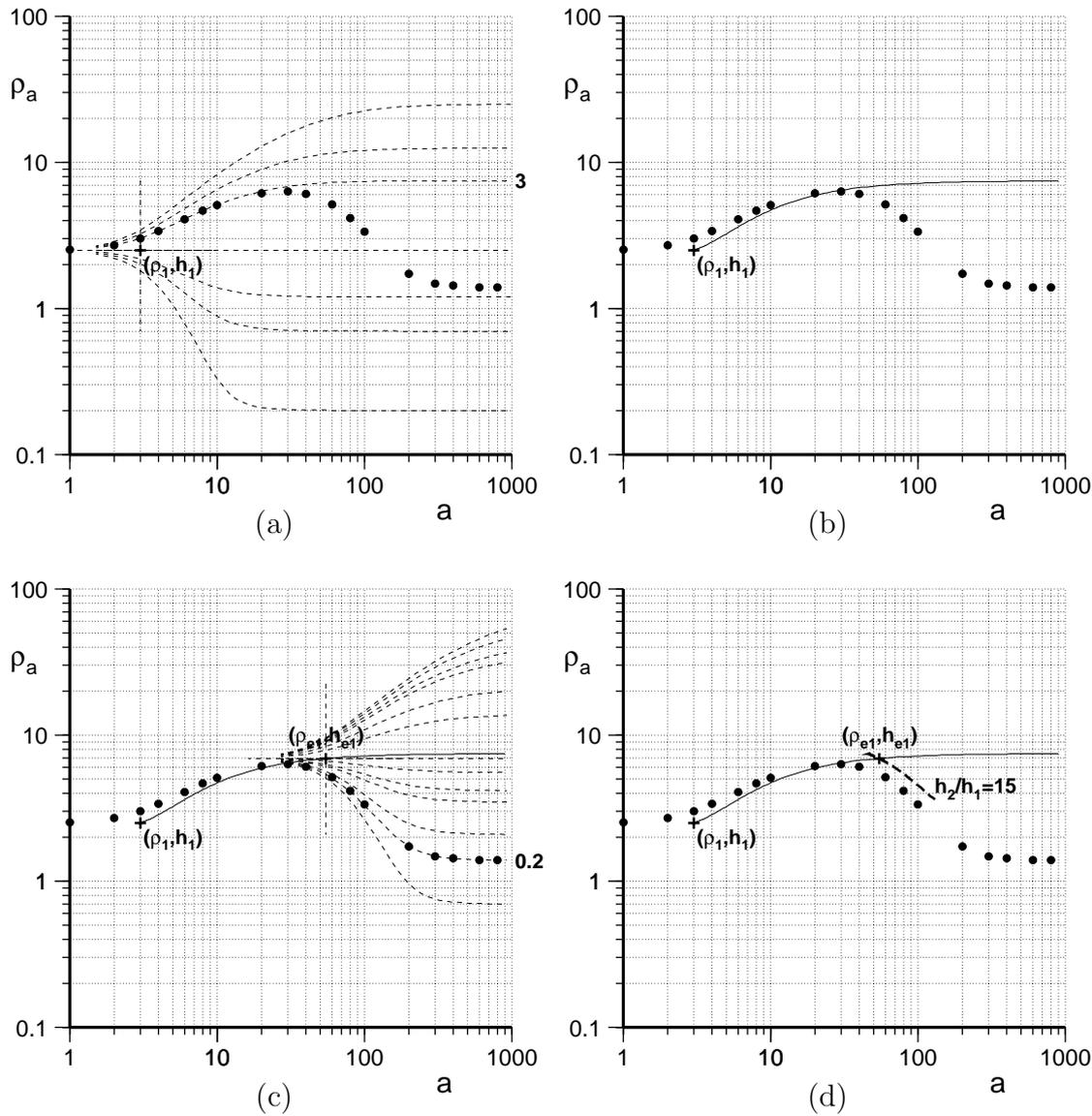


Figura 4.10: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo K relativo ao arranjo Wenner

### Curvas de três camadas tipo Q

Conforme indica a figura 4.11a, temos os dados marcados por círculos e a concordância sendo feita com a curva de parâmetro de valor 0.1, do conjunto das curvas teóricas de duas camadas. Assim, neste exemplo, temos que  $(h_1, \rho_1) = (3, 25)$  e  $\rho_2 = 0.1 \times 25 = 2.5$ . Reproduzindo do conjunto de curvas auxiliares tipo Q mostrado na figura 4.8d, a curva de parâmetro  $\rho_2/\rho_1 = 0.1$ , o seu traçado está mostrado na figura 4.11b. Assim, conforme a figura 4.11c, com a sobreposição da segunda parte dos dados obtemos  $(h_{e1}, \rho_{e1}) = (27, 2.6)$ , além do valor do parâmetro da curva concordante (0.3 no caso) o qual multiplicando  $\rho_{e1}$  fornece o valor de  $\rho_3$ , ou seja,  $\rho_3 = 0.3 \times 2.6 = 0.78$ .

Encerrando, a figura 4.11d apresenta o resultado do reposicionamento da folha de dados sobre o conjunto das curvas auxiliares utilizado, mostrando a curva tracejada que passa pelo ponto  $(h_{e1}, \rho_{e1})$ , cujo parâmetro  $h_2/h_1$  vale 9, ou seja,  $h_2 = 9 \times 3 = 27$ .

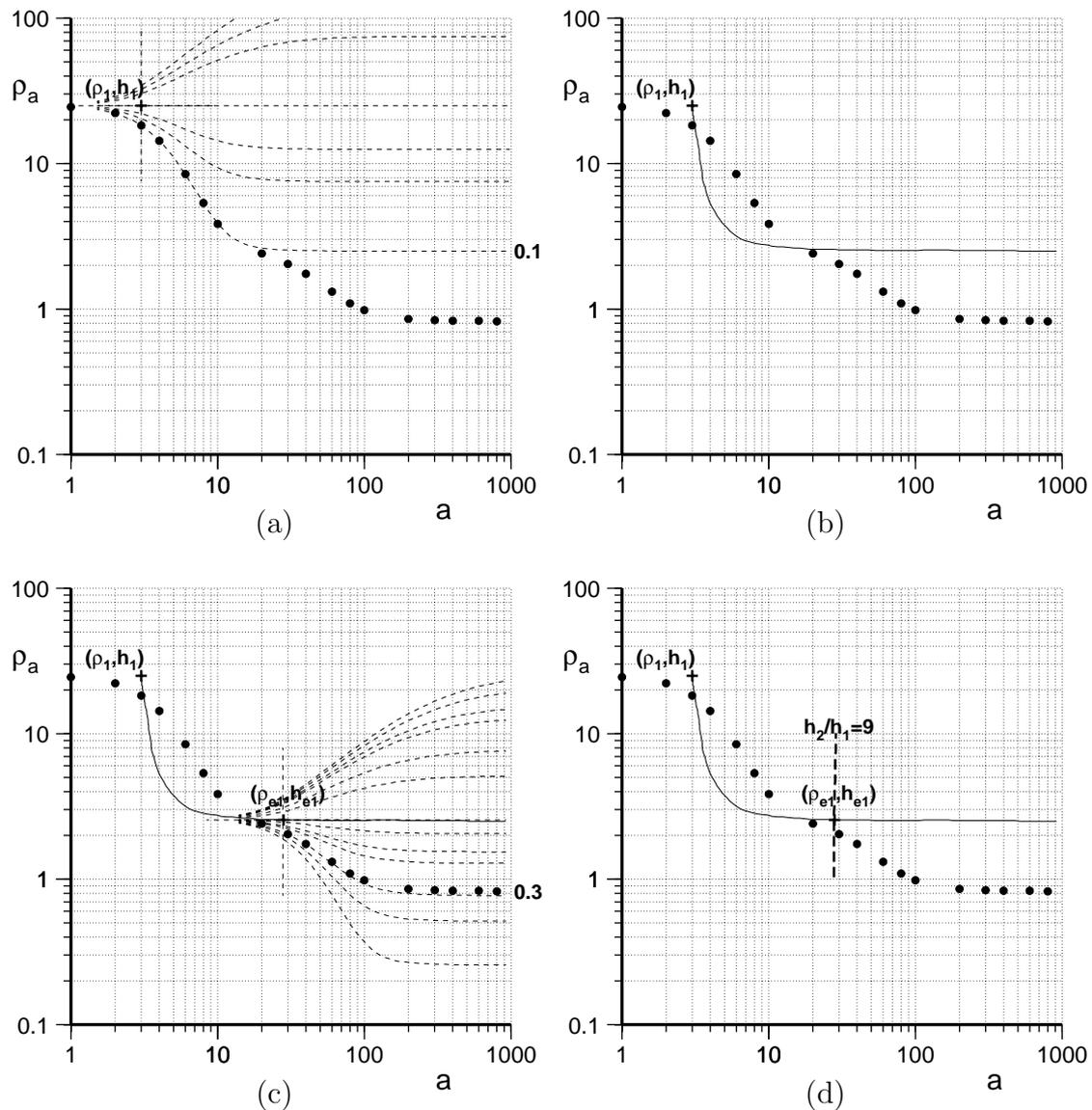


Figura 4.11: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo Q relativo ao arranjo Wenner

### Curvas de quatro camadas tipo QH

O exemplo a ser analisado é um conjunto de dados de uma sondagem elétrica vertical com o arranjo Wenner, na superfície de um meio, conforme está mostrado na figura 4.12a. Face ao comportamento dos dados, vamos presumir que se trata de uma situação de quatro camadas horizontais, no mínimo. Além disso, ainda com base nesse comportamento, vamos supor que as resistividades das quatro camadas dispõem-se com a seguinte relação:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$ . A tipificação QH resulta da análise de três em três camadas, das relações entre as resistividades. Assim, como a relação  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$  é do tipo Q e a relação  $\rho_2 > \rho_3 < \rho_4$  é do tipo H, a curva com  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 < \rho_4$  é classificada como QH.

Sendo assim, o processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar deve ser conduzido usando curvas auxiliares tipo Q, seguido do uso das do tipo H quando se considerar a quarta camada.

As figuras 4.12b, 4.12c, 4.12d e 4.13a mostram as etapas de interpretação pelo método do ponto auxiliar como se tratasse de um caso de três camadas tipo Q, ignorando os dados

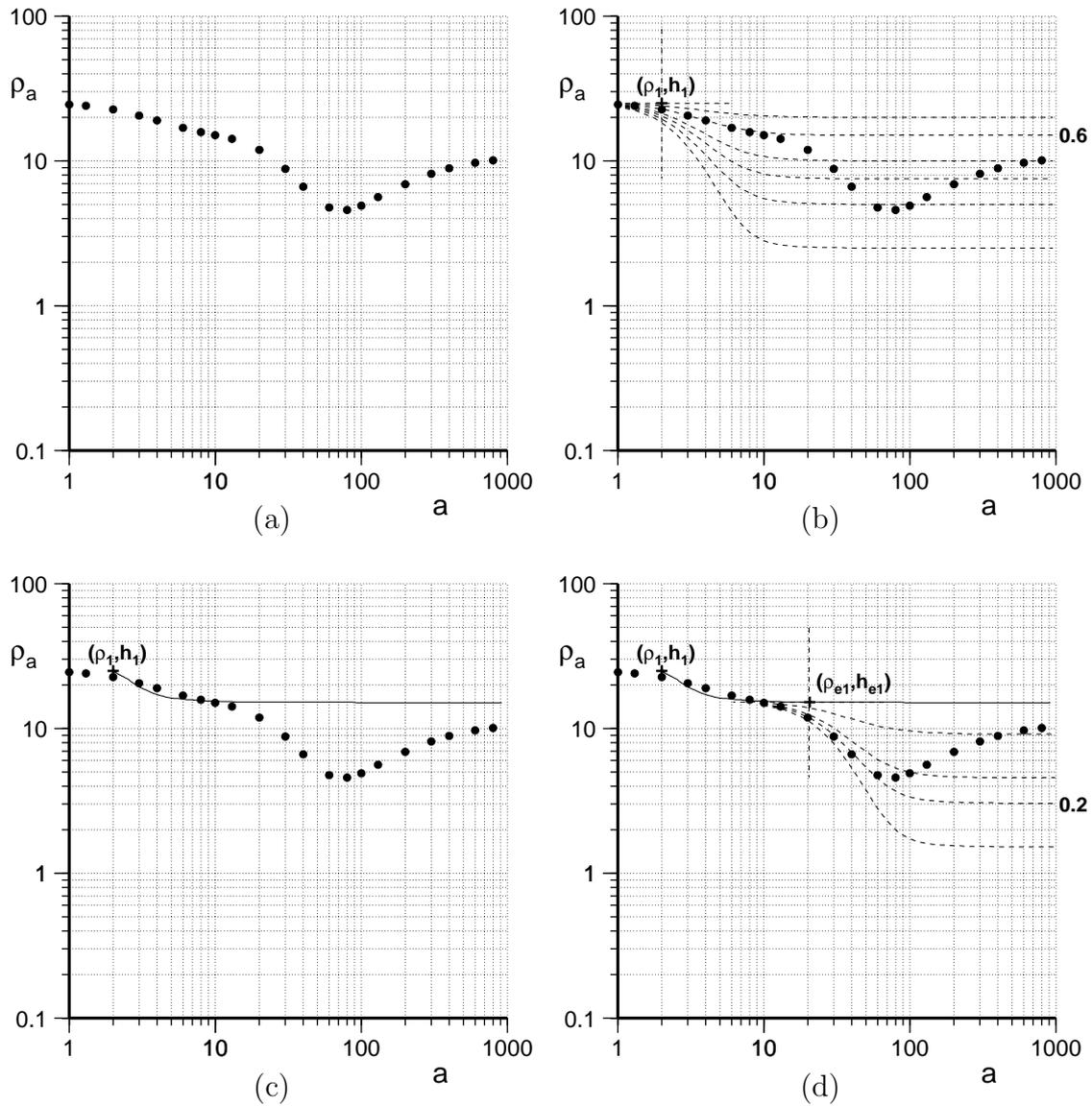


Figura 4.12: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo QH relativo ao arranjo Wenner

de resistividade aparente para valores de espaçamento maiores que 70, que se mostram ponderados pela características da quarta camada. Assim, as etapas que vão do dado inicial (fig. 4.12a) até a etapa representada pela figura 4.13a, podem ser sintetizadas pela quadro à esquerda da figura 4.14.

As etapas seguintes visando a determinação dos valores de  $\rho_4$  e  $h_3$ , estão ilustradas pelas figuras 4.13b, 4.13c e 4.13d, e o resumo dessas etapas encontra-se mostrado no quadro à direita da figura 4.14.

As últimas três figuras representam, respectivamente, (i) o traçamento da curva auxiliar tipo H de valor  $\rho_2/\rho_1 = 0.6$ , vinculado ao ponto  $(h_{e1}, \rho_{e1})$ , (ii) a coincidência dos dados finais a uma das curvas teóricas de duas camadas, para a determinação do ponto  $(h_{e2}, \rho_{e2})$  e o parâmetro da curva concordante  $(\rho_3/\rho_{e2})$  mostrando, no exemplo, que  $(h_{e2}, \rho_{e2}) = (82, 3.8)$  e  $(\rho_3/\rho_{e2}) = 3$ , e (iii) a verificação da curva  $h_2/h_1$ , que passa pelo ponto  $(h_{e2}, \rho_{e2})$ , cujo parâmetro deve ser interpretado como a razão  $h_3/h_{e1}$ , no caso, valendo 3.

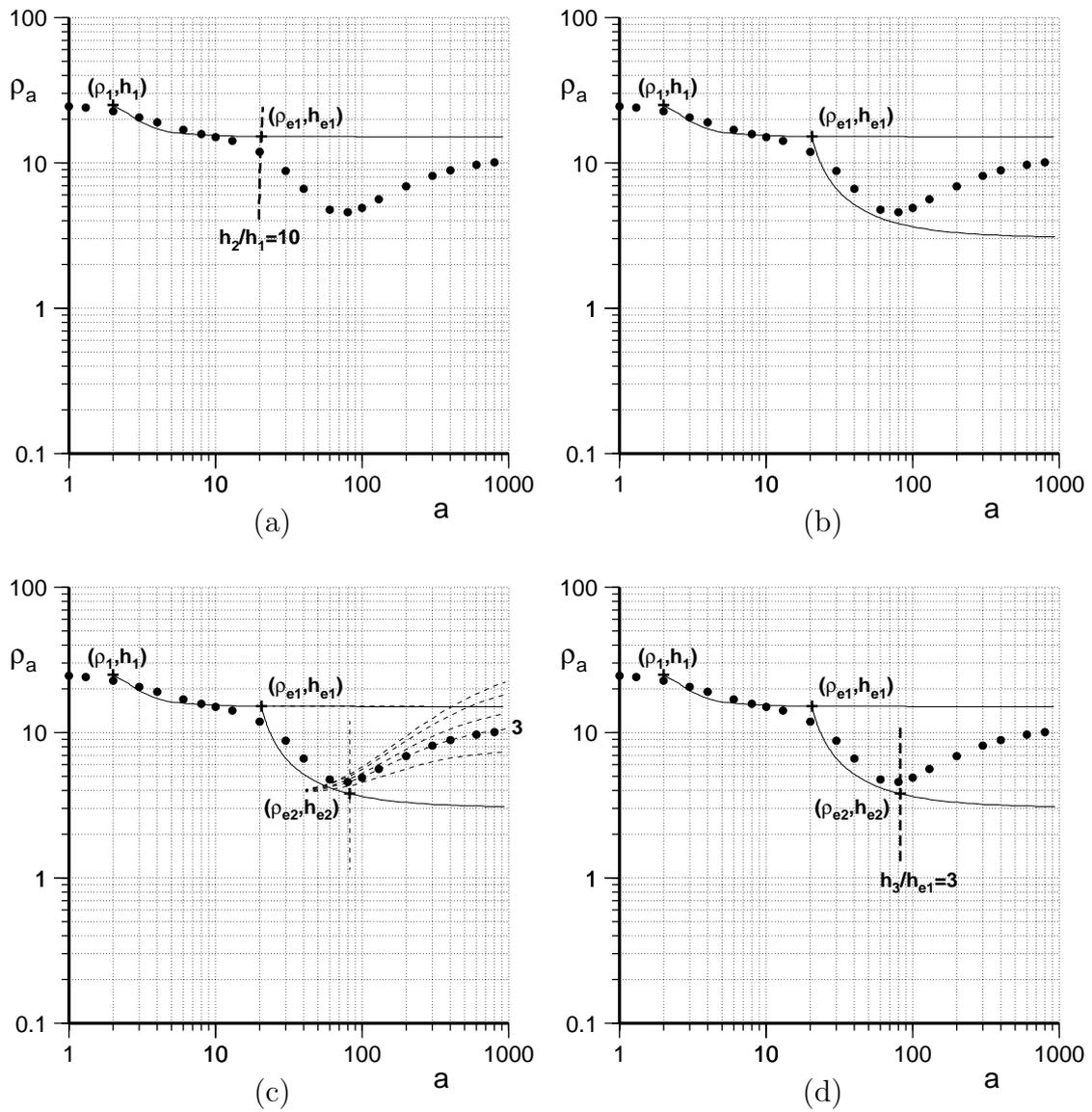


Figura 4.13: Passos do processo de interpretação pelo método do ponto auxiliar, de dados do tipo QH relativo ao arranjo Wenner

	Fig. 4.12b			
$\rho_1$	25			
$h_1$	2			
$\rho_2$	15			
	( $0.6 \times 25$ )	Fig. 4.12d	Fig. 4.13a	
	$h_2$		20	
			( $10 \times 2$ )	
	$\rho_3$	3		
		( $0.2 \times 15$ )		
	$\rho_{e1}$	15		
	$h_{e1}$	20		
			Fig. 4.13c	Fig. 4.13d
			$h_3$	60
				( $3 \times 20$ )
			$\rho_4$	3
				( $3 \times 3.8$ )
			$\rho_{e2}$	3.8
			$h_{e2}$	82

Figura 4.14: Quadro das etapas da interpretação da sondagem elétrica vertical, arranjo Wenner, ilustradas nas figuras 4.12 e 4.13

## 4.2 Problemas

1. Deduza a expressão do fator geométrico para os arranjos Wenner, Schlumberger, dipolo-dipolo e polo-dipolo.

Suponha um levantamento sendo feito com os eletrodos enterrados (a grandes profundidades). A fim de particularizar, considere que os quatro eletrodos estão equiespaçados, alinhados horizontalmente, como se fosse o arranjo Wenner enterrado, e, aplicando o conceito de resistividade aparente, deduza a expressão para o fator geométrico dessa situação.

2. Os dados mostrados na tabela a seguir são os resultados de um levantamento de eletrorresistividade usando o arranjo Schlumberger, feito no Campus de Ondina da UFBA. Obtenha o modelo geoeletrico correspondente, usando o modelo de camadas horizontais.

No.	AB/2 (m)	MN/2 (m)	$\rho_a$ ohm.m	No.	AB/2 (m)	MN/2 (m)	$\rho_a$ ohm.m
1	1,5	0,5	59,5	11	20	0,5	21,5
2	2,0	0,5	54,7	12	20	2,5	22,9
3	3,0	0,5	48,4	13	30	2,5	20,1
4	4,0	0,5	42,9	14	40	2,5	21,8
5	5,0	0,5	38,8	15	40	10	21,0
6	6,0	0,5	36,3	16	50	2,5	32,3
7	8,0	0,5	31,3	17	50	10	23,5
8	10	0,5	27,5	18	60	10	26,6
9	15	0,5	24,3	19	80	10	37,1
10	15	2,5	25,6	20	100	10	47,5

## 4.3 Referências

Keller, G. V. e Frischknecht, F. C. (1966) Electrical methods in geophysical prospecting, Pergamon Press, England.



# Capítulo 5

## Métodos Numéricos

Neste capítulo abordaremos dois temas. O primeiro irá tratar da avaliação das resistividades aparentes Wenner e Schlumberger, dadas pelas integrais (4.23) e (4.25). O segundo tema será a modelagem numérica de problemas de eletrorresistividade a corrente contínua.

### 5.1 Integração com filtragem digital

Para abordar a técnica de integração utilizando filtragem digital, vamos apresentar e discutir alguns conceitos fundamentais, sem grandes aprofundamento no formalismo.

#### 5.1.1 Série de Fourier

Considere uma função  $f(t)$  de período  $2\pi$ . Isto significa que  $f(t \pm 2n\pi) = f(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Vamos supor que existe uma série trigonométrica de forma que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt), \quad (5.1)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são coeficientes a serem determinados. Desta forma, tirando vantagem das propriedades de ortogonalidade que as funções senos e cossenos possuem, quais sejam:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nt \cos mt \, dt = 0, \quad \forall n, m > 0 \quad (5.2)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} mt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}, \quad (5.4)$$

multiplicamos a equação (5.1) por  $\cos mt$ , ( $m > 0$ ), e a integramos de  $-\pi$  a  $+\pi$ . Assim, podemos escrever

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \pi. \quad (5.5)$$

Similarmente, multiplicando por  $\operatorname{sen} mt$ , obtém-se

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \operatorname{sen} mt \, dt = b_m \pi. \quad (5.6)$$

O termo  $a_0$  é obtido pela integração de  $-\pi$  a  $+\pi$ , ou seja,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt = a_0\pi. \quad (5.7)$$

Esses resultados estabelecem que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  podem ser determinados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt dt, \quad (n \geq 0), \quad (5.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt dt, \quad (n > 0). \quad (5.9)$$

### Exemplo 1

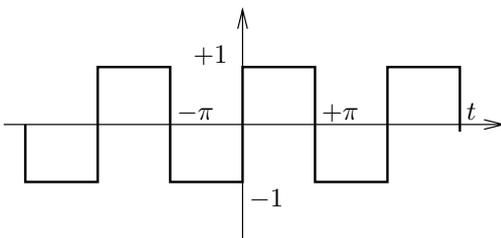


Figura 5.1: Onda quadrada

Considere a onda quadrada na fig. 5.1. Por se tratar de função ímpar, todos os coeficientes  $a_n$  serão nulos. Assim, usando a equação (5.9), podemos escrever que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (+1) \sin nt dt = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \quad (5.10)$$

Desta expressão, podemos constatar que os coeficientes de índice par também serão nulos e os ímpares alternam entre positivos e negativos. Isto significa que a onda quadrada pode ser representada por:

$$[\text{onda quadrada}] = \frac{4}{\pi} \left( \sin t - \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} - \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right) \quad (5.11)$$

### Exemplo 2

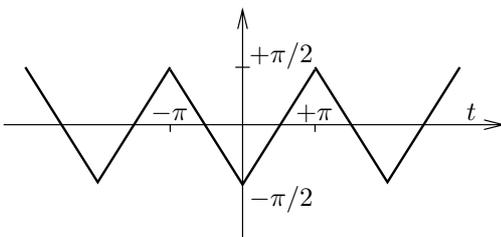


Figura 5.2: Onda triangular

Considere a onda triangular na fig. 5.2. Por se tratar de função par, todos os coeficientes  $b_n$  serão nulos. Assim, usando a equação (5.9), podemos escrever que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} + t\right) \cos nt dt = \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1). \quad (5.12)$$

Também, neste caso, podemos constatar que os coeficientes de índice par também serão nulos e os ímpares alternam entre negativos e positivos. Assim, a onda triangular em questão pode ser representada por:

$$[\text{onda triangular}] = \frac{4}{\pi} \left( -\cos t + \frac{\cos 3t}{9} - \frac{\cos 5t}{25} + \frac{\cos 7t}{49} - \dots \right). \quad (5.13)$$

Como fizemos a onda quadrada da fig. (5.1) ser a derivada da onda triangular da fig. (5.2), o fato também se repete nas representações em série deduzidas, ou seja, cada termo da série da onda quadrada é derivada do termo correspondente da série da onda triangular.

Quando o período da função é diferente de  $2\pi$ , digamos  $T$ , a função tem a seguinte característica  $f(t \pm nT) = f(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Neste caso, as expressões da série e dos coeficientes são dadas por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right), \quad \text{ou} \quad (5.14)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (5.15)$$

onde  $\omega = 2\pi/T$ , e

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (n \geq 0), \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (n > 0). \quad (5.17)$$

Considerando as relações  $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$  e  $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ , a série de Fourier pode ser escrita como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left( \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left( \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right) \right], \quad (5.18)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in\omega t} \right], \quad (5.19)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{in\omega t} \right] + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\omega t} \right], \quad (5.20)$$

$$\text{ou } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (5.21)$$

onde

$$c_n = \begin{cases} (1/2)(a_n + ib_n) & \text{se } n < 0, \\ (1/2)a_0 & \text{se } n = 0, \\ (1/2)(a_n - ib_n) & \text{se } n > 0. \end{cases} \quad \text{ou} \quad (5.22)$$

$$(5.23)$$

Entretanto, é possível estabelecer que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad (5.24)$$

tanto pelas definições de  $a_n$  e  $b_n$  como considerando a ortogonalidade das exponenciais complexas, representada pelo fato de que

$$\int_{-T/2}^{+T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \text{ ou} \\ T & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (5.25)$$

## 5.2 Diferenças finitas

Diversos métodos têm sido empregados para a modelagem numérica de problemas de eletrorresistividade a corrente contínua: equações integrais (Oppliger, 1984), métodos de elementos finitos (Fox et al., 1980), métodos de diferenças finitas (Mufti, 1976; Dey e Morrison, 1979; Zhao e Yedlin, 1996b) método espectral de Chebyshev em multidomínio (Zhao e Yedlin, 1996a), e métodos do contornos de elementos (Xu, Zhao e Ni, 1998) que é um caso especial do método de integração. Cada técnica tem suas próprias vantagens e adequação a determinadas geometrias do modelo em estudo (Zhao e Yedlin, 1996b).

### 5.2.1 Modelagem 3-D

Seguindo Dey e Morrison (1979), vamos apresentar as etapas que controem as equações de diferenças finitas para o estudo da distribuição do potencial elétrico  $\phi$  em condições de corrente contínua, para modelos tridimensionais de uma terra plana.

O potencial elétrico deve obedecer a equação diferencial

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = I\delta(x - x_s, y - y_s, z - z_s), \quad (5.26)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica e  $I\delta(x - x_s, y - y_s, z - z_s)$  representa uma fonte de corrente elétrica pontual, localizada em  $(x_s, y_s, z_s)$ . Além da equação diferencial, o potencial elétrico  $\phi$  deve satisfazer as condições de contorno na superfície  $\Gamma$  que limita a região  $R$  em estudo. A condição de contorno a ser satisfeita é do tipo

$$\alpha(x, y, z)\phi(x, y, z) + \beta(x, y, z)\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial\eta} = f_2(x, y, z), \quad (5.27)$$

com  $\alpha(x, y, z) \geq 0$ ,  $\beta(x, y, z) \geq 0$ , e  $\alpha + \beta > 0$ .

### Discretização do problema de resistividade tridimensional

Para simular um semi-espaco com uma distribuição arbitrária da condutividade elétrica, vamos considerar uma grade tridimensional, retangular, com lados paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esta grade é formada por  $L$  pontos na direção  $x$ ,  $M$  pontos na direção  $y$  e  $N$  pontos na direção  $z$ , conforme ilustra a figura 5.3. Além disso, tomando como referência o nó  $(i, j, k)$ ,

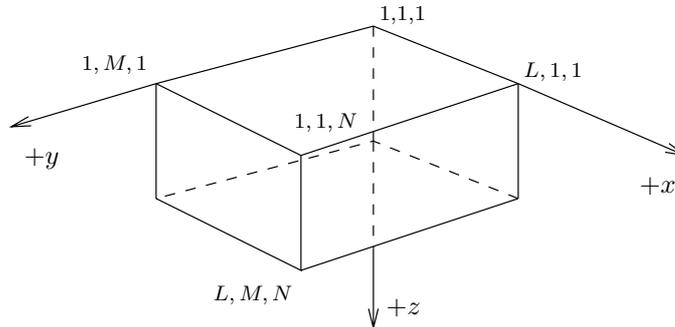


Figura 5.3: Grade tridimensional com  $L \times M \times N$  nós

vamos denominar por: (i)  $\Delta x_i$ , a distância na direção  $x$  até o nó  $(i + 1, j, k)$ , (ii)  $\Delta y_j$ , a distância na direção  $y$  até o nó  $(i, j + 1, k)$ , e (iii)  $\Delta z_k$ , a distância na direção  $z$  até o nó  $(i, j, k + 1)$ .

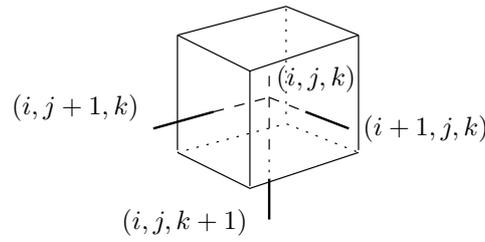


Figura 5.4: Elemento de volume  $\Delta V_{i,j,k}$  associado a um nó  $(i, j, k)$  interior a  $R$

Assim, como mostra a figura 5.4,  $\Delta V_{i,j,k}$  é o volume do prisma com o nó  $(i, j, k)$  em seu interior, cujas faces são planos medianos aos segmentos que vão deste nó aos seus vizinhos:  $(i+1, j, k)$ ,  $(i-1, j, k)$ ,  $(i, j+1, k)$ ,  $(i, j-1, k)$ ,  $(i, j, k+1)$  e  $(i, j, k-1)$ , sendo, portanto,

$$\Delta V_{i,j,k} = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})(\Delta z_k + \Delta z_{k+1})}{8}. \quad (5.28)$$

Com relação à condutividade eléctrica discretizada por essa grade, vamos considerar que  $\sigma_{i,j,k}$  refere-se ao volume do prisma delimitado pelos nós  $(i, j, k)$ ,  $(i+1, j, k)$ ,  $(i, j+1, k)$ ,  $(i+1, j+1, k)$ ,  $(i, j, k+1)$ ,  $(i+1, j, k+1)$ ,  $(i, j+1, k+1)$  e  $(i+1, j+1, k+1)$ .

Com essas hipóteses, para cada nó  $(i, j, k)$  ao qual refere-se o potencial  $\phi_{i,j,k}$  desconhecido, podemos integrar a equação (5.26) sobre o volume  $\Delta V_{i,j,k}$ , ou seja,

$$-\iiint_{\Delta V_{i,j,k}} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) \, dx_i \, dy_j \, dz_k = I(x_s, y_s, z_s). \quad (5.29)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, podemos reescrever a equação anterior como

$$-\iint_{S_{i,j,k}} \sigma \nabla \phi \cdot d\mathbf{S}_{i,j,k} = -\iint_{S_{i,j,k}} \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \, dS_{i,j,k} = I(x_s, y_s, z_s), \quad (5.30)$$

onde  $\eta$  é a direcção normal, para fora da superfície  $S_{i,j,k}$ .

Teremos, então, que desenvolver esta integral de superfície para todos os nós da grade. Porém, os nós localizados em  $\Gamma$  constituem-se em exceções a serem analisadas individualmente ou em grupo, quais sejam, as oito quinas, doze arestas e seis superfícies.

### Nós no interior da região $R$

Retomando a figura 5.4, o fluxo de corrente será aproximado pela soma de seis parcelas, correspondendo uma a uma às seis faces do volume  $\Delta V_{i,j,k}$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
\iint_{\hat{S}_{i,j,k}} \sigma_{i,j,k} \frac{\partial \phi_{i,j,k}}{\partial \eta} dS_{i,j,k} \approx & \frac{\phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right] \\
& + \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_i} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
& + \frac{\phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
& + \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_j} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right] \\
& + \frac{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} \right] \\
& + \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} \right. \\
& \left. + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right].
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Este resultado junto com a equação (5.30) permite-nos escrever, para cada nó interno a  $R$ , uma equação em termos de coeficientes de acoplamento:

$$\begin{aligned}
\frac{ijk}{-x} \phi_{i-1,j,k} + \frac{ijk}{+x} \phi_{i+1,j,k} + \frac{ijk}{-y} \phi_{i,j-1,k} + \frac{ijk}{+y} \phi_{i,j+1,k} + \\
\frac{ijk}{-z} \phi_{i,j,k-1} + \frac{ijk}{+z} \phi_{i,j,k+1} + \frac{ijk}{P} \phi_{i,j,k} = I(x_s, y_s, z_s),
\end{aligned} \tag{5.32}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{-x} = & -\frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{+x} = & -\frac{1}{\Delta x_i} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta y_j \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{-y} = & -\frac{1}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{+y} = & -\frac{1}{\Delta y_j} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta z_k}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{-z} = & -\frac{1}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{ijk}{C}_{+z} = & -\frac{1}{\Delta z_k} \left[ \sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} \right. \\ & \left. + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\frac{ijk}{C}_P = - \left[ \begin{matrix} ijk & ijk & ijk & ijk & ijk & ijk \\ C & C & C & C & C & C \\ -x & +x & -y & +y & -z & +z \end{matrix} \right] \quad (5.39)$$

### Nós na interface $\Gamma$

Nos nós localizados na superfície  $\Gamma$ , devemos considerar as equações relativas às condições de contorno. A consideração que o modelo refere-se à uma terra plana, devemos considerar a condição do tipo Neumann na superfície correspondente aos nós  $(i, j, 1)$ , ou seja,

$$\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad (5.40)$$

onde  $\eta$  é a direção normal à superfície.

Nas demais interfaces planas, devemos escolher um mecanismo para substituir a ausência da distância infinita na simulação. Ao se afastar essas interfaces, tanto da fonte de corrente

como das heterogeneidades, espera-se que os valores no contorno aproximem-se, assintoticamente, de valores, que podem ser especificados com base nas soluções para o meio homogêneo ou meio acamado, constituindo-se, dessa forma, em condições de contorno do tipo Dirichlet.

Porém, quando a distribuição da condutividade for arbitrária, torna-se difícil estabelecer um modelo primário adequado, com solução analítica, para estabelecer os valores de contorno. Nessa situação, pode-se supor que o potencial no contorno é nulo (condição de contorno do tipo Dirichlet) ou que a corrente normal à superfície de contorno é nula (condição de contorno do tipo Neumann). Contudo, tais considerações têm resultado em subestimação (primeiro caso) ou sobreestimação (segundo caso) do potencial além de uma certa distância da fonte (Coggon, 1971).

Assim, a utilização de uma condição de contorno do tipo mista (Dey e Morrison, 1979) pode ser mais adequado. Para tanto, vamos considerar que, longe da fonte e das heterogeneidades, o comportamento do potencial elétrico é do tipo

$$\phi = A/r, \quad (5.41)$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -\frac{A}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (5.42)$$

$$= -\frac{\phi}{r} \cos \theta, \quad (5.43)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre as direções radial e normal à interface. Esta condição de contorno do tipo mista usa o comportamento físico do potencial nas superfícies de contorno distantes e não requer um conhecimento “a priori” tanto do potencial como sua derivada normal em termos de um modelo primário de estrutura de condutividade. Além disso, tem a vantagem inerente da pouca necessidade de se reduzir o refinamento da grade próximo aos limites e, simultaneamente, as reflexões devido as fontes virtuais ao longo das arestas são eliminadas.

A seguir, serão obtidos os coeficientes de acoplamento para os nós localizados na face  $(i, j, N)$ , na aresta  $(i, M, N)$  e na quina  $(L, M, 1)$ . Os demais casos são, evidentemente, similares.

**Nós na face  $(i, j, N)$**  Nos nós localizados na superfície inferior da região  $R$ , os volumes correspondentes têm “metade” dos volumes referentes aos nós internos, conforme ilustra a figura 5.5. Neste caso, o fluxo da corrente elétrica deve ser formado com a aplicação da

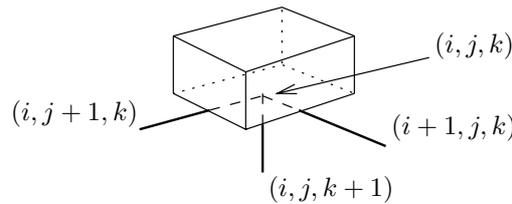


Figura 5.5: Elemento de volume associado ao nó na superfície inferior da região  $R$

condição de contorno mista à face voltada para a direção  $+\hat{z}$ . Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_{i,j,k}} \sigma_{i,j,k} \frac{\partial \phi_{i,j,k}}{\partial \eta} ds_{i,j,k} &\approx \frac{\phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
&+ \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_i} \left[ \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
&+ \frac{\phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
&+ \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_j} \left[ \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
&+ \frac{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} \right] \\
&- \phi_{i,j,k} \frac{|z_k - z_s|}{r^2} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} \right]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Assim, em termos da equação (5.32), temos

$$\frac{ijk}{C}_{-x} = - \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \tag{5.45}$$

$$\frac{ijk}{C}_{+x} = - \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j \Delta z_{k-1}}{4} \right] \tag{5.46}$$

$$\frac{ijk}{C}_{-y} = - \frac{1}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \tag{5.47}$$

$$\frac{ijk}{C}_{+y} = - \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{ijk}{C}_{-z} &= - \frac{1}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_j}{4} \right]
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\frac{ijk}{C}_{+z} = 0 \tag{5.50}$$

$$\frac{ijk}{P} = - \left[ \frac{ijk}{C}_{-x} + \frac{ijk}{C}_{+x} + \frac{ijk}{C}_{-y} + \frac{ijk}{C}_{+y} + \frac{ijk}{C}_{-z} \right] - \frac{ijk}{-z} \frac{|z_k - z_s| \Delta z_{k-1}}{r^2} \tag{5.51}$$

**Nós na aresta**  $(i, M, N)$  A figura 5.6 mostra o volume associado a um nó localizado na aresta  $(i, M, N)$ . Este volume é “um quarto do volume associado aos nós interiores. O fluxo de corrente pela superfície desse volume deve ser avaliado considerando as condições de contorno

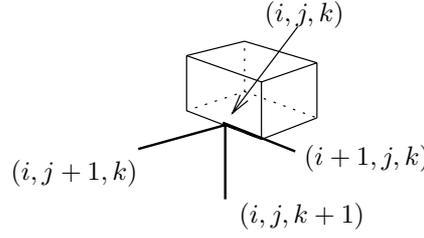


Figura 5.6: Volume associado ao nó da aresta  $(i, M, N)$

do tipo misto aplicado às faces voltadas para as direções  $+\hat{y}$  e  $+\hat{z}$ . Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_{i,j,k}} \sigma_{i,j,k} \frac{\partial \phi_{i,j,k}}{\partial \eta} ds_{i,j,k} &\approx \frac{\phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
 &+ \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_i} \left[ \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
 &+ \frac{\phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
 &- \phi_{i,j,k} \frac{|y_j - y_s|}{r^2} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \\
 &+ \frac{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right] \\
 &- \phi_{i,j,k} \frac{|z_k - z_s|}{r^2} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} \right]
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Os coeficientes de acoplamento ficarão, então, valendo:

$$\frac{ijk}{-x} C = - \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4 \Delta x_{i-1}} \tag{5.53}$$

$$\frac{ijk}{+x} C = - \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{4 \Delta x_i} \tag{5.54}$$

$$\frac{ijk}{-y} C = - \frac{1}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{4} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta z_{k-1}}{4} \right] \tag{5.55}$$

$$\frac{ijk}{+y} C = \frac{ijk}{+z} C = 0 \tag{5.56}$$

$$\frac{ijk}{-z} C = - \frac{1}{\Delta z_{k-1}} \left[ \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta x_i \Delta y_{j-1}}{4} + \sigma_{i-1,j-1,k-1} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} \right] \tag{5.57}$$

$$\frac{ijk}{P} C = - \left[ \frac{ijk}{-x} C + \frac{ijk}{+x} C + \frac{ijk}{-y} C + \frac{ijk}{-z} C \right] - \left[ \frac{ijk}{-y} C \frac{|y_j - y_s| \Delta y_{j-1}}{r^2} + \frac{ijk}{-z} C \frac{|z_k - z_s| \Delta z_{k-1}}{r^2} \right] \tag{5.58}$$

**Nó de quina**  $(L, M, 1)$  Considerando a figura 5.7 representando o volume associado ao nó de quina  $(L, M, 1)$ , seu volume é “um oitavo” do associado aos nós interiores. O fluxo de corrente pela sua superfície envolvente é dado por:

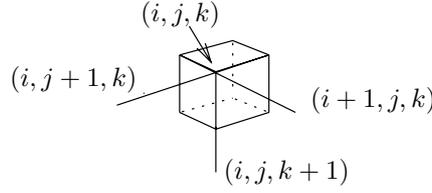


Figura 5.7: Volume associado ao nó da quina  $(L, M, 1)$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{i,j,k}} \sigma_{i,j,k} \frac{\partial \phi_{i,j,k}}{\partial \eta} ds_{i,j,k} \approx & \frac{\phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right] \\ & - \phi_{i,j,k} \frac{|x_i - x_s|}{r^2} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4} \right] \\ & + \frac{\phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y_{j-1}} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right] \\ & - \phi_{i,j,k} \frac{|y_j - y_s|}{r^2} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4} \right] \\ & + \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z_k} \left[ \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4} \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Deve ser observado que aplicamos a condição de fluxo de corrente nula à interface voltada para a direção  $-\hat{z}$ , e a condição do tipo mista às interfaces voltadas para as direções  $+\hat{x}$  e  $+\hat{y}$ . Assim, os coeficientes de acoplamento valem

$$\begin{aligned} \overset{ijk}{C} = \overset{ijk}{C} = \overset{ijk}{C} = 0 \\ \underset{+x}{C} \quad \underset{+y}{C} \quad \underset{-z}{C} \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\overset{ijk}{C} = -\sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1} \Delta z_k}{4 \Delta x_{i-1}} \quad \underset{-x}{C} \quad (5.61)$$

$$\overset{ijk}{C} = -\sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta z_k}{4 \Delta y_{j-1}} \quad \underset{-y}{C} \quad (5.62)$$

$$\overset{ijk}{C} = -\sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{4 \Delta z_k} \quad \underset{+z}{C} \quad (5.63)$$

$$\overset{ijk}{C} = - \left[ \overset{ijk}{C} + \overset{ijk}{C} + \overset{ijk}{C} \right] - \left[ \overset{ijk}{C} \frac{|x_i - x_s| \Delta x_{i-1}}{r^2} + \overset{ijk}{C} \frac{|y_j - y_s| \Delta y_{j-1}}{r^2} \right] \quad \underset{P}{C} \quad (5.64)$$

### Formulação matricial

A equação de diferenças (5.32) pode ser escrita para todos os nós da região  $R$ , formando um conjunto com  $LMN$  equações que, simbolicamente, podemos representar por

$$\mathbf{C} \Phi = \mathbf{S}, \quad (5.65)$$

onde  $\mathbf{C}$  representa uma matriz  $LMN \times LMN$  contendo os coeficientes de acoplamento,  $\Phi$  é o vetor com os  $LMN$  potenciais  $\phi_{i,j,k}$  desconhecidos, e  $\mathbf{S}$ , o vetor contendo as fontes.

Considerando as expressões de acoplamento obtidas e denominando por  $C_{p,q}$  cada elemento da matriz  $\mathbf{C}$ , podemos constatar que (i)  $C_{p,p} > 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, LMN$ ; (ii)  $C_{p,p} \geq |C_{p,q}|$ ,  $p = 1, 2, \dots, LMN$ , ou seja,  $\mathbf{C}$  é diagonalmente dominante; (iii)  $\mathbf{C}$  é simétrica, esparsa e bandeada com, somente, seis codiagonais não nulas.

### 5.3 Referências

- Coggon, J. H. (1971) Electromagnetic and electrical modeling by finite element method, *Geophysics*, **36**:132.
- Dey, A. e Morrison, H. F. (1979) Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, *Geophysics*, **44**(4):753–780.
- Fox, R. C.; Hohmann, G. W.; Killpack, T. J. e Rijo, L. (1980) Topographic effect in resistivity and induced polarization surveys, *Geophysics*, **45**:75–93.
- Mufti, I. R. (1976) Finite-difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures, *Geophysics*, **41**:62–78.
- Oppliger, G. L. (1984) Three-dimensional terrain corrections for mise-a-la-masse and magnetometric resistivity surveys, *Geophysics*, **49**:1718–1729.
- Xu, S.-Z.; Zhao, S. e Ni, Y. (1998) A boundary element method for 2-D dc resistivity modeling with a point current source, *Geophysics*, **63**:399–404.
- Zhao, S. e Yedlin, M. J. (1996a) Multidomain Chebyshev spectral method for 3-D dc resistivity modeling, *Geophysics*, **61**:1616–1623.
- Zhao, S. e Yedlin, M. J. (1996b) Some refinements on the finite-difference method for 3-D dc resistivity modeling, *Geophysics*, **61**:1301–1307.

# Capítulo 6

## Polarização Elétrica Induzida

### 6.1 Histórico

O assim reconhecido como fenômeno da polarização elétrica induzida tem sido relatado desde o início do século XX por C. Schlumberger (Bertin e Loeb, 1976; Luo e Zhang, 1998)

Entretanto, a discussão sobre os fatores físicos responsáveis são bastante diversificados, principalmente

ssim considernao asdf

asdf akjkajsf asdf

### 6.2 Fenômeno Macroscópico

### 6.3 Fenômeno Microscópico

### 6.4 Domínio da Frequência

### 6.5 Equipamentos

### 6.6 Formas de Representação

### 6.7 Modelagem

### 6.8 Referências

Bertin, J. e Loeb, J. (1976) Experimental and theoretical aspects of induced polarization, vol. 1, Gebrüder Borntraeger, Berlin.

Luo, Y. e Zhang, G. (1998) Theory and application of spectral induced polarization, In: D. V. Fitterman, ed., *Geophysical Monograph Series*, vol. 8, Society of Exploration Geophysicists.



# Apêndice A

## Formulação

- Gradiente

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

- Coordenadas esféricas

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

- Divergente

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

- Rotacional

- Coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

– Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

– Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

• Laplaciano

– Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

– Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

– Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

• Identidades vetoriais

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla u$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = u\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla u$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

- Raízes da equação cúbica

Uma equação cúbica,  $y^3 + py^2 + qy + r = 0$  pode ser reduzida para a forma

$$x^3 + ax + b = 0$$

através da substituição o valor de  $y$  por  $x - p/3$ . Assim,

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2) \text{ e } b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r).$$

Considerando

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

os valores das raízes serão dadas por:

$$x = \begin{cases} A + B \\ -\frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2}\sqrt{-3} \\ -\frac{A + B}{2} - \frac{A - B}{2}\sqrt{-3} \end{cases}$$

Se  $p, q, r$  são reais, então

- se  $b^2/4 + a^3/27 > 0$ , existirão uma raiz real e duas complexas conjugadas,
- se  $b^2/4 + a^3/27 = 0$ , existirão três raízes reais sendo, no mínimo, duas iguais, e
- se  $b^2/4 + a^3/27 < 0$ , existirão três diferentes raízes reais.

No último caso, a solução trigonométrica é mais útil. Calculando o valor do ângulo  $\phi$  pela expressão

$$\cos \phi = -\frac{b}{2} \div \sqrt{\left(-\frac{a^3}{27}\right)},$$

as raízes serão dadas por

$$x = \begin{cases} 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \frac{\phi}{3} \\ 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\phi}{3} + 120^\circ\right) \\ 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\phi}{3} + 240^\circ\right) \end{cases}$$

- Raízes da equação quártica

Uma equação quártica,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

tem sua equação cúbica resolvente

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0.$$

Seja  $y$  uma raiz qualquer dessa equação, e

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y}.$$

Então,

– se  $R \neq 0$ , faz-se

$$D = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}}, \text{ e}$$

$$E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}}, \text{ ou}$$

– se  $R = 0$ , faz-se

$$D = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 2b + 2\sqrt{y^2 - 4d}}, \text{ e}$$

$$E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 2b - 2\sqrt{y^2 - 4d}},$$

e as quatro raízes da equação original são dadas por:

$$x = \begin{cases} -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2} \\ -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2} \end{cases}$$